

# 非均匀层结下的对称不稳定<sup>\*</sup>

张立凤 张 铭

(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100080)

**摘 要** 研究了非均匀层结下的对称不稳定, 给出了不稳定发生的判据, 并将该微分方程的特征值问题化为一个实对称矩阵的特征值问题, 还取不同的层结廓线进行了数值计算。

**关键词** 对称不稳定 非均匀层结 特征值问题

## 1 引言

近年来, 人们发现对称不稳定在中尺度系统如飑线、雨带等的发生和形成中起着重要作用。对称不稳定的研究目前已做了许多工作<sup>[1~4]</sup>。从这些工作中可见, 对称不稳定能否发生取决于  $Ri$  的大小, 也就是决定于环境场的风切变和层结稳定度。但以往的研究中几乎都假定了环境参数为常数。实际上大气中的环境场是非常复杂的。环境场的风切变和层结稳定度随高度是有明显变化的, 实际大气中的层结稳定度往往是低层小于中高层, 因此层结参数随高度的变化对对称不稳定的增长率及其结构必然有影响, 故讨论层结参数变化下的对称不稳定问题是十分必要的。为简单起见, 在本文中仍假定科里奥利参数及风的水平切变和垂直切变为常数。在这种情况下给出了对称不稳定的判据及计算其增长率和不稳定环流结构的数值方法。

## 2 数学模式

在绝热情况下, 设只在  $x$  方向存在基流, 且基流是  $y, z$  的双线性函数, 对 Boussinesq 方程组线性化并考虑到扰动的对称性后, 可引入流函数  $\psi$ , 这时  $v = -\partial\psi/\partial x$ ,  $w = \partial\psi/\partial y$ , 最后可得方程<sup>[4]</sup>

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + F^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

这里  $S^2 = -f\bar{u}_z$ ,  $F^2 = f(f - \bar{u}_y)$  均为常数, 但  $N^2$  已是  $z$  的函数。在不考虑地形时, 方程 (1) 的边界条件为  $z=0$ ,  $\psi=0$ ;  $z=H$ ,  $\psi=0$ , 其中  $H$  为模式顶的高度, 可取为对流层顶的高度或逆温层底的高度。

设正规波解  $\psi(t, y, z) = \Psi(z)e^{\sigma t + imy}$ , 代入 (1) 式可得

1995-08-16 收到, 1996-12-02 收到再改稿

• 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室和国家自然科学基金资助的课题

$$(\sigma^2 + F^2) \frac{d^2 \Psi}{dz^2} - 2imS^2 \frac{d\Psi}{dz} - m^2(\sigma^2 + N^2)\Psi = 0, \quad (2)$$

其相应的边条件为:  $\Psi(0)=0, \Psi(H)=0$ 。为了将 (2) 式化为实系数方程, 作变换:  $\Psi(z) = e^{\alpha z} \Phi(z)$ , 且令  $\alpha = -imS^2 / (\sigma^2 + F^2)$ , 则 (2) 式可化为

$$\lambda^2 \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + (m^2 S^2 - m^2 \tilde{N}^2 \lambda - m^2 \lambda^2) \Phi = 0, \quad (3)$$

这里  $\lambda = \sigma^2 + F^2$ ,  $\tilde{N}^2 = N^2 - F^2$ , 相应的边条件为

$$\Phi(0) = \Phi(H) = 0. \quad (4)$$

(3) 式是一个实系数方程, 但由于  $N^2$  是  $z$  的函数, 故其是变系数的线性齐次常微分方程。(3) 式与边条件 (4) 构成了一个线性常微分方程的特征值问题, 但这是一个特殊的特征值问题, 特征值在 (3) 式中是以非线性的形式表现的, 故求解有一定的困难。

若  $N^2$  是  $z$  的线性函数, 通过变换, (3) 式可化为 Bessel 方程。并可解析求得该方程在边界条件 (4) 下的特征值问题。但考虑到这样求解的繁琐且解析解也并不直观, 此外这种方法也只能解决  $N^2$  为  $z$  的线性函数的情况而不具一般性, 故以下采用数值方法来求解该特征值问题。

