

热源强迫对非线性重力内波影响的初步分析

李国平

(成都气象学院, 成都 610041)

杨小怡

(贵阳市气象局, 贵阳 550002)

摘 要 利用相平面分析法, 由 Boussinesq 方程组导出了与非线性重力内波有关的 KdV 方程, 然后用直接积分法得到两类孤立波解, 并且讨论了 3 种不同型式的热源强迫对孤立波解的影响。

关键词 重力内波 KdV 方程 孤立波 热源强迫

1 引言

对于大气非线性重力波, 特别是重力内孤立波的研究以及在天气实践中的应用, 自 80 年代以来已有了很大进展。刘式达、刘式适^[1]利用非线性常微分方程中关于平衡点和相图分析的方法, 求得了大气非线性重力内波的显式周期解——椭圆余弦波及孤立波。许秦研究了层结大气中重力惯性波与飚线形成的非线性过程^[2]。赵瑞星讨论了层结大气中重力惯性波的非线性周期解^[3]。周江兴、丁一汇等研究了中性和不稳定层结大气中类似于飚线结构的孤立波^[4]。而关于热源强迫下的大气线性和非线性特征, 近年来也有较多研究。Lin 和 Goff^[5]研究了由对流系统激发的中尺度重力孤立波。Nicholls^[6]等讨论了热源强迫的重力波的线性和非线性特征。卢敬华、雷小途^[7]研究了非绝热加热对大气中某类孤立波型低涡(如西南涡)的生成和移动的影响。

本文通过求解非线性重力内波方程组, 分别考虑了不同型式的热源强迫对大气非线性重力内波的影响, 分析了波解存在的条件、结构特征及其与天气事实的联系。这对于深入了解大气非线性重力波的产生及其与热源强迫的关系, 更好地监测和预报中小尺度天气, 特别是灾害性天气(如低涡、切变线暴雨、飚线沙尘暴等)具有重要的理论意义和一定的应用价值。

2 热源强迫作用下的非线性重力内波

2.1 常定热源强迫的情形

假定热源强迫作用是常定的, 并且对热源的性质不加区分, 即设 $Q = \text{常数}$ 。考虑到中小尺度天气系统的强对流特征, 采用非静力平衡下的二维 Boussinesq 方程组:

1996-07-23 收到, 1997-10-31 收到再改稿

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{N^2}{g} \rho w = -Q, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

式中 $Q = (\rho / c_p T) Q^*$, Q^* 是外源对单位质量空气的加热率。令

$$u = U(\theta), \quad w = W(\theta), \quad p' = P(\theta), \quad \rho' / \rho = \pi(\theta), \quad \theta = kx + nz - vt, \quad (5)$$

将 (5) 式代入上述方程组得

$$(-v + kU + nW)U' = -\frac{k}{\rho} P', \quad (6)$$

$$(-v + kU + nW)W' = -\frac{n}{\rho} P' - g\pi, \quad (7)$$

$$(-v + kU)\pi' - \frac{N^2}{g} W = -\frac{Q}{\rho}, \quad (8)$$

$$kU' + nW' = 0. \quad (9)$$

由 (9) 式积分得 (取积分常数为零)

$$W = -kU / n. \quad (10)$$

由 (6) ~ (10) 式消元可得关于 U' 的单变量方程:

$$\rho v(k^2 + n^2)U'' - \frac{k(\rho k N^2 U + n g Q)}{-v + kU} = 0. \quad (11)$$

考虑到重力内波的快波特性, 将 $1/(-v + kU)$ 作 Taylor 展开并略去二次以上项得

$$U'' + \frac{k^2}{(k^2 + n^2)v^2} \left(N^2 + \frac{n g Q}{\rho v} \right) U + \frac{k^3 n g}{(k^2 + n^2)v^3} \left(\frac{N^2}{n g} + \frac{Q}{\rho v} \right) U^2 + \frac{k n g Q}{(k^2 + n^2)\rho v^2} = 0, \quad (12)$$

