热带大气半地转适应理论的尺度分析和物理机制*

刘式适　　孙　峰

(北京大学地球物理系，北京　100871)

摘　要　对热带大气行星尺度运动所做的尺度分析和物理分析表明：热带大气的行星尺度运动在 y 方向容易实现气压梯度力与 Coriolis 力的平衡，它称为纬圈的半地转运动。半地转平衡的建立过程，也就是半地转适应过程相对是很短暂的，它不需要考虑 $f=\beta_0 y$ 随 y 的变化，因而主要依靠惯性重力波为频散；而半地转平衡建立后的演变过程相对是很缓慢的，它主要受 Kelvin 波和 Rossby 波控制。

关键词：半地转适应；尺度分析；物理机制

1　引言

在中高纬度的大气大尺度运动中经常存在地转适应过程和准地转的演变过程。地转适应的概念，最早是由 Rossby[1]提出的，经过几十年的研究[2~6]，地转适应理论已趋于成熟。

在热带地区，大气大尺度运动通常不存在中高纬度的地转平衡关系，但在 y 方向的加速度较小，容易实现该方向的气压梯度力和 Coriolis 力的平衡，即纬圈的半地转平衡。巢纪平和林永辉[7,8]对半地转适应过程的实现作了理论研究，本文着重从尺度分析和物理分析的角度去研究热带大气的纬圈半地转适应过程。

2　尺度分析

在无摩擦的条件下，应用赤道 β 平面近似

$$f=\beta_0 y,\quad (\beta_0=\text{常数}) \tag{1}$$

在热带地区 x 和 y 方向的运动方程可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\beta_0 yv=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\beta_0 yu=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y}.\end{cases} \tag{2}$$

我们考虑热带地区常见的 x 方向的行星尺度运动，其 x 和 y 方向距离的特征值分别为

1998-06-01 收到，1998-09-14 收到修改稿

* 国家自然科学基金资助项目 49775260

$$L_x = 10^7 \text{ m}, \qquad L_y = 10^6 \text{ m}. \tag{3}$$

相应，x 和 y 方向速度 u 和 v 的特征值分别为

$$U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \qquad V = 10^0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \tag{4}$$

这样，上述运动演变的时间尺度为

$$\tau = \frac{L_x}{U} = \frac{L_y}{V} = 10^6 \text{ s}, \tag{5}$$

这是热带地区最小的低频运动的时间尺度。

热带地区重力位势偏差 φ' 的特征尺度为

$$\Phi' = U^2 = 10^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, \tag{6}$$

它比中高纬度 φ' 的尺度小一个量级，因此，在天气图中，低纬度的等重力位势线相对于中高纬度而言是比较稀疏的。

Rossby 参数 β 的特征值通常为

$$\beta_0 = 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \tag{7}$$

则由（1）式和（3）式，热带地区 Coriolis 参数 f 的特征值取为

$$f_0 = \beta_0 L_y = 10^{-5} \text{ s}^{-1}. \tag{8}$$

这样，根据（3）～（8）式，在运动方程（2）中，$O(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t) = O(-\beta_0 yv) = O(-\partial\varphi'/\partial x) = 10^{-5}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$；而 $O(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t) = 10^{-6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$，$O(\beta_0 yu) = O(-\partial\varphi'/\partial y) = 10^{-4}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$。由此可见，对于热带地区的大气行星尺度运动，$x$ 方向上的气压梯度力与 Coriolis 力很难实现平衡，而容易实现的是 y 方向上的气压梯度力与 Coriolis 力的平衡，即

$$\beta_0 y u_s = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y}, \tag{9}$$

它称为热带大气的纬圈半地转运动。

下面用尺度分析的方法，研究上述半地转运动的建立过程（即适应过程）和半地转运动建立后的演变过程在时间尺度上的差别。

应用（9）式，方程组（2）中的 y 方向运动方程可以写为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\beta_0 y u', \tag{10}$$

其中

$$u' = u - u_s \tag{11}$$

称为半地转偏差。设

$$\begin{cases} t = \tau t_1, & x = L_x x_1, & y = L_y y_1, \\ u = U u_1, & v = V v_1, & u' = U' u_1', \end{cases} \tag{12}$$

其中 U'表示半地转偏差的尺度，时间尺度 τ 随适应过程和演变过程而异。在（12）式中下标为“1”的量是量级为 1 的无量纲量。

（12）式代入方程（10），则得到

$$\varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial t_1}+Ro\left(u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)=\frac{U}{V}\cdot\frac{U'}{U}(-y_1u_1'),\tag{13}$$

