提为反问题的数值预报方法与试验*

I. 三类反问题及数值解法

范新岗**　丑纪范

(兰州大学大气科学系，兰州 730000)

摘　要　提为初值问题的数值预报在通过改进数值模式、观测手段及分析方法而改进预报的同时，仍然面临着两大困难，即模式误差和初值不完整。然而我们有大量的气候演变的历史观测资料，其中蕴含着关于气候系统的信息。本文针对这两个困难，系统地提出充分利用历史资料反演订正模式和初值进而改进数值预报的三类反问题，并给出数值解法。最后将三类反问题应用于一个简单模式进行反演预报的数值试验，其数值试验结果将在本文的第二部分给出。

关键词　数值预报　三类反问题　反演方法

1　引言

数值预报在获得空前发展的今天，仍然面临着两大困难：(1) 模式误差：气候系统是一个极其复杂的系统，相比之下，现有的数值模式则是极其简化的，它存在着误差，误差主要来自有些过程没有考虑及一些参数不准确；(2) 初值不完整：由于观测手段和观测精度的限制，需要用的初始场存在缺测和观测误差。对此，有两种途径改进数值预报。一是沿着正问题的思路（在一定的初边值条件下求解非线性偏微分方程组），沿此方向改进预报的途径则是改进数值模式及观测分析手段力求克服上述两个困难。短、中期数值预报已取得的成功证明沿正问题的方向改进数值预报有显著成效。然而，动力学预报方法也有其局限性[1]，它把预报问题提为一个瞬时初值问题，只使用一个时刻不完整的系统状态作为预报的依据，却未能充分利用已掌握的大量的大气环流信息。况且任何时候模式都不可能精确到实际气候系统，观测也不可能非常完整精确，这就导致了第二种途径的出现，即沿反问题的方向改进数值预报。我国学者三十多年来持续不断地在这个方向上进行探索[2~13]。虽然模式中包含未知参数以及缺测的初值，但是微分方程中原来是未知的函数却因为有实况资料而知道了它的某些信息。反问题就是用微分方程、已知的函数定解条件和附加的某些条件来确定模式参数等未知量。把预报问题提成微分方程的反问题，就可以充分利用已有实况资料，而且在这个意义下，也将动力方法和统计方法有机地结合起来了[14]。需要指出，这样的反问题是对沿正问题方向改进了的数值模式和初值进行的再改进，从而可以永远跟随正问题的发展改进数值预报。

1997-07-30 收到，1998-07-10 收再改稿
* 本文得到国家重大关键项目“气候动力学及其预测理论的研究”的资助
** 现在工作单位：中国气象科学研究院，北京，100081

本文包含两部分内容，第一部分针对数值预报面临的两大困难，系统地提出数值预报中的三类反问题，并给出数值解法，将动力模式和不同时次的观测资料作为一个整体同时加以考虑，充分利用两方面的信息以确定未知的东西；第二部分将三类反问题应用于一个简单模式进行反演预报的数值试验，并给出试验结果。

2 三类反问题

为了叙述方便，设数值模式为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_K; p_1, p_2, \cdots, p_L) = 0, \tag{1}$$

其中$x_i (i = 1, 2, \cdots, K)$为模式变量，$p_j (j = 1, 2, \cdots, L)$为模式参数。在任一时刻$t = t_n$的观测值记为

$$X_{(n)} = (x_{1(n)}, x_{2(n)}, \cdots, x_{K(n)}). \tag{2}$$

2.1 第一类反问题

第一类反问题只针对第二个困难提出，假定模式方程是已知精确的，即知道F的准确形式及所有参数；其中初值不完整，设K个变量中前k个有观测，在$t = t_N$时刻的初值为$X_{(N)} = (x_{1(N)}, x_{2(N)}, \cdots, x_{k(N)})$，而$x_{k+1}$，$x_{k+2}$，$\cdots$，$x_K$没观测。这就无法直接用模式做预报，必须先找到足够精确的t_N时刻的$x_{k+1,(N)}$，$x_{k+2,(N)}$，$\cdots$，$x_{K,(N)}$。