上式对 θ 微分得

$$U''' + \frac{k^2}{(k^2 + n^2)v^2} \left(N^2 + \frac{n g Q}{\rho v} \right) U' + \frac{2k^3 n g}{(k^2 + n^2)v^3} \left(\frac{N^2}{n g} + \frac{Q}{\rho v} \right) U U' = 0. \quad (13)$$

(13) 式即为 KdV 方程所对应的常微分方程。令

$$a = \frac{k^2}{(k^2 + n^2)v^2} \left(N^2 + \frac{n g Q}{\rho v} \right), \quad b = \frac{k^3 n g}{(k^2 + n^2)v^3} \left(\frac{N^2}{n g} + \frac{Q}{\rho v} \right), \\ c = \frac{k n g Q}{(k^2 + n^2)\rho v^2},$$

则 (12) 式可简写为

$$U'' + aU + bU^2 + c = 0, \quad (14)$$

以 U' 乘 (14) 式并积分得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} aU^2 + \frac{1}{3} bU^3 + cU = C_1, \quad (15)$$

其中 C_1 为积分常数。此问题的定解条件可设为

$$\theta \rightarrow \infty \text{ 时}, \quad U \rightarrow U_0, \quad U' \rightarrow 0, \quad U'' \rightarrow 0,$$

由此可确定出积分常数

$$C_1 = \frac{1}{2} aU_0^2 + \frac{1}{3} bU_0^3 + cU_0, \quad (16)$$

则 (15) 式变为

$$\left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 = a(U_0^2 - U^2) - \frac{2}{3} b(U_0^3 - U^3) + 2c(U_0 - U), \quad (17)$$

上式右端变形后为

$$(U_0 - U) \left[-\frac{2b}{3} (U_0 - U)U - \left(a + \frac{4b}{3} U_0 \right) (U_0 - U) + (2bU_0^2 + 2aU_0 + 2c) \right],$$

当 $2bU_0^2 + 2aU_0 + 2c = 0$, 即 $U_0 = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}) / 2b$ 时, (17) 式变为

$$\left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 = (U - U_0)^2 \left(\frac{-2bU}{3} - a - \frac{4bU_0}{3} \right). \quad (18)$$

令

$$A = -U_0, \quad B = \frac{-2b}{3}, \quad E = -a - \frac{4bU_0}{3}. \quad (19)$$

(18) 式可化为

$$\frac{dU}{d\theta} = \pm (U + A) \sqrt{BU + E}. \quad (20)$$

可以证明正负号并不影响积分的结果, 故对于 (20) 式下面只讨论取正号的情形。

令 $F = U + A$, 对 (20) 式积分得

$$\int \frac{dF}{F \sqrt{BF + (E - AB)}} = C_2 \pm \theta, \quad (21)$$

其中 C_2 也是积分常数。

当 $E - AB < 0$, 即取 $U_0 = (-a + \sqrt{a^2 - 4bc}) / 2b$ 时, 积分上式并整理后得

$$U = -\frac{E}{B} + \frac{(AB - E)}{B} \tan^2 \left[\frac{\sqrt{AB - E}}{2} (C_2 \pm \theta) \right]. \quad (22)$$

这里 C_2 作为波形的初位相角, 在不改变波形的前提下, 适当平移 θ 坐标轴, 总可使得 $C_2 = 0$, 即使得波动的初位相角为零。然后将(19)式代入上式, 并考虑到 $\tan^2 \theta$ 的偶函数特性, 有

$$U = -\frac{3a}{2b} - 2U_0 - \left(\frac{3a}{2b} + 3U_0\right) \tan^2 \left(\frac{\sqrt{a+2bU_0}}{2} \theta \right). \quad (23)$$

(23) 式描写的是 KdV 方程在特定条件 $[U_0 = (-a + \sqrt{a^2 - 4bc})/2b]$ 下的一类波解, 此解的波形与椭圆余弦波非常相似, 但波峰处存在周期性间断点。该解与本文所给的定解条件不符, 属于无意义解, 故以下将不予讨论。