其中

$$\varepsilon\equiv\frac{1}{\beta_0L_y\tau},\qquad Ro\equiv\frac{U}{\beta_0L_yL_x}=\frac{V}{\beta_0L_y^2}.\tag{14}$$

ε 和Ro分别为低纬 Kibil 数和 Rossby 数。显然，对由（3）式所表征的大气行星尺度运动，

$$Ro=10^{-1},\tag{15}$$

因为$U/V=10$，则对于演变过程($u\approx u_s$，可设$U'/U\lesssim10^{-1}$)，由（13）式有

$$\varepsilon\lesssim10^0.\tag{16}$$

因而，$\tau\gtrsim10^5$ s，它表示演变过程的时间尺度至少应为 10^5 s。对于适应过程（初始有较大的 u'，可设$U'/U=10^0$），由（13）式有

$$\varepsilon=10.\tag{17}$$

因而，$\tau=10^4$ s，它表示适应过程的时间尺度为 10^4 s。所以，热带地区大气的半地转适应过程相对是短暂的，而演变过程相对是缓慢的。而且，从分析看到，无论是半地转的适应过程和演变过程都可以不考虑由Ro表征的非线性项。但适应过程必须要考虑$\partial v/\partial t$，而演变过程可不考虑$\partial v/\partial t$。

3 低纬大气波动

分正压和斜压两种情况来说明。

3.1 正压模式

在正压模式中描写低纬大气波动的线性方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0yv=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x},\\[2mm]\delta\dfrac{\partial v}{\partial t}+\beta_0yu=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y},\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi'}{\partial t}+c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0.\end{cases}\tag{18}$$

其中 $\delta=1$ 表示 y 方向的运动方程不简化，$\delta=0$ 表示 y 方向采用半地转近似。显然，半地转适应过程只能取 $\delta=1$，而演变过程可考虑取 $\delta=0$，在方程（18）中

$$c_0=\sqrt{gH},\tag{19}$$

g 为重力加速度，H 为静止时的自由面的高度，$\varphi'=gh'$，这里的 h'为自由面的高度偏

差。

方程组（18）的第一个方程和第二个方程消去 φ'，第一个方程和第三个方程消去 φ'，分别有

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}-\beta_0 y\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\left(\delta\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+\beta_0 y\frac{\partial}{\partial y}+\beta_0\right)v,\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=\left(\beta_0 y\frac{\partial}{\partial t}+c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)v.\end{cases}\tag{20}$$

方程组（20）的两个方程消去 u 最后得

$$L_1 v=0,\tag{21}$$

其中

$$L_1\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left\{\delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\left(\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\beta_0^2 y^2\right\}-\beta_0 c_0^2\frac{\partial}{\partial x}.\tag{22}$$

在方程（21）中，若令

$$v=V(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{23}$$

其中 k 为 x 方向上的波数，ω 为圆频率。这样，方程（21）化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}y^2}+\left[-\frac{\beta_0 k}{\omega}+\delta\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2\right)-\frac{\beta_0^2}{c_0^2}y^2\right]V=0.\tag{24}$$

这是 Weber 型的方程，它满足

$$V|_{y\to\pm\infty}=0\tag{25}$$

的本征值为

$$-\frac{\beta_0 k}{\omega}+\delta\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2\right)=\frac{\beta_0}{c_0}(2m+1),\quad (m=0,1,2,\cdots).\tag{26}$$

相应的本征函数为下列 Weber 函数

$$V(y)=D_m\left(\frac{y}{L_0}\right),\tag{27}$$

其中

$$L_0\equiv\sqrt{\frac{c_0}{2\beta_0}}\tag{28}$$

为低纬正压 Rossby 变形半径。

从（26）式看到，δ 与 ω^2 和 k^2 项联系在一起，因此 $\delta=0$ 又称为低频近似或长波近似。事实上，在（26）式中去掉含 ω^2 的高频项，求得

$$\omega=-\frac{\beta_0 k}{\delta k^2+(2m+1)\frac{\beta_0}{c_0}},\qquad (m=0,1,2,\cdots)\tag{29}$$