沿反问题方向求解该问题的思路是，虽然不知道t_N时刻的$x_{k+1,(N)}$，$x_{k+2,(N)}$，$\cdots$，$x_{K,(N)}$，但却知道$t_n < t_N (n=0,1,2,\cdots,N-1)$ 时刻的x_1，x_2，$\cdots$，x_k的观测值是$X_{(n)} = (x_{1(n)}, x_{2(n)}, \cdots, x_{k(n)})$，它们都是模式系统演变的结果，其中蕴含着关于模式演变的信息，因此可以从中提炼出模式变量x_{k+1}，x_{k+2}，$\cdots$，x_K的信息，这就是解决问题的突破口。

显然，在这一类反问题中要解决的首要问题就是寻找最佳的x_{k+1}，x_{k+2}，$\cdots$，x_K的初值$x_{k+1,(0)}$，$x_{k+2,(0)}, \cdots, x_{K,(0)}$，使得利用模式(1)和已知资料所做的$t_n \leqslant t_N$时刻的预报值$\hat{X}_{(n)} = (\hat{x}_{1(n)}, \hat{x}_{2(n)}, \cdots, \hat{x}_{k(n)})$与观测值最接近。用数学的语言表达，即是求目标泛函

$$J(x_{k+1,(0)}, x_{k+2,(0)}, \cdots, x_{K,(0)}) = \sum_{n=1}^{N} [(X_{(n)} - \hat{X}_{(n)})^T w_n (X_{(n)} - \hat{X}_{(n)})], \tag{3}$$

在模式（1）约束下的最小值，其中w_n是经验权重系数矩阵。该问题属于最优控制问题，其中初值$x_{k+1,(0)}$，$x_{k+2,(0)}$，$\cdots$，$x_{K,(0)}$是最优控制问题的控制变量。

2.2 第二类反问题

第二类反问题只针对第一个困难提出。现有的数值模式与实际气候系统相比，必然有误差，假设已知原精确模式（实际气候系统）一套完整的观测资料，它们都是气候系统演变的结果。也就是说，除了有完整、精确的初值，还有一组多时次的观测资料。现在的任务就是从气候系统演变的结果中提取关于气候系统准确模式（假设存在）的信息，来订正现有数值模式，补偿误差，使订正后的数值模式在已知初值条件下，其预报量最接近实况值。

模式订正可分两种情况，一种是知道了所建模式中欠缺某种物理过程，而且可以表达为某种数学形式加入模式中，如参数化过程；另一种是还不清楚现有模式到底欠缺哪些因素，或是知道却无法写出数学表达式，一般只能以某种订正因子或误差项给出。这两种情况下，都存在待定系数或未知参数，通常都是人为给定的。因此，对模式的修正，尤其是第二种情况，可以用多时次的观测资料反演确定模式中的物理参数，也就是要找出一组最优的物理参数值，使预报效果达到最优。这组物理参数就是第二类反问题所要求的解。

上述订正方法的实质就是将模式误差通过对物理参数的订正予以补偿。显然，补偿的效果与被订正模式的好坏有关。如果被订正模式更接近实际气候系统，订正效果也会随之更好。正如引言中提到的，反问题永远跟随正问题的发展而改进预报。

现在已知$t=t_N$时刻的观测资料为

$$X_{(N)}=(x_{1(N)},x_{2(N)},\cdots,x_{K(N)}),\tag{4}$$

还知道$t_n<t_N\ (n=0,1,2,\cdots,N-1)$ 时刻的历史资料

$$X_{(n)}=(x_{1(n)},x_{2(n)},\cdots,x_{K(N)}).\qquad (n=0,1,2,\cdots,N-1)\tag{5}$$

设有误差的数值模式为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_K;p'_1,p'_2,\cdots,p'_L)=0.\tag{6}$$

为了使改进后的模式的解

$$\hat{X}_{(n)}=(\hat{x}_{1(n)},\hat{x}_{2(n)},\cdots,\hat{x}_{K(n)})\tag{7}$$

逼近观测资料（5），可以写出如下目标函数：

$$J(p'_1,p'_2,\cdots,p'_L)=\sum_{n=1}^{N}[(X_{(n)}-\hat{X}_{(n)})^T w_n(X_{(n)}-\hat{X}_{(n)})],\tag{8}$$