当 $E - AB > 0$, 且 $\sqrt{BF + (E - AB)} - \sqrt{E - AB} > 0$, 积分 (21) 式可得

$$U = -A + \frac{E - AB}{B} \operatorname{csch}^2 \frac{\sqrt{E - AB}}{2} (C_3 + \theta). \quad (24)$$

同样先平移 θ 轴使 $C_3 = 0$, 再将(19)式代入并考虑到 $\operatorname{csch}^2 \theta$ 的偶函数特性, 则有

$$U = U_0 + \left(3U_0 + \frac{3a}{2b}\right) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\sqrt{-a - 2bU_0}}{2} \theta \right). \quad (25)$$

当 $E - AB > 0$, 且 $\sqrt{BF + (E - AB)} - \sqrt{E - AB} < 0$, 类似于上述数学处理过程, 可得

$$U = -A - \frac{E - AB}{B} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{E - AB}}{2} (C_4 + \theta), \quad (26)$$

或

$$U = U_0 - \left(3U_0 + \frac{3a}{2b}\right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{-a - 2bU_0}}{2} \theta \right). \quad (27)$$

(25) 式所表示的解为 KdV 方程的奇异孤立波解^[8] (不同于 (27) 式描述的经典孤立波解), 其波形如图 1 所示, 在 $\theta = 0$ 处, 该类奇异孤立解存在间断点, 下面我们重点讨论此波解。由前可知, 此波解存在的条件为 $E - AB = -a - 2bU_0 > 0$, 这要求取 $U_0 = (-a - \sqrt{a^2 - 4bc})/2b$ 。因此若 U_0 是实数, 必有 $a^2 - 4bc > 0$, 即

$$\rho^2 v^2 N^4 - 2\rho v n g N^2 Q - 3n^2 g^2 Q^2 > 0. \quad (28)$$

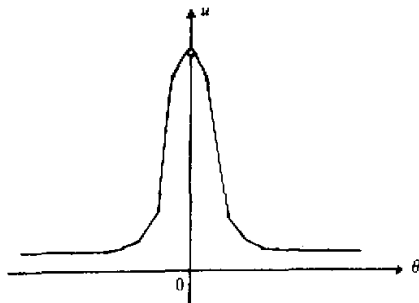


图 1 恒定热源强迫下的奇异孤立波

分析上述条件可知, 在稳定层结中 ($N^2 > 0$), 加热 ($Q > 0$) 有利于向西移动的孤立波的产生; 而不稳定层结中 ($N^2 < 0$), 加热 ($Q > 0$) 有利于向东移动的孤立波的产生。

长期以来, 人们对热带低压 (如台风) 中的涡眼结构已有较深入的认识和研究, 从飞机和卫星的观测上得到证实, 并用天气学和动力学的理论进行了解释。但对中高纬度的低压, 是否存在类似于台风的涡眼结构尚不清楚。近年来, 美国气象学家在模拟中纬度气旋的发

生、发展过程中, 观察到类似台风涡眼的结构。我国气象工作者对青藏高原 500 hPa 低涡的研究也表明: 由于青藏高原下垫面的热力性质与热带海洋有相似之处, 所以其结构与海洋上的热带低压十分相似, 在云形上主要表现为在气旋式旋转的螺旋云带中, 低涡中心为无云区(空心)。只是由于不像海洋上有充分的水汽供应, 因而高原低涡不像台风那样可以强烈发展, 生命史也较短。

在固定时刻和固定高度的情况下, 由(25)和(10)式可知: 此时水平风场和垂直风场的分布皆为双曲余割型函数。根据风场及相关位势高度场的这种特点, 在一定程度上可将青藏高原 500 hPa 一类常见“空心”低涡(卫星云图上低涡中心多为无云区)视为本文讨论的奇异孤立波, 则以上分析的层结稳定度与孤立波移动方向的关系符合高原这类低涡的天气事实^[9]。因此本文得到的一类有间断点的奇异孤立波解在一定程度上可以从理论上解释上述涡眼现象。进一步推断, 在中纬度反气旋中也可能存在类似的涡眼(空心)结构, 只不过要用观测事实(如卫星云图)加以验证会更加困难。