这是低纬正压 Rossby 波的圆频率[9]，它紧密地与（22）式右端最后一项有关，也就是它与$f=\beta_0 y$对 y 的微商有关。在 $\delta=0$ 时，(29) 式化为

$$\omega=-\frac{kc_0}{2m+1},\quad (m=0,1,2,\cdots) \tag{30}$$

这是低纬正压 Rossby 长波的圆频率。而且，若取 $m=-1$，(30) 式化为

$$\omega=kc_0, \tag{31}$$

这是低纬正压 Kelvin 波（它要求 $v=0$）的圆频率。

由以上分析可知，热带大气的纬向半地转适应过程主要受高频惯性重力波控制，初始的半地转偏差激发的惯性重力波的频散导致纬向半地转平衡的建立，以后的演变过程主要受 Kelvin 波和 Rossby 长波制约。正由于此，我们在研究低纬纬向半地转适应过程时，不需要考虑$f=\beta_0 y$随 y 的微商；而在研究演变过程时，经常应用 $\delta=0$ 的长波近似。

3.2 斜压模式

应用静力近似，描写低纬大气波动的斜压模式的方程组可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 y v=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x},\\ \delta\dfrac{\partial u}{\partial t}+\beta_0 y u=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)+N^2 w=0,\end{cases} \tag{32}$$

其中 z 为垂直方向，w 为垂直速度，N 为 Brunt−Vaisala 频率，而

$$\varphi'\equiv\frac{p'}{\rho_0}, \tag{33}$$

p'为相对于静态的气压偏差，ρ_0 为静态的空气密度。

类似于方程组（18）的消元，方程（32）可以化为

$$L_2 v=0, \tag{34}$$

其中

$$L_2\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left\{\delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+N^2\left(\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\beta_0^2 y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}+\beta_0 N^2\frac{\partial}{\partial x}. \tag{35}$$

在方程（34）中，若令

$$v=V(y)e^{i(kx+nz-\omega t)}, \tag{36}$$

其中 n 为 z 方向上的波数。这样，方程（34）化为

$$\frac{d^2V}{dy^2}+\left[-\frac{\beta_0 k}{\omega}+\delta\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2\right)-\frac{\beta_0^2}{c_1^2}y^2\right]V=0, \tag{37}$$

其中

$$c_1 \equiv \frac{N}{n} = \frac{NH}{nH}. \tag{38}$$

方程（37）在形式上与方程（24）完全相同，只是（24）式中的正压模式的特征波速 c_0 被斜压模式的特征波速 c_1 代替了。所以，在斜压纬向半地转适应过程中主要受惯性重力内波的影响，它的频散导致纬向半地转平衡的建立，以后的演变过程被 Kelvin 波和斜压 Rossby 波控制了。类似，在斜压半地转适应过程中不需要考虑 $f=\beta_0 y$ 对 y 的微商，而在演变过程中可以取 $\delta=0$。

4　物理分析

以一维低纬大气纬向半地转适应过程来说明。此时，依（18）式，适应方程可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \beta_0 y v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \beta_0 y u = -\dfrac{\partial \varphi'}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial t} + c_0^2 \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{39}$$

显然，若不考虑 $f=\beta_0 y$ 随 y 的变化，则方程组(39)中只包含高频的惯性重力波。这样，若初始只有西风，而无与其平衡的气压场，即在一定的区域 $|y| < L_y$ 内，有

$$u\big|_{t=0} > 0, \qquad v\big|_{t=0} = 0, \qquad \beta_0 y\, u_s\big|_{t=0} = -\left.\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right|_{t=0} = 0. \tag{40}$$

由于存在西风，则在 Coriolis 力的作用下形成北风（北半球），因而在区域南缘，质量堆积和自由面升高；在区域北缘，质量疏稀和自由面降低，从而形成 φ' 的南北梯度，并在一定时刻与初始的西风场平衡，而且由于惯性重力波的频散，经过一定时间纬圈半地转平衡得以实现。

下面分析在纬圈半地转适应过程中流场的变化 $\partial u/\partial t$ 与气压场的变化 $\partial u_s/\partial t$ 的相对大小。由方程组（39），有

$$\begin{cases} O\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = O(\beta_0 y v) = \beta_0 L_y V, \\ O\left(\dfrac{\partial u_s}{\partial t}\right) = O\left(-\dfrac{1}{\beta_0 y}\dfrac{\partial^2 \varphi'}{\partial t \partial y}\right) = O\left(\dfrac{c_0^2}{\beta_0 y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \dfrac{c_0^2 V}{\beta_0 L_y^3}. \end{cases} \tag{41}$$

因而有

$$\frac{O\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)}{O\left(\dfrac{\partial u_s}{\partial t}\right)} = \left(\frac{L_y}{\sqrt{2}\, L_0}\right)^4. \tag{42}$$