其中w_n是经验权重系数矩阵，模式参数p'_1，p'_2，$\cdots$，p'_L是该最优控制问题的控制变量。现在的任务是求一组合适的（最优的）参数在（6）约束下最小化目标函数J，即求p_1^*，p_2^*，$\cdots$，p_L^*使

$$J(p_1^*,p_2^*,\cdots,p_L^*)=\min J(p'_1,p'_2,\cdots,p'_L),\tag{9}$$

这里的p_1^*，p_2^*，$\cdots$，p_L^*就是第二类反问题所要求的解。

2.3　第三类反问题

前两种反问题对反演初值和改进模式分别进行了讨论，第三类反问题则是同时针对两种困难提出，综合上述两种情况同时加以解决。反演问题的条件没有改变，即在模式有误差且初值不完整的条件下，仍依靠有误差的动力模式和一组已知的观测资料，通过一次反演求解，同时改进模式及其初值条件。

参照前两类反问题，根据误差模式（6）和已知的$t_n\ (n=0,1,2,\cdots,N)$ 时刻x_1，x_2，$\cdots$，x_k的观测资料$X_{(n)}=(x_{1(n)},x_{2(n)},\cdots,x_{k(n)})$，为使模式解$\hat{X}_{(n)}=(\hat{x}_{1(n)},\hat{x}_{2(n)},\cdots,\hat{x}_{k(n)})(n=1,2,\cdots,N)$ 与观测值逼近，写出如下目标函数：

$$J(x_{k+1,(0)}, x_{k+2,(0)}, \cdots, x_{K,(0)}; p'_1, p'_2, \cdots, p'_L)$$
$$= \sum_{n=1}^{N}[(X_{(n)} - \hat{X}_{(n)})^T w_n (X_{(n)} - \hat{X}_{(n)})], \tag{10}$$

其中w_n是经验权重系数矩阵，初值$x_{k+1,(0)}, x_{k+2,(0)}, \cdots, x_{K,(0)}$和模式参数$p'_1, p'_2, \cdots, p'_L$是该控制问题的控制变量。现在的任务是求取最优初值$x_{k+1,(0)}, x_{k+2,(0)}, \cdots, x_{K,(0)}$和最优参数$p_1^*, p_2^*, \cdots, p_L^*$，在(6)的约束下最小化目标函数(10)。

3 三种数值解法

上一节提出了数值预报中三类反问题的一般形式，它们都被提成有约束条件的泛函极值问题，当然也可化为无约束条件的极值问题。求解泛函极值问题，可以用各种不同的方法。本节将讨论三种方法，并分别以三类反问题为例给出具体解法。

3.1 基于方程组最小二乘解的迭代法

以第一类反问题为例，现在要反演求解的是x_{k+1}、x_{k+2}、$\cdots$、x_K在t_0时刻的初值$x_{k+1,(0)}$，$x_{k+2,(0)}$，$\cdots$，$x_{K,(0)}$，可以采取以下做法。

先给定一组t_0时刻x_{k+1}、x_{k+2}、$\cdots$、x_K的估计值$\hat{x}_{k+1,(0)}$、$\hat{x}_{k+2,(0)}$、$\cdots$、$\hat{x}_{K,(0)}$，由模式（1）即可求得以后各时刻的变量$\hat{X}_{(n)} = (\hat{x}_{1(n)}, \hat{x}_{2(n)}, \cdots, \hat{x}_{k(n)})$为

$$\hat{X}_{(n)} = F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)}, \hat{x}_{k+2,(0)}, \cdots, \hat{x}_{K,(0)}), \qquad (n = 1, 2, \cdots, N-1), \tag{11}$$