2.2 仅有对流凝结潜热时的情形

假定只考虑对流凝结潜热的作用, 并且将其用垂直速度参数化, 即设 $Q = \eta w$ (η 为大于零的加热系数, 本文设为常数), 则热源强迫非线性重力内波的热力学方程变为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \left(\frac{N^2}{g} \rho - \eta \right) w = 0, \quad (29)$$

运动方程和连续方程同前。类似于 2.1 节的处理过程, 可得

$$U'' + aU + bU^2 = 0, \quad (30)$$

其中

$$a = \frac{k^2(\rho N^2 - g\eta)}{(k^2 + n^2)\rho v^2}, \quad b = \frac{k^3(\rho N^2 - g\eta)}{(k^2 + n^2)\rho v^3}.$$

对(30)式求导得

$$U''' + aU' + 2bUU' = 0, \quad (31)$$

此式即为 KdV 方程对应的常微分方程。

当 $2bU_0^2 + 2aU_0 = 0$, 即 $U_0 = -a/b$ 时, 类似于 2.1 节的数学处理, 可得 KdV 方程在特定条件下两类有意义的孤波解, 它们分别为

$$U = -\frac{a}{b} - \frac{3a}{2b} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\theta\right), \quad (32)$$

$$U = -\frac{a}{b} + \frac{3a}{2b} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\theta\right), \quad (33)$$

类似于 2.1 节, 可得出孤立波解存在的条件为

$$N^2 > g\eta/\rho, \quad (34)$$

这说明在层结稳定度较强的大气中, 有利于孤立波的形成。而波动形成后加强了大气的垂直运动, 从而有利于潜热释放, 使层结趋于不稳定, 这又不利于孤立波的形成或抑制其发展。另外, 波动的振幅与热源强迫作用无关, 只与波数有关; 而波宽则与包括热源

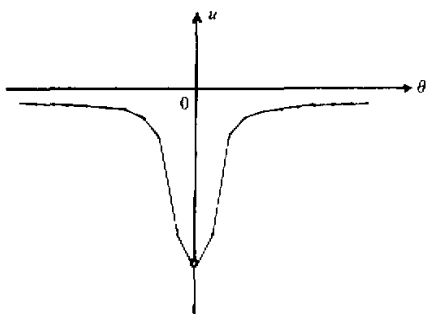


图 2 对流凝结潜热强迫下的奇异孤立波

气重力内波所满足的热力学方程为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \left(\frac{N^2}{g} \rho - \eta \right) w + Q_0 = 0, \quad (35)$$

其他方程同前。采用与 2.1 节相同的作法, 可得

$$U'' + aU + bU^2 + c = 0, \quad (36)$$

其中

$$a = \frac{k^2(\rho v N^2 - g v \eta + n g Q_0)}{(k^2 + n^2)\rho v^3}, \quad b = \frac{k^3(\rho v N^2 - g v \eta + n g Q_0)}{(k^2 + n^2)\rho v^4},$$

$$c = \frac{k n g Q_0}{(k^2 + n^2)\rho v^2}.$$

经过同样的数学处理, 得到此加热条件下两类有意义的孤立波解分别为

$$U = U_0 + \left(3U_0 + \frac{3a}{2b} \right) \text{csch}^2 \left(\frac{\sqrt{-a - 2bU_0}}{2} \theta \right), \quad (37)$$

$$U = U_0 - \left(3U_0 + \frac{3a}{2b} \right) \text{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{-a - 2bU_0}}{2} \theta \right), \quad (38)$$

其中 $U_0 = (-a - \sqrt{a^2 - 4bc})/2b$ 。此时孤立波解存在的条件为

$$\rho^2 v^2 N^2 + g^2 v^2 \eta^2 - 2\rho g v^2 N^2 \eta + 2n g^2 v \eta Q_0 - 3n^2 g^2 Q_0^2 - 2\rho v n g N^2 Q_0 > 0. \quad (39)$$