由此可见，当$L_y < \sqrt{2} L_0$时，在适应过程中流场的变化远小于气压场的变化，是气压场适应流场，这是因为在L_y较小时，气压场能较快地建立而流场消弱较小的缘故；相反，当$L_y > \sqrt{2} L_0$时，在适应过程中气压场的变化远小于流场的变化，是流场适应气压场，这是因为在L_y较大时，气压场建立需要很长的时间，相应流场消弱较大的缘故。

在斜压情况，(42) 式中的L_0被L_1替代，

$$L_1 \equiv \sqrt{\frac{c_1}{2\beta_0}} = \sqrt{\frac{N}{2\beta_0 n}}, \tag{43}$$

称为低纬斜压 Rossby 变形半径。

5 正压适应方程

5.1 基本方程

采用$\delta = 1$时的方程组 (18)，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \beta_0 y v = -\dfrac{\partial \varphi'}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \beta_0 y u = -\dfrac{\partial \varphi'}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial t} + c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \end{cases} \tag{44}$$

但其中不考虑$\beta_0 y$随y的微商。

通过消元，不难得到

$$L_1^{(0)} v = 0, \tag{45}$$

其中

$$L_1^{(0)} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla_h^2 + \beta_0^2 y^2\right\}, \tag{46}$$

这里

$$\nabla_h^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{47}$$

为水平 Laplace 算子。

注意 (22) 式右端最后一项舍弃，并令$\delta = 1$，就化为 (46) 式。

方程 (45) 对时间积分一次，得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla_h^2 v + \beta_0^2 y^2 v = F(x, y), \tag{48}$$

其中

$$F(x, y) \equiv \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla_h^2 v + \beta_0^2 y^2 v\right)_{t=0}. \tag{49}$$

5.2 时间不变量

方程组（44）的前两个方程化为涡度方程，并利用其第三个方程，得到

$$\frac{\partial q}{\partial t}=0, \tag{50}$$

其中

$$q(x,y)\equiv\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\beta_0 y}{c_0^2}\varphi' \tag{51}$$

就是低纬正压适应过程中的时间不变量，称为正压位涡度，它完全由初值决定。设初始时刻（$t=0$）u、v和φ'的值分别为u_0、v_0和φ_0'，则

$$q(x,y)=q_0(x,y)\equiv\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}-\frac{\beta_0 y}{c_0^2}\varphi_0'. \tag{52}$$

注意，由方程组（44）的第二个方程和第三个方程消去φ'，并利用第一个方程有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\beta_0 y\frac{\partial u}{\partial t}+c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\beta_0^2 y^2 v+\beta_0 y\frac{\partial \varphi'}{\partial x}+c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}. \tag{53}$$

这样，利用（52）式，（49）式可改写为

$$F(x,y)=-c_0^2\frac{\partial q_0}{\partial x}. \tag{54}$$

5.3 初值问题

设v和$\partial v/\partial t$的初值分别为$\Phi(x,y)$和$\Psi(x,y)$，则正压适应过程化为初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c_0^2\nabla_h^2 v+\beta_0^2 y^2 v=F(x,y),\\ v\big|_{t=0}=\Phi(x,y),\qquad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Psi(x,y).\end{cases} \tag{55}$$

考虑到$F(x,y)=0$时，v的方程的本征函数为$D_m(y/L_0)(m=0,1,2,\cdots)$，则设

$$(v,F,\Phi,\Psi)=\sum_{m=0}^{\infty}[v_m(x,t),F_m(x),\Phi_m(x),\Psi_m(x)]D_m\left(\frac{y}{L_0}\right). \tag{56}$$

（56）式代入（55）式，并注意

$$\frac{\mathrm{d}^2 D_m}{\mathrm{d}y^2}-\frac{\beta_0^2}{c_0^2}y^2 D_m=-\frac{\beta_0}{c_0}(2m+1)D_m, \tag{57}$$

则初值问题（55）化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_m}{\partial t^2}-c_0^2\dfrac{\partial^2 v_m}{\partial x^2}-(2m+1)\beta_0 c_0 v_m=F_m(x),\\ v_m\big|_{t=0}=\Phi_m(x),\qquad \dfrac{\partial v_m}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Psi_m(x).\end{cases} \tag{58}$$