### 3 $N^2$ 变化时对称不稳定的判据

在用数值方法求解该问题之前, 先导出  $N^2$  不为常数时对称不稳定的判据。

用  $\Phi$  的共轭复数  $\Phi^*$  乘 (3) 式, 并在  $[0, H]$  上积分, 考虑到边条件 (4) 后有

$$\int_0^H \left[ \left| \frac{d\Phi}{dz} \right|^2 - \left( \frac{m^2 S^4}{\lambda^2} - \frac{m^2 \tilde{N}^2}{\lambda} - m^2 \right) |\Phi|^2 \right] dz = 0, \quad (5)$$

由 (5) 式知要有  $\Phi$  的非零解则在  $(0, H)$  区间内必须至少有一点  $z = z_c$ , 使

$$\frac{S^4}{\lambda^2} - \frac{\tilde{N}_c^2}{\lambda} - 1 > 0, \quad (6)$$

这里  $\tilde{N}_c^2$  为  $\tilde{N}^2$  在  $z = z_c$  点的值, 而  $N^2$  在该点的值则记为  $N_c^2$ , 由于判别式  $\tilde{N}_c^4 + 4S^4 > 0$ , 故解不等式 (6) 并注意到  $\sigma^2 = \lambda - F^2$  后有

$$-\frac{\tilde{N}_c^2 + \sqrt{\tilde{N}_c^4 + 4S^4}}{2} - F^2 < \sigma^2 < \frac{-\tilde{N}_c^2 + \sqrt{\tilde{N}_c^4 + 4S^4}}{2} - F^2. \quad (7)$$

当发生不稳定时,  $\sigma^2 > 0$ , 这样由上式可得

$$-\tilde{N}_c^2 + \sqrt{\tilde{N}_c^4 + 4S^4} > 2F^2. \quad (8)$$

当  $F^2 < 0$  时, 该不等式自然满足, 但此时为惯性不稳定。对于对称不稳定则须  $F^2 > 0$ , 将  $\tilde{N}_c^2 = N_c^2 - F^2$  代入 (8) 式后可求得

$$Ri_c = (N_c^2 F^2) / S^4 < 1, \quad (9)$$

(9) 式即为对称不稳定的判据, 也即对称不稳定发生的必要条件, 这里  $Ri_c$  为大气层中  $z = z_c$  处的 Richardson 数, 若  $N^2$  为常数则有  $N^2 = N_c^2$ , (9) 式退化为对称不稳定判

据。若设  $N_c^2$  为  $N^2$  在  $[0, H]$  上的最小值, 则必有  $N_c^2 \geq N_*^2$ , 这时由 (9) 式可知

$$Ri_* \equiv \frac{N_*^2 F^2}{S^4} < \frac{N_c^2 F^2}{S^4} \equiv Ri_c < 1, \quad (10)$$

这里  $Ri_*$  为  $[0, H]$  上  $Ri$  的最小值。(10) 式表明, 在  $N^2$  不为常数且有不稳定扰动发生时,  $Ri$  的最小值必小于 1; 换句话说, 若  $[0, H]$  上  $Ri$  处处大于 1, 扰动必然是对称稳定的, 而  $N_c^2$  越小越易满足对称不稳定的判据。

#### 4 数值计算方案及结果讨论

由于  $N^2$  不是常数, (3) 式为变系数方程, 解析求解较困难甚至不可能, 故本文采用数值计算, 将该微分方程的特征值问题, 通过垂直方向的离散化, 转化为一个矩阵的特征值问题, 并以此求得该问题的近似解。微分方程 (3) 和边界条件 (4) 构成的特征值问题关于特征值  $\lambda$  是非线性的, 故而要将其离散化为一个矩阵的特征值问题有一定难度, 为此将方程 (3) 作如下变换: 令  $\mu = 1/\lambda$ , (3) 式变为

$$(d^2 \Phi / dz^2) + \mu^2 m^2 S^4 \Phi - m^2 \Phi - \mu m^2 \tilde{N}^2 \Phi = 0, \quad (11)$$

再令  $\tilde{\Phi} = \mu m S^2 \Phi$ , 则有

$$\begin{cases} (d^2 \tilde{\Phi} / dz^2) + \mu m S^2 \tilde{\Phi} - m^2 \Phi - \mu m^2 \tilde{N}^2 \Phi = 0, \\ \tilde{\Phi} = \mu m S^2 \Phi, \end{cases} \quad (12)$$