从中可以发现感热和对流凝结潜热对孤立波形成的作用是不一样的。潜热有利于孤立波的产生, 而感热不利于孤立波的产生。同样若将低涡视为孤立波, 则潜热对低涡形成的促进作用已被人们公认, 而感热的作用过去一般认为与潜热相同, 即有利于低涡形成。但有研究者在数值试验中发现感热对低涡的生成和发展有抑制作用, 这与本文的分析结果是一致的。波的振幅和波宽也与热源强迫的性质有关, 凝结潜热使振幅增大, 波宽减小, 波形变陡; 而感热在使振幅增大的同时, 也使波宽增大。

强迫等多个因子有关。当对流凝结加热增大时, 波宽也增大。当振幅为正时, 波动自西向东传播, 此时风场对应峰式孤立波, 由(10)式可知垂直运动场对应下沉运动; 振幅为负时, 波动自东向西传播, 此时风场对应谷式孤立波(图 2), 垂直运动场对应上升运动。并且振幅越大, 波传播得越快, 这符合中小尺度强对流天气系统的移动特征。

2.3 区别考虑感热和对流凝结加热的情形

根据感热和对流凝结加热的特点, 设热源强迫 $Q = Q_s + Q_L$, 其中感热 $Q_s = Q_0 = \text{常数}$, 凝结加热 $Q_L = \eta w$, 则非线性大

3 结束语

通过以上的分析和讨论, 得到以下几点结论:

(1) 热源强迫对重力内孤立波有重要的影响。主要表现在改变了孤立波的形成条件和波形(即波的振幅和宽度)。

(2) 感热和对流凝结潜热对孤立波的作用相反, 潜热有利于孤立波的形成, 感热不利于孤立波的形成, 并且两者对波宽的影响也有所不同。

(3) 波形和垂直运动的综合分析表明: 上升运动与谷式孤立波相联系, 下沉运动与峰式孤立波相联系。

最后应指出的是, 本文考虑的加热型式较为简单, 对热源作用的讨论缺乏定量的比较, 定性讨论也不够深入; 对孤立波在物理空间移动的图像以及在高度场上的表现形式还研究得不够, 这些都有待于作进一步的研究。

致谢: 审稿人对本文提了许多好的意见, 作者对此深表感谢!

参 考 文 献

- 1 刘式达, 刘式适, 1982, 大气中的非线性椭圆余弦波和孤立波, 中国科学(B辑), 12(4), 372~384.
- 2 许肇, 1983, 层结大气中重力惯性波与地线形成的非线性过程, 中国科学(B辑), 13(3), 87~97.
- 3 赵瑞星, 1990, 层结大气中重力惯性波的非线性周期解, 气象学报, 43(3), 275~283.
- 4 周江兴, 丁一汇, 刘益民, 1996, 中性和不稳定层结大气的孤立波行波精确解, 气象学报, 54(2), 193~206.
- 5 Lin, Y. L. and R. C. Goff, 1988, A study of a mesoscale solitary wave in the atmosphere originating near a region of deep convection, *J. Atmos. Sci.*, 45(2), 194~205.
- 6 Nicholls, M. E., R. A. Pielke and W. R. Cotton, 1991, Thermally forced gravity waves in an atmosphere at rest, *J. Atmos. Sci.*, 48(16), 1869~1884.
- 7 卢敬华, 雷小途, 1995, 非绝热加热对孤立波的影响及其在大气中的应用, 气象学报, 53(增刊), 539~549.
- 8 Drazin, P. G. and R. S. Johnson, 1989, *Solitons: An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 36~37.
- 9 乔全明, 张雅高, 1994, 青藏高原天气学, 北京: 气象出版社, 154~155.

Effects of the Thermal Forcing on Nonlinear Internal Inertia Gravitational Waves in the Atmosphere

Li Guoping

Yang Xiaoyi

(Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu 610041) (Meteorological Bureau of Guiyang City, Guiyang 550002)

Abstract In this paper, the KdV equation is derived from nonlinear internal inertia gravitational wave equation by using phase plane analysis method and its solitary wave solutions are obtained with an direct integration method. Furthermore, effects of three types of the thermal forcing on solitary waves are studied in detail.

Key words internal inertia gravitational wave KdV equation solitary wave thermal forcing