其中$F_{(n)}$是由模式（1）解得的函数，表示由初值决定的时刻n的解。这里为简便起见，省写了其余已有观测的变量。

显然，由于初始估计值$\hat{x}_{k+1,(0)}$，$\hat{x}_{k+2,(0)}$，$\cdots$，$\hat{x}_{k,(0)}$存在误差$\delta x_{k+1,(0)} = x_{k+1,(0)} - \hat{x}_{k+1,(0)}$，$\delta x_{k+2,(0)} = x_{k+2,(0)} - \hat{x}_{k+2,(0)}$，$\cdots$，$\delta x_{K,(0)} = x_{K,(0)} - \hat{x}_{K,(0)}$，导致$X_{(n)}$与$\hat{X}_{(n)}$之间产生偏差

$$\delta X_{(n)} = X_{(n)} - \hat{X}_{(n)}. \tag{12}$$

我们的目的是要最小化目标泛函（3），就是要找合适的$\delta x_{k+1,(0)}$，$\delta x_{k+2,(0)}$，$\cdots$，$\delta x_{K,(0)}$，使得由模式计算的$\hat{X}_{(n)}$逼近观测值$X_{(n)}$，即要求下式成立

$$F_{(n)} = (\hat{X}_{k+1,(0)} + \delta x_{k+1,(0)}, \hat{x}_{k+2,(0)} + \delta x_{k+2,(0)}, \cdots, \hat{x}_{K,(0)} + \delta x_{K,(0)}) = X_{(n)}. \tag{13}$$

将上式左端在$(\hat{x}_{k+1,(0)}, \hat{x}_{k+2,(0)}, \cdots, \hat{x}_{K,(0)})$的邻域内展开，并略去高阶小量，于是有

$$F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)}, \hat{x}_{k+2,(0)}, \cdots, \hat{x}_{K,(0)}) + \left.\frac{\partial F_{(n)}}{\partial \delta x_{k+1,(0)}}\right|_{(\hat{x}_{k+1,(0)}, \hat{x}_{k+2,(0)}, \cdots, \hat{x}_{K,(0)})} \delta x_{k+1,(0)}$$
$$+ \left.\frac{\partial F_{(n)}}{\partial \delta x_{k+2,(0)}}\right|_{(\hat{x}_{k+1,(0)}, \hat{x}_{k+2,(0)}, \cdots, \hat{x}_{K,(0)})} \delta x_{k+2,(0)} + \cdots$$
$$+ \left.\frac{\partial F_{(n)}}{\partial \delta x_{K,(0)}}\right|_{(\hat{x}_{k+1,(0)}, \hat{x}_{k+2,(0)}, \cdots, \hat{x}_{K,(0)})} \delta x_{K,(0)} = X_{(n)}, \tag{14}$$

式中偏导数根据定义可写成

$$\left.\frac{\partial F_{(n)}}{\partial \delta x_{k+1,(0)}}\right|_{(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)})}$$
$$=\frac{F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)}+\Delta x_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)})-F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)})}{\Delta x_{k+1,(0)}}$$
$$=a_{k+1,(n)}, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial F_{(n)}}{\partial \delta x_{k+2,(0)}}\right|_{(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)})}$$
$$=\frac{F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)}+\Delta_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)})-F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)})}{\Delta x_{k+2,(0)}}$$
$$=a_{k+2,(n)}, \tag{16}$$

…　…　…　…　…

$$\left.\frac{\partial F_{(n)}}{\partial \delta x_{K,(0)}}\right|_{(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)})}$$
$$=\frac{F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)}+\Delta x_{K,(0)})-F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)}}{\Delta x_{K,(0)}}$$
$$=a_{K,(n)}, \tag{17}$$

因此（14）式可写为

$$a_{k+1,(n)}\delta x_{k+1,(0)}+a_{k+2,(n)}\delta x_{k+2,(0)}+\cdots+a_{K,(n)}\delta x_{K,(0)}=b_{(n)},\quad (n=1,2,\cdots,N), \tag{18}$$

式中

$$b_{(n)}=X_{(n)}-F_{(n)}(\hat{x}_{k+1,(0)},\hat{x}_{k+2,(0)},\cdots,\hat{x}_{K,(0)}). \tag{19}$$