它的解为

$$
\begin{aligned}
v_m(x,t)= & \frac{1}{2}\{\Phi_m(x+c_0t)+\Phi_m(x-c_0t)\} \\
& +\frac{1}{2c_0}\int_{x-c_0t}^{x+c_0t}\Psi_m(\xi)J_0\left[\frac{\sqrt{m+1/2}}{L_0}\sqrt{c_0^2t^2-(\xi-x)^2}\right]\mathrm{d}\xi \\
& -\frac{\sqrt{(2m+1)\beta_0c_0}}{2}t\int_{x-c_0t}^{x+c_0t}\Phi_m(\xi)\frac{1}{\sqrt{c_0^2t^2-(\xi-x)^2}} \\
& \times J_1\left[\frac{\sqrt{m+1/2}}{L_0}\sqrt{c_0^2t^2-(\xi-x)^2}\right]\mathrm{d}\xi \\
& +\frac{1}{2c_0}\int_0^t\int_{x-c_0(t-\tau)}^{x+c_0(t-\tau)}F_m(\xi)J_0\left[\frac{\sqrt{m+1/2}}{L_0}\sqrt{c_0^2\tau^2-(\xi-x)^2}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
\tag{59}
$$

其中J_0和J_1分别为零阶和一阶 Bessel 函数。

显然，只要在$|x|\to\infty$时，$\Phi_m(x)\to 0$和$\Psi_m(x)\to 0$，或者设Φ_m和Ψ_m在有限区域内不为零，则在t充分大时，（59）式化为

$$
v_m(x,t)=\frac{1}{2c_0}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}F_m(\xi)J_0\left[\frac{\sqrt{m+1/2}}{L_0}\sqrt{c_0^2c^2-(\xi-x)^2}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,
\tag{60}
$$

因而

$$
\frac{\partial v_m}{\partial t}=\frac{1}{2c_0}\int_{-\infty}^{\infty}F_m(\xi)J_0\left[\frac{\sqrt{m+1/2}}{L_0}\sqrt{c_0^2t^2-(\xi-x)^2}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.
\tag{61}
$$

在t足够大时，显然有

$$
\frac{\partial v_m}{\partial t}\to 0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}\to 0,
\tag{62}
$$

纬圈半地转平衡得以建立。

5.4 适应终态

适应终态应是纬圈半地转平衡，此时方程组（44）化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0yv=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}, \\
\beta_0yu=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y}, \\
\dfrac{\partial\varphi'}{\partial t}+c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0.
\end{cases}
\tag{63}
$$

这相当于（18）式中$\delta=0$的情况，此时不难证明（48）式和（51）式分别化为

$$
-c_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\beta_0^2y^2v=F(x,y),
\tag{64}
$$

$$
q(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\beta_0y}{c_0^2}\varphi'.
\tag{65}
$$

这样，若设u、v和φ'的终态分别为u_∞、v_∞和φ'_∞，则由方程组(63)的第二式、(64)和(65)式，有

$$\begin{cases} \beta_0 y u_\infty = -\dfrac{\partial \varphi'_\infty}{\partial y}, \\ -\dfrac{\partial u_\infty}{\partial y} - \dfrac{\beta_0 y}{c_0^2}\varphi'_\infty = q_0(x, y), \\ -c_0^2 \dfrac{\partial^2 v_\infty}{\partial y^2} + \beta_0^2 y^2 v_\infty = F(x, y). \end{cases} \tag{66}$$

利用（54）式，方程组（66）的三式很容易化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\infty}{\partial y^2} - \dfrac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2 u_\infty = -\dfrac{\partial q_0}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 v_\infty}{\partial y^2} - \dfrac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2 v_\infty = \dfrac{\partial q_0}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 \varphi'_\infty}{\partial y^2} - \dfrac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2 \varphi'_\infty = \beta_0 y q_0. \end{cases} \tag{67}$$

若设初始的非平衡条件为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x, y), \\ v|_{t=0} = v_0 = 0, \\ \varphi'|_{t=0} = \varphi'_0(x, y), \end{cases} \qquad \left(\beta_0 y u_0 \neq -\frac{\partial \varphi'_0}{\partial y}\right) \tag{68}$$

并令

$$u'_0 = u_0 - u_\infty = u_0 - \left(-\frac{1}{\beta_0 y}\frac{\partial \varphi'_0}{\partial y}\right),$$

$$\Delta u = u_\infty - u_0, \qquad \Delta v = v_\infty - v_0 = v_\infty, \qquad \Delta\varphi' = \varphi'_\infty - \varphi'_0. \tag{69}$$