将垂直区间  $[0, H]$  等距分为  $n$  层, 格距为  $\Delta z = H/n$ , 再将方程 (12) 分别写在每一层上可得矩阵形式为

$$\mu A X = B X, \quad (13)$$

这里  $X = (\Phi_1, \tilde{\Phi}_1, \Phi_2, \tilde{\Phi}_2, \dots, \Phi_n, \tilde{\Phi}_n)^T$ ,  $A$ 、 $B$  为由  $m$ 、 $\Delta z^2$ 、 $\tilde{N}^2$  和  $S^2$  构成的实对称  $2(n-1) \times 2(n-1)$  阶矩阵。这样就把上述微分方程的特征值问题化为一个求实对称矩阵的特征值问题了。通过对不同  $n$  的数值计算结果对比后发现, 采用  $n=20$  时计算的精度已能满足要求, 故以下计算结果中均取

$n=20$ , 其他的外参数取为:  $L=100$  km,  $H=10$  km,  $f=0.8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $\bar{u}_y=0$ ,  $\bar{u}_z=4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , 而  $m=2\pi/L$ 。

本文对  $N^2$  为  $z$  的线性函数和二次函数这两种情况作了计算。当  $N^2$  为  $z$  的线性函数时, 设  $N^2 = N_0^2 + N_1^2 z$ , 计算中取以下三种不同的  $N^2$  廓线: 廓线 I:  $N_0^2 = 5 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ ,  $N_1^2 = 0.5 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} \text{ km}^{-1}$ ; 廓线 II:  $N_0^2 = 10 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ ,  $N_1^2 = -0.5 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} \text{ km}^{-1}$ ; 廓线 III:  $N_0^2 = 5 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ ,  $N_1^2 = 0.25 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} \text{ km}^{-1}$ 。这三种廓线的分布见图 1。

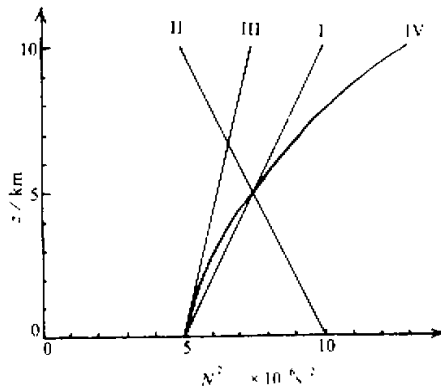


图 1  $N^2$  的廓线

计算结果表明, 对于廓线 I 和 II, 算出的不稳定增长率及不稳定扰动的个数完全相同, 而廓线 III 对应的不稳定增长率却比前两者大, 且不稳定的个数也多。表 1 给出了在不同的  $N^2$  廓线下算得的增长率  $\sigma$ 。

表 1 不同  $N^2$  廓线算得的各不稳定模态的增长率

| 不稳定增长率 / $10^{-4} \text{ s}^{-1}$<br>廓线 | 序号     |        |        |        |        |        |        |        | 不稳定个数 |
|-----------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
|                                         | I      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |       |
| 廓线 I                                    | 0.8784 | 0.7318 | 0.6259 | 0.5362 | 0.4263 | 0.3218 | 0.1952 |        | 7     |
| 廓线 II                                   | 0.8784 | 0.7318 | 0.6259 | 0.5362 | 0.4263 | 0.3218 | 0.1952 |        | 7     |
| 廓线 III                                  | 0.9682 | 0.8380 | 0.7191 | 0.6093 | 0.4974 | 0.3924 | 0.2826 | 0.1430 | 8     |

图 2 给出了  $N^2$  取廓线 I 时计算得到的前四个不同垂直模态  $\Phi$  的廓线, 曲线 a 的增长率最大, 曲线 b、c、d 依次减小。由图可见, 随着增长率的减小,  $\Phi$  的垂直结构变得复杂, 而增长率最大的不稳定扰动其垂直结构最简单。

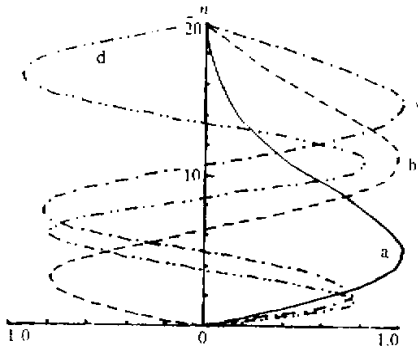


图 2 当  $N^2$  取廓线 I 时, 对应不同垂直模态的  $\Phi$  廓线  
曲线 a、b、c、d 相应的  $\sigma$  是表 1 廓线 I 的前四列