因为第一类反问题的X_n中包含 k 个变量，且共有 N 个时刻，故（18）表示了kN个方程。一般情况下，方程的个数多于未知量的个数，属超定问题，只能求$\delta x_{k+1,(0)}$、$\delta x_{k+2,(0)}$，…，$\delta x_{K,(0)}$的最小二乘解。这样得到的$x_{k+1,(0)}=\hat{x}_{k+1,(0)}+\delta x_{k+1,(0)}$，$x_{k+2,(0)}=\hat{x}_{k+2,(0)}+\delta x_{k+2,(0)}$，…，$x_{K,(0)}=\hat{x}_{K,(0)}+\delta x_{K,(0)}$并不一定是准确解，可能不满足要求，需要进一步迭代，直到所求的$\delta x_{k+1,(0)}$、$\delta x_{k+2,(0)}$，…，$\delta x_{K,(0)}$小于所要的精度即可。这样利用最后所得的t_0时刻的$x_{k+1,(0)}$，$x_{k+2,(0)}$，…，$x_{K,(0)}$代入模式，就可得到t_N时刻的$x_{k+1,(N)}$，$x_{k+2,(N)}$，…，$x_{K,(N)}$，这就是此类反问题所要求的解，现在以此和已知的$X_{(N)}=(x_{1(N)},x_{2(N)},\cdots,x_{k(N)})$共同作为$t_N$时刻的初值，即可根据模式（1）进行预报。

3.2　基于梯度定义的共轭梯度法

上节提出的三类反问题都属于最优控制问题，目前已有许多最优化方法可供采用[15]。如最速下降法、共轭梯度法、变尺度法等。其中最速下降法收敛速度慢、变尺度法需$n\times n$的大存贮量（n是离散化数值模式变量总数），而共轭梯度法存贮量相对较小、收敛速度也好，最适用于解维数比较高的气象或海洋问题。

在应用共轭梯度算法时[16]，其中一个关键环节是计算目标函数 J 在控制变量初始估计值处的梯度。以第二类反问题为例，就是计算 J 在模式参数的初始估计值$(p'_1, p'_2$、

$\cdots, p'_L$)处的梯度 $\nabla J(p'_1, p'_2, \cdots, p'_L)$,

$$\nabla J(p'_1, p'_2, \cdots, p'_L) = \left(\frac{\partial J}{\partial p'_1}, \frac{\partial J}{\partial p'_2}, \cdots, \frac{\partial J}{\partial p'_L}\right), \tag{20}$$

按定义，求 J 关于 p'_1，p'_2，$\cdots$，p'_L 的梯度有如下近似公式:

$$\frac{\partial J}{\partial p'_1} = \frac{J(p'_1 + \Delta p'_1, p'_2, \cdots, p'_L) - J(p'_1, p'_2, \cdots, p'_L)}{\Delta p'_1}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial J}{\partial p'_2} = \frac{J(p'_1, p'_2 + \Delta p'_2, \cdots, p'_L) - J(p'_1, p'_2, \cdots, p'_L)}{\Delta p'_2}, \tag{22}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{\partial J}{\partial p'_L} = \frac{J(p'_1, p'_2, \cdots, p'_L + \Delta p'_L) - J(p'_1, p'_2, \cdots, p'_L)}{\Delta p'_L}. \tag{23}$$

现在可以应用以上目标函数 J 关于控制变量的梯度，通过共轭梯度法最小化目标函数 J，来求解这一类反问题了。将求得的最优参数 p_1^*，p_2^*，$\cdots$，p_L^* 代入 (6)、以 (4) 为初值做预报，即可得到最接近实况的预报。

3.3 基于共轭方程理论的共轭梯度法

上述根据梯度定义求取目标函数 J 关于控制变量梯度的方法虽然比较简便，但每计算一个梯度分量都要对模式积分一次，当控制变量很多时，计算量很大，因而需要做一些改进以便提高反演过程的效率。另外，由 (21)~(23) 知，按照定义求取梯度的算法中，梯度的计算依赖于 $\Delta p'_j$ ($j=1, 2, \cdots, L$) 的给定，在反演的变量个数较多时，不易找到最佳步长 $\Delta p'_j$，难以保证梯度的计算精度，影响反演效果，还可能使反演过程的计算量加大。本节采用共轭方程理论加以解决。现以第三类反问题为例来说明具体方法。