其中u'_0表示初始时刻的半地转偏差，而Δu、Δv和$\Delta\varphi'$分别表示u、v和φ'的终态与初态之差。这样（67）式化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2} - \dfrac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2 \Delta u = \dfrac{\beta_0^2}{c_0^2} u'_0, \\ \dfrac{\partial^2 \Delta v}{\partial y^2} - \dfrac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2 \Delta v = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\beta_0}{c_0^2} y \varphi'_0\right), \\ \dfrac{\partial^2 \Delta\varphi'}{\partial y^2} - \dfrac{\beta_0^2}{c_0^2} y^2 \Delta\varphi' = -\beta_0 y \dfrac{\partial u'_0}{\partial y}. \end{cases} \tag{70}$$

根据（70）式，可以确定在适应过程中流场与气压场变化的相对大小。为此，把（68）式所列的初条件写为

$$(u_0, v_0, \varphi'_0) = (\hat{u}_0 e^{-x^2/2L_x^2} \cdot e^{-y^2/2L_y^2}, 0, \hat{\varphi}_0 e^{-x^2/2L_x^2} \cdot e^{-y^2/2L_y^2}). \tag{71}$$

$$\left(\beta_0 \hat{u}_0 \neq \frac{1}{L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)$$

这个初条件意味着：在$(x, y) = (0,0)$ 处，u_0和φ'_0分别有极值$\hat{u}_0$和$\hat{\varphi}_0$；在$x = \sqrt{2}L_x$和

$y=\sqrt{2}L_y$ 处，u_0 和 φ_0' 达到该方向极值的 e^{-1}；在 $|x|\to\infty$ 和 $|y|\to\infty$ 时，$u_0\to 0$，$\varphi_0'\to 0$。而且，初始非地转平衡要求 $\beta_0\hat{u}_0\neq 1/L_y^2\hat{\varphi}_0$。

把(71)式代入(70)式，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Delta u}{\partial y^2}-\dfrac{\beta_0^2}{c_0^2}y^2\Delta u=\dfrac{\beta_0^2}{c_0^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)y^2\mathrm{e}^{-x^2/2L_x^2}\ \mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2},\\ \dfrac{\partial^2\Delta v}{\partial y^2}-\dfrac{\beta_0^2}{c_0^2}y^2\Delta v=-\dfrac{1}{L_x^2L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{\beta_0 L_y^2}{c_0^2}\hat{\varphi}_0\right)xy\mathrm{e}^{-x^2/2L_x^2}\ \mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2},\\ \dfrac{\partial^2\Delta\varphi'}{\partial y^2}-\dfrac{\beta_0^2}{c_0^2}y^2\Delta\varphi'=\dfrac{\beta_0}{L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)y^2\mathrm{e}^{-x^2/2L_x^2}\ \mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2}.\end{cases}\tag{72}$$

若令

$$[(\Delta u),(\Delta v),(\Delta\varphi')]=\sum_{m=0}^{\infty}\left[(\Delta u)_m,\frac{x}{L_x}(\Delta v)_m,(\Delta\varphi')_m\right]\mathrm{e}^{-x^2/2L_x^2}D_m\left(\frac{y}{L_0}\right),\tag{73}$$

则利用（57）式后，（72）式化为

$$\begin{cases}-\dfrac{\beta_0}{c_0}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2}=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(\Delta u)_m D_m\left(\frac{y}{L_0}\right),\\ \dfrac{c_0}{\beta_0 L_x^2L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{\beta_0 L_y^2}{c_0^2}\hat{\varphi}_0\right)y\mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2}=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(\Delta v)_m D_m\left(\frac{y}{L_0}\right),\\ -\dfrac{c_0}{L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2}=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(\Delta\varphi')_m D_m\left(\frac{y}{L_0}\right).\end{cases}\tag{74}$$

这是函数按 Weber 函数的展开式，利用 Weber 函数的正交性

$$\int_{-\infty}^{\infty}D_m\left(\frac{y}{L_0}\right)D_m\left(\frac{y}{L_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{L_0}\right)=\begin{cases}0, & m\neq n\\ m!\sqrt{2\pi}, & m=n\end{cases}\tag{75}$$

则(74)式化为

$$\begin{cases}(2m+1)(\Delta u)_m\\ =\dfrac{1}{m!\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}-\dfrac{\beta_0}{c_0}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2}D_m\left(\frac{y}{L_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{L_0}\right),\\ (2m+1)(\Delta v)_m\\ =\dfrac{1}{m!\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{c_0}{\beta_0 L_x L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{\beta_0 L_y^2}{c_0^2}\hat{\varphi}_0\right)y\mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2}D_m\left(\frac{y}{L_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{L_0}\right),\\ (2m+1)(\Delta\varphi')_m\\ =\dfrac{1}{m!\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}-\dfrac{c_0}{L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)y^2\mathrm{e}^{-y^2/2L_y^2}D_m\left(\frac{y}{L_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{L_0}\right).\end{cases}\tag{76}$$