$N_2^2 = 0.06 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} \text{ km}^{-2}$  时 (见图 1 廓线 IV), 最大增长率  $\sigma$  为  $0.9055 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , 不稳定模态的个数则有 7 个, 此时  $N^2$  的极小值位于模式底面上, 不稳定扰动的环流中心出现在低层, 流函数的环流也集中在低层, 这与图 3 的情形相近 (图略)。

下面对以上的计算结果作一些解释和讨论, 首先比较图 3 和图 4 可发现, 若将图 3 中的上下边界对调, 则扰动结构就与图 4 相同。通过作变换  $Z = H - z$ , 可证明廓线 I 对应的特征值问题就与廓线 II 的完全相同, 这从理论上可对以上结果作出解释, 同时也反映了本文数值计算的可靠性。

其次讨论增长率  $\sigma$  与  $N^2$  的关系, 将 (5) 式除以  $m^2 \int_0^H |\Phi|^2 dz$ , 则可得

$$\chi - \frac{s^4}{\lambda^2} + \frac{\bar{N}^2}{\lambda} = 0, \tag{14}$$

对于廓线 I、II, 虽然不稳定的增长率相同, 但其不稳定扰动的结构不同, 图 3、图 4 分别给出了  $N^2$  取廓线 I、II 时最不稳定扰动的流函数分布, 由图可见, 虽然不稳定扰动都是向冷区倾斜的环流圈, 但流函数的极值中心即倾斜环流圈的中心却不在模式范围的中部, 这与  $N^2$  取常数时的情况不同。  $N^2$  取廓线 I 时,  $N^2$  的极小值在模式范围的底部, 流函数的极值中心在低层, 环流也集中在低层, 而  $N^2$  取廓线 II 时, 则反之。

若考虑  $N^2$  为  $z$  的二次函数, 这时  $N^2 = N_0^2 + N_1^2 z + N_2^2 z^2$ , 当取  $N_0^2 = 5 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ ,  $N_1^2 = 0.2 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} \text{ km}^{-1}$ ,

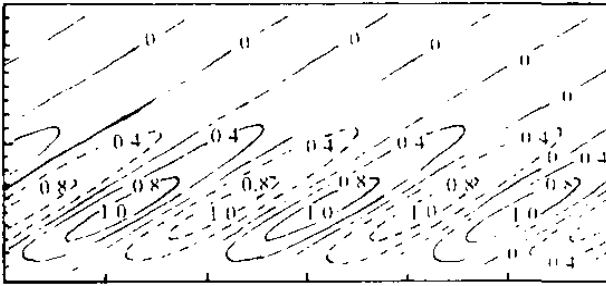


图3  $N^2$ 取廓线 I 时，对应最大增长率  
扰动流函数结构

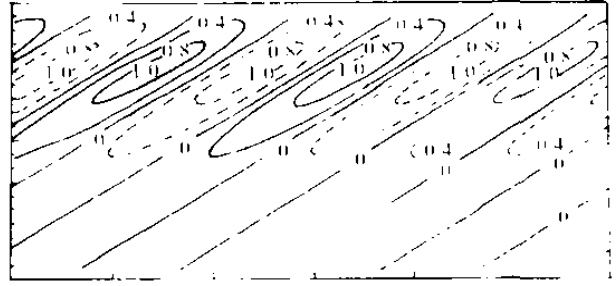


图4  $N^2$ 取廓线 II 时，对应最大增长率  
扰动流函数结构

这里  $\chi = (1 + \int_0^H |d\Phi / dz|^2 dz) / m^2 \int_0^H |\Phi|^2 dz > 0$ ,  $\bar{N}^2 = \int_0^H \tilde{N}^2 |\Phi|^2 dz / \int_0^H |\Phi|^2 dz$ , 为  $\tilde{N}^2$  在  $[0, H]$  上以函数  $|\Phi|^2$  为权的平均值。显然  $\bar{N}^2 = \bar{N}^2 - F^2$ , 这里  $\bar{N}^2 = \int_0^H N^2 |\Phi|^2 dz / \int_0^H |\Phi|^2 dz$  为  $N^2$  的相应平均值。作变换  $\mu = 1 / \lambda$ 。则 (14) 式化为