若已知问题的原方程组，根据共轭方程理论的有关法则，容易写出相应的共轭方程组。对已经写成差分形式的数值模式，为了研究方便，这里直接从差分形式的数值模式推导其共轭模式。对初值不完整的假设与第一类反问题相同。有误差的模式，设其显式迭代格式为

$$x_{i(n)} = F_{i(n)}(x_{1(n-1)}, x_{2(n-1)}, \cdots, x_{K(n-1)}; p'_1, p'_2, \cdots, p'_L) \quad (i = 1, 2, \cdots, K). \tag{24}$$

对于第三类反问题，根据已知观测资料 $X_n = (x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{kn})$，($n=1, 2, \cdots, N$)，其中 N 为已知资料的长度，目标函数可再写为

$$J = (x_{k+1,(0)}, x_{k+2(0)}, \cdots, x_{K,(0)}; p'_1, p'_2, \cdots, p'_L) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}[(x_{i(n)} - \hat{x}_{i(n)})^2]. \tag{25}$$

设有拉格朗日乘子 $X^*_{i(n)}$，($i=1, 2, \cdots, K$)，($n=1, 2, \cdots, N$)，构造拉格朗日函数

$$L = J + \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{K}[x^*_{i(n)}(x_{i(n)} - F_{i(n)})], \tag{26}$$

求解 L 的不动点问题，有

$$\frac{\partial L}{\partial x^*_{i(n)}} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, K) \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{i(n)}} = 0. \quad (i = 1, 2, \cdots, K) \tag{28}$$

由(27)得到原方程的差分格式(24)，它是时间上向前积分的预报模式。由(28)得到

$$
\begin{cases}
x^*_{i(n)} = \sum_{j=1}^{K}\left(\dfrac{\partial F_{j(n+1)}}{\partial x_{i(n)}} x^*_{j(n+1)}\right) - 2(x_{i(n)} - \hat{x}_{i(n)}), & \text{当} 1 \leqslant i \leqslant k \text{时}, \\
x^*_{i(n)} = \sum_{j=1}^{K}\left(\dfrac{\partial F_{j(n+1)}}{\partial x_{i(n)}} x^*_{j(n+1)}\right) & \text{当} k+1 \leqslant i \leqslant K \text{时}.
\end{cases}
\tag{29}
$$

此即为模式（24）的差分形式共轭模式，亦叫伴随模式，它是时间上逆向积分的模式。为使方程组闭合，假定$x^*_{i(N+1)}=0$，（$i=1,2,\cdots,K$）。由（26）知，在 $n=0$ 时，有

$$\frac{\partial J}{\partial x_{i(0)}} = x^*_{i(0)}. \qquad (i=1,2,\cdots,K) \tag{30}$$

这表明，由共轭模式（29）反向积分得到的 $n=0$ 时刻的共轭函数$x^*_{i(0)}$就是目标函数 J 关于初值的梯度。这样，先给一组初值的初始估计值，正向积分模式（24），再反向积分共轭模式（29），就求得了 J 关于初值的初始估计值的梯度。

在第三类反问题中，还要同时反演订正模式参数，这时要求

$$\frac{\partial L}{\partial p'_j} = 0. \qquad (j=1,2,\cdots,L) \tag{31}$$

根据（26），容易得到目标函数 J 关于模式参数的梯度为

$$\frac{\partial J}{\partial p'_j} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial F_{i(n)}}{\partial p'_j} x^*_{i(n)}\right). \qquad (j=1,2,\cdots,L). \tag{32}$$

至此，已求得了目标函数 J 关于初值和模式参数的初始估计值的梯度，利用上节的共轭梯度法优化，直至找到 J 的极小点，也就得到了最优的初值$x_{k+1,(0)}$，$x_{k+2,(0)}$，$\cdots$，$x_{K,(0)}$和模式参数p^*_1，p^*_2，$\cdots$，p^*_L，这就是第三类反问题的解。