由于 D_m 随 m 的奇偶而奇偶，则由（76）式知

$$(\Delta u)_{2n+1}=0,\quad (\Delta v)_{2n}=0,\quad (\Delta\varphi')_{2n+1}=0,\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{77}$$

再注意$D_0(y/L_0)=\mathrm{e}^{-y^2/4L_0^2}$，$D_1(y/L_0)=(y/L_0)\mathrm{e}^{-y^2/4L_0^2}$，则由（76）式有

$$\begin{cases}(\Delta u)_0=-\dfrac{\beta_0}{\sqrt{2\pi}\,c_0}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-1/2L_y^2(1+L_y^2/2L_0^2)y^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{L_0}\right),\\ (\Delta v)_1=\dfrac{c_0}{3\sqrt{2\pi}\,\beta_0 L_x L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{\beta_0 L_y^2}{c_0^2}\hat{\varphi}_0\right)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{L_0}y^2\mathrm{e}^{-1/2L_y^2(1+L_y^2/2L_0^2)y^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{L_0}\right),\\ (\Delta\varphi')_0=-\dfrac{c_0}{\sqrt{2\pi}\,L_y^2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-1/2L_y^2(1+L_y^2/2L_0^2)y^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{L_0}\right).\end{cases} \tag{78}$$

注意$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi=\sqrt{\pi}/2$，再令

$$\mu=\frac{L_y}{\sqrt{2}\,L_0}, \tag{79}$$

则由（78）式求得

$$\begin{cases}(\Delta u)_0=-\sqrt{2}\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)\dfrac{\mu^3}{(1+\mu^2)^{3/2}},\\ (\Delta v)_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{L_0}{L_x}\right)\left(\hat{u}_0-\dfrac{\beta_0 L_y^2}{c_0^2}\hat{\varphi}_0\right)\dfrac{\mu}{(1+\mu^2)^{3/2}},\\ (\Delta\varphi')_0=-\sqrt{2}\,c_0\left(\hat{u}_0-\dfrac{1}{\beta_0 L_y^2}\hat{\varphi}_0\right)\dfrac{\mu}{(1+\mu^2)^{3/2}}.\end{cases} \tag{80}$$

从（80）式可以看到，当$L_y<\sqrt{2}\,L_0$时，$\mu<1$，则$(\Delta u)_0$相对于$(\Delta\varphi')_0$而言变化较小，是气压场适应流场；而当$L_y>\sqrt{2}\,L_0$时，$\mu>1$，则$(\Delta\varphi')_0$相对于(Δu_0)而言变化较小，是流场适应气压场，这与（42）式的分析是一致的。

6　斜压适应方程

6.1　基本方程

采用$\delta=1$时的方程组（32），即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 yu=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\beta_0 yu=-\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)+N^2 w=0,\end{cases} \tag{81}$$

但其中不考虑$\beta_0 y$随y的微商。

通过消元，不难得到

$$L_2^{(0)} v = 0, \tag{82}$$

其中

$$L_2^{(0)} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + N^2 \nabla_h^2 + \beta_0^2 y^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}, \tag{83}$$

这是（35）式右端最后一项舍弃并令 $\delta = 1$ 得到的。

方程（82）对时间积分一次，得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + N^2 \nabla_h^2 v + \beta_0^2 y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = G(x, y, z), \tag{84}$$

其中

$$G(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + N^2 \nabla_h^2 v + \beta_0^2 y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_{t=0}. \tag{85}$$

6.2 时间不变量

方程组（81）的前两个方程化为涡度方程，并利其第三和第四个方程，得到

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0, \tag{86}$$

其中

$$r(x, y, z) \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\beta_0 y}{N^2}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2}. \tag{87}$$

这是低纬斜压适应过程中的时间不变量，称为斜压位涡度，它完全由初值决定，即

$$r(x, y, z) = r_0(x, y, z) \equiv \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\beta_0 y}{N^2}\frac{\partial^2 \varphi_0'}{\partial z^2}. \tag{88}$$

注意，由方程组（81）的第二、第三和第四个方程消去 φ' 和 w，并利用第一个方程有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + N^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\beta_0^2 y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \beta_0 y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2}\right) - N^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \tag{89}$$