$$S^4 \mu^2 - \bar{N}^2 \mu - \chi = 0, \tag{15}$$

这是一个关于  $\mu$  的二次方程，其解为

$$\mu = (\bar{N}^2 \pm \sqrt{(\bar{N}^2)^2 + 4S^4 \chi}) / 2S^4. \tag{16}$$

因  $\chi > 0$ , 故  $(\bar{N}^2)^2 + 4S^4 \chi > 0$ , 由此可知 (16) 式的解  $\mu$  为实数, 故  $\lambda$ 、 $\sigma^2$  亦为实数。这表明在对称不稳定的模式中, 增长或衰减的扰动对应  $\sigma^2 > 0$  是不传播的, 且成对出现, 只有中性的模态  $\sigma^2 < 0$  才是传播的。该结论与  $N^2$  为常数时相同。当 (16) 式根号前取正号时有

$$\frac{1}{\sigma^2 + F^2} = \frac{\bar{N}^2 + \sqrt{(\bar{N}^2)^2 + 4S^4 \chi}}{2S^4}, \tag{17}$$

(17) 式是不稳定扰动的增长率与外参数及特征波结构之间的诊断关系。

特征波结构对增长率  $\sigma$  的影响体现在  $\chi = (1 + \int_0^H |d\Phi / dz|^2 dz) / m^2 \int_0^H |\Phi|^2 dz$  中。从图 3 可见, 当固定外参数后, 对应于不同垂直模态的特征函数, 模态越高的在垂直方向上节点越多。曲线振荡越剧烈, 这意味着比值  $\int_0^H |d\Phi / dz|^2 dz / \int_0^H |\Phi|^2 dz$  越大,  $\chi$  也越大, 从而  $\sigma^2$  越小。垂直模态最低的扰动除边界外其在模式范围内部无节点, 故在垂直方向只有一个环流圈, 且增长率最大, 以上的数值计算结果正是如此。

仔细分析 (17) 式还可发现, 不稳定增长率的大小与在  $[0, H]$  上  $N^2$  的加权平均值、扰动的波长、垂直风切变 ( $S^2$ ) 有关,  $\bar{N}^2$  越小, 波长越短, 垂直风切变越大, 不稳定增长率越大。这一结果与  $N^2$  为常数时的相同。

### 5 结语

本文给出了在层结参数  $N^2$  不为常数时的对称不稳定判据及求解该问题的数值方

法, 并取  $N^2$  的几种不同廓线作了数值计算。结果表明,  $N^2$  的最小值  $N^2_{\min}$  越小越易发生不稳定,  $N^2$  随高度分布不同, 对称不稳定的环流结构不同。在实际大气中稳定层结的稳定度随高度增高而增大,  $N^2$  随高度的分布类似于文中的廓线 1, 此时对称不稳定的环流中心出现在低层, 环流也集中在低层。天气分析表明, 一些中尺度系统往往也在低层表现明显。如飑线的垂直尺度只有 3 km 左右。这类带状系统的触发机制可用对称不稳定来解释, 其结构也与以上  $N^2$  取廓线 1 时的不稳定环流相一致。当  $N^2$  取常数时, 其不稳定扰动的环流中心出现在大气中层, 这就与以上系统的结构相差较大。故而我们必须重视层结参数的变化在中尺度动力学中的作用。

### 参 考 文 献

- 1 Stone, P. M., 1966, On non-geostrophic baroclinic stability, *J. Atmos. Sci.*, **23**, 390~400.
- 2 Hoskins, B. J., 1974, The role of potential vorticity in symmetric stability and instability, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **100**, 480~482.
- 3 Zhang Kesu, 1988, Mesoscale instability of a baroclinic basic flow, Part I: Symmetric Instability, *Acta Meteor. Sinica*, **2**, 135~145.
- 4 张立凤、张铭, 1992, Wave-CISK 与对称不稳定, *大气科学*, **16**, 669~676.

## Symmetric Instability in Nonhomogeneous Stratification

Zhang Lifeng and Zhang Ming

(LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** The symmetric instability in nonhomogeneous stratification is studied. The instable criterion is given. The eigenvalue problem of ordinary differential equations is changed to the eigenvalue problem of a real symmetric matrix and the numerical solutions with various stratification curves are calculated.

**Key words** symmetric instability nonhomogeneous stratification eigenvalue problem