4　小结

本文针对数值预报中的两大障碍，即初值不完整和模式有误差，系统地提出了充分利用历史资料反演改进数值预报的三类反问题，并研究了三种数值解法，这三种方法在三类反问题中是可以通用的。第一种是用求方程最小二乘解确定反演量初估值的误差并逐步修正的方法，该方法简便易行。第二种是根据梯度定义求取梯度再用共轭梯度法优化目标函数的方法，该方法收敛速度较快，但梯度的求取不够精确，会影响收敛速度和反演精度。第三种是利用共轭方程理论求取梯度再用共轭梯度法优化目标函数的方法，该方法收敛速度和反演精度都比较好，然而它只有在建立共轭模式比较容易的情况下才易于应用。因此，三种方法各有所长，实际中可根据不同情况选择使用。

本文提出的三类反问题对数值预报的改进作用已在一个最大简化的非线性模式[17]中得到验证，数值试验结果将在本文的第二部分中讨论。

致谢：本文完成过程中，得到武汉大学数学系郭秉荣教授和兰州大学大气科学系邱崇践教授的悉心帮助，特此致谢。

参 考 文 献

1 丑纪范，1986，为什么要动力—统计相结合？——兼论如何结合，高原气象，5(4)，367～273.
2 顾震潮，1958，作为初值问题的天气形势预报与由地面天气历史演变作预报的等值性，气象学报，29(2)，93～98.
3 郑庆林，杜行远，1973，使用多时刻观测资料的数值天气预报新模式，中国科学，No. 2, 289～297.
4 丑纪范，1974，天气数值预报中使用过去资料的问题，中国科学，No. 6, 635～644.
5 郭秉荣、史久恩，丑纪范，1977，以大气温压场连续演变表征下垫面热状况的长期天气数值预报方法，兰州大学学报（自然科学版），4, 1～18.
6 曾庆存，1979，我国大气动力学和数值天气预报研究的进展，大气科学，3(3), 256～269.
7 丑纪范，1984，寒潮中期数值预报的多时刻模式，全国寒潮中期预报文集，北京：北京大学出版社，142～151.
8 邱崇践，丑纪范，1987，改进数值天气预报的一个新途径，中国科学（B辑），No. 8, 903～910.
9 邱崇践，丑纪范，1988，预报模式识别的扰动方法，大气科学，12(3), 225～232.
10 邱崇践，丑纪范，1990，预报模式的参数优化方法，中国科学（B辑），No. 2, 218～224.
11 曹鸿兴，1993，大气运动的自忆性方程，中国科学（B辑），No. 1, 104～112.
12 郜吉东、丑纪范，1994，数值天气预报中的两类反问题及一种数值解法——理想试验，气象学报，52(2), 129～137.
13 丑纪范，1995，四维同化的理论和新方法，廖洞贤，柳崇健主编，数值天气预报中的若干新技术，北京：气象出版社，262～294.
14 丑纪范、郜吉东，1995，长期数值天气预报（修订本），北京：气象出版社.
15 南京大学数学系计算数学专业编，1978，最优化方法，北京：科学出版社.
16 席少霖、赵凤治，1983，最优化计算方法，上海：上海科学技术出版社.
17 郭秉荣、江剑民、范新岗、张红亮、丑纪范，1996，气候系统的非线性特征及其预测理论，北京：气象出版社，254pp.

Methods and Experiments of Numerical Prediction Raised as Inverse Problem Part I: Three Kinds of Inverse Problems and Numerical Solutions

Fan Xingang and Chou Jifan

(*Department of Atmospheric Science, Lanzhou University, Lanzhou* 730000)

Abstract Although numerical prediction can be improved through improving numerical model, observation method and analysis method, etc., the numerical prediction which is raised as an initial value problem still faces two difficulties of model error and incomplete initials. Nevertheless, there is a quantity of historical observed data of climate evolution in which the information of climate system is contained. In view of the two difficulties, three kinds of inverse problems of numerical prediction are put forward in this paper to improve prediction through retrieving initial value and model parameters to emend numerical model by using the historical data. To solve the three inverse problems, three kinds of numerical solutions are put forward simultaneously. Finally, through using the three kinds of inverse problems in a simple model, some numerical experiments of retrieval prediction are carried out and their results are to be given in the second part of this paper.

Key words numerical prediction three kinds of inverse problems retrieval method