这样（85）式可改写为

$$G(x, y, z) = N^2 \frac{\partial r_0}{\partial x}. \tag{90}$$

6.3 初值问题

设 v 和 $\partial v / \partial t$ 的初值分别为 $\Phi(x, y, z)$ 和 $\Psi(x, y, z)$，则斜压适应过程化为下列初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + N^2 \nabla_h^2 v + \beta_0^2 y^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = G(x, y, z), \\ v\big|_{t=0} = \Phi(x, y, z), \qquad \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Psi(x, y, z). \end{cases} \tag{91}$$

若令

$$(v, G, \Phi, \Psi) = [u^*(x, y, t), G^*(x, y), \Phi^*(x, y), \Psi^*(x, y)]\sin nz, \tag{92}$$

由初值问题（91）化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} - c_1^2 \nabla_h^2 v^* + \beta_0^2 y^2 v^* = F^*(x, y), \\ v^*\big|_{t=0} = \Phi^*(x, y), \qquad \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Psi^*(x, y), \end{cases} \tag{93}$$

其中

$$F^*(x, y) = -\frac{1}{n^2} G^*(x, y). \tag{94}$$

类似（92）式，若设

$$(u, \varphi') = [u^*(x, y, t), \varphi^*(x, y, t)]\sin nz, \tag{95}$$

则由（88）式，有

$$r(x, y, z) = r^*(x, y)\sin nz, \tag{96}$$

这里

$$r^*(x, y) = \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\beta_0 y}{c_1^2}\varphi^*, \tag{97}$$

而且

$$r^*(x, y) = r_0^*(x, y) \equiv \frac{\partial v_0^*}{\partial x} - \frac{\partial u_0^*}{\partial y} - \frac{\beta_0 y}{c_1^2}\varphi_0^*, \tag{98}$$

这里u_0^*、v_0^* 和φ_0^* 分别为u^*、v^* 和φ^* 的初值。

初值问题（93）在形式上完全同（55）式，因而，当 t 足够大时，有

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} \to 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} \to 0, \tag{99}$$

从而实现斜压纬向半地转平衡。

6.4 适应终态

适应终态满足纬圈半地转平衡，此时，方程（81）化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \beta_0 y v = -\dfrac{\partial \varphi'}{\partial x}, \\ \beta_0 y u = -\dfrac{\partial \varphi'}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \varphi'}{\partial z}\right) + N^2 w = 0. \end{cases} \tag{100}$$

这相当于（32）式中 $\delta = 0$ 的情况。

类似于正压情况的分析和论证，对斜压适应过程，当$L_y < \sqrt{2}L_1$时，气压场向流场适应；而当$L_y > \sqrt{2}L_1$时，流场向气压场适应。

参 考 文 献

1 Rossby, C. G., On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, *I. J. Mar. Res.*, 1937, **1**, 15～28.

2 Obukhov, A. M., The problem of the geostrophic adaptation, *Izvestiya of Academy of Science USSR, Series Geography and Geophysics*, 1949, **13**, 281～289.

3 Yeh, T. C., On the formation of quasi–geostrophic motion in the atmosphere, *J. Met. Soc. Japan*, 1957, **35**, 130～134.

4 曾庆存，大气中的适应过程和发展过程（一），气象学报，1963，**33**, 163～174.

5 曾庆存，大气中的适应过程和发展过程（二），气象学报，1963，**33**, 281～289.

6 叶笃正、李麦村，大气运动中的适应问题，北京：科学出版社，1965.

7 Chao Jiping and Lin Yonghui, The foundation and movement of tropical semi–geostrophic adaptation, *Acta Meteor. Sinica*, 1996, **10**, 129～141.

8 林永辉、巢纪平，热带半地转适应过程，中国科学（D），1997, **27**, 566～573.

9 Matsuno, T., Quasi–geostrophic motions in the equatorial area, *J. Met. Soc. Japan*, 1966, **44**, 25～43.

Scale Analysis and Physical Mechanism of Semi–Geostrophic Adaptation in the Tropical Atmosphere

Liu Shikuo and Sun Feng

(*Department of Geophysics, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract The scale analysis on planetary scale motion in the tropical atmosphere shows that the equilibrium between the pressure gradient force and Coriolis force in the meridional direction is easily established, which is known as the zonally semi–geostrophic motion. The semi–geostrophic adaptation process in which the inertial gravity waves play an important part is relatively quick. The evolution process after the semi–geostrophic adaptation process is slow and controlled by the Kelvin waves and long Rossby waves.

Key words: semi–geostrophic adaptation; scale analysis; physical mechanism