# 一般多层准地转基本流的扰动发展与非线性稳定性

宋士吉
（东南大学自动化研究所，南京 210096）

刘家琦
（哈尔滨工业大学数学系，哈尔滨 150001）

刘秦玉
（青岛海洋大学物理海洋研究所，青岛 266003）

**摘 要** 考察了一般多层准地转模式中初值与参数共同扰动的情形。在初始扰动场仅依赖于初始扰动位势涡度、初始扰动边界速度环量与扰动参数的条件下，给出了扰动能量、扰动位涡拟能发展上（下）界精细的显式估计。进而在 Lyapunov 意义下广义非线性稳定性概念的基础上，得到了对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据。本文工作推广了仅考虑模式中初值扰动情形所得到的相应结果。

**关键词**：准地转运动；初值与参数的扰动；非线性稳定性

## 1 引言

Arnold[1,2]首先提出用变分原理与先验估计相结合的方法研究流体运动的非线性稳定性，得到了两维不可压缩理想流体运动的两个稳定性判据。Arnold 的方法由于采用了完整的非线性模式，考察了空间结构任意的有限振幅扰动的稳定性问题，避开了其他经典方法（如标准谱方法、连续谱方法、弱非线性方法等）的若干局限性，因此在地球流体力学领域内已获得了极大的发展[3~5]。

目前，多层准地转地球流体运动中对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性研究工作也已取得了不少成果[6~10]。对于更一般的情形，即具有任意的层密度跃度和层厚度的多层准地转基本流的扰动发展问题，刘永明、穆穆[11]给出了适用于初值扰动的扰动能量、扰动位涡拟能的上界估计式，并得到了对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据。本文进一步考虑了模式中初值与参数共同扰动的情形，在初始扰动场仅依赖于初始扰动位势涡度、初始扰动边界速度环量与扰动参数的条件下，建立了扰动能量、扰动位涡拟能发展上（下）界的精细的显式估计。这些估计式可直接应用于研究 Shepherd 方法的非线性不稳定性的饱和问题[12,13]。进而我们给出了适用于模式中除值与参数共同扰动的 Lyapunov 意义下广义非线性稳定性的定义，得到了对应于 Arnold 第二定理的广义非线性稳定性判据。由于这里考虑了模式中参数的扰动，本文工作也自然推广了仅考虑初值扰动情形所得到的相应结果[11]。

1998-09-24 收到，1999-04-01 收到修改稿

## 2 扰动发展的上（下）界

考察 $N$ 层层结稳定的准地转流体运动，各层密度$\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_N$均为常数，且各层间密度跃度$\rho_{i+1}-\rho_i$可为任意值，第 $i$ 层的平均厚度为$d_i$，其控制方程为[14]

$$\frac{\partial P_i}{\partial t}+\partial(\Phi_i,P_i)=0,\qquad i=1,2,\cdots,N,\tag{1}$$

$$P_i(x,y,t)=\nabla^2\Phi_i-d_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\Phi_j+f_i(x,y),\qquad i=1,2,\cdots,N.\tag{2}$$

这里$\Phi_i$与$P_i$分别是第 $i$ 层流体的流函数与广义涡度，$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$是两维 Laplace 算子，$\partial(A,B)=A_xB_y-A_yB_x$是两维 Jacobi 算子，并且

$$f_1=f_0+\beta y-\frac{f_0\tau_0(x,y)}{d_1},$$
$$f_2=f_3=\cdots=f_{N-1}=f_0+\beta y,$$
$$f_N=f_0+\beta y+\frac{f_0\tau_N(x,y)}{d_N},$$

其中$f_0$（常数）是 Coriolis 参数，且$\tau_0(x,y)$与$\tau_N(x,y)$分别为流体顶部和底部的地形函数。若顶（或底）边界是自由的，则$\tau_0(x,y)=0$（或$\tau_N(x,y)=0$）。$T=[T_{ij}]$是一个$N\times N$对称的三对角线矩阵，

$$T_{i+1,i}=T_{i,i+1}=-f_0^2(g_i)^{-1}=-F_i<0,\qquad i=1,2,\cdots,N-1,$$
$$T_{i,i-1}=T_{i-1,i}=-f_0^2(g_{i-1})^{-1}=-F_{i-1}<0,\qquad i=1,2,\cdots,N,$$
$$T_{ii}=f_0^2((g_{i-1})^{-1}+(g_i)^{-1})=F_{i-1}+F_i,\qquad i=1,2,\cdots,N,$$
$$T_{ij}=0,\qquad |i-j|>1,$$

其中$g_i$是穿越第 $i$ 层与第 $i+1$ 层内界面的浮力跃度，并且若顶（或底）边界是刚体，则$(g_0)^{-1}=0$（或$(g_N)^{-1}=0$）；而当顶（或底）边界是自由的，则$(g_0)^{-1}>0$（或$(g_N)^{-1}>0$）。

在 $\beta$ 平面上的有界单（或多）连通区域 $D$ 中考察流体的运动。边界$\partial D$光滑，且由 $J+1$ 个单连通分支$\partial D_j$组成，边界条件为固壁条件与边界速度环量守恒：

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial s}\right|_{\partial D}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\partial D_j}\nabla\Phi_i\,\vec{n}\,\mathrm{d}s=0,\qquad j=0,\cdots,J,\tag{3}$$

其中 $s$ 是沿边界$\partial D$的弧长，$\vec{n}$是边界的单位外法向量。

设$(\Phi_i,P_i)=(\Psi_i,Q_i)$是（1）～（3）式的对应于未受扰动参数$\overline{F}_i$、$\overline{f}_i$的一组定常解，并假定存在一元连续可导函数$\Psi_i(\cdot)$使得

$$\Psi_i(x,y)=\Psi_i[Q_i(x,y)],\qquad \forall(x,y)\in D,\qquad i=1,2,\cdots,N.\tag{4}$$

叠加在定常基本态$(\Psi_i,Q_i)$上的有限振幅扰动$(\psi_i,q_i)$及相应于该基本态的参数

$(\bar{d}_i^{-1}, \bar{T}_{ij}, \bar{f}_i)$的扰动$(\delta(\bar{d}_i^{-1}), \delta\bar{T}_{ij}, \delta\bar{f}_i)$分别定义为

$$\Phi_i = \Psi_i + \psi_i, \qquad P_i = Q_i + q_i, \qquad d_i^{-1} = \bar{d}_i^{-1} + \delta(\bar{d}_i^{-1}),$$
$$T_{ij} = \bar{T}_{ij} + \delta\bar{T}_{ij}, \qquad f_i = \bar{f}_i + \delta\bar{f}_i, \tag{5}$$

其中矩阵参数$\bar{T}_{ij}$的意义可按上面$T_{ij}$的意义知道，而扰动矩阵$\delta\bar{T} = [\delta\bar{T}_{ij}]$是一个$N\times N$对称的三对角线矩阵,

$$\begin{aligned}
&\delta\bar{T}_{i+1,i} = \delta\bar{T}_{i,i+1} = -\delta\bar{F}_i < 0, && i = 1,2,\cdots,N-1,\\
&\delta\bar{T}_{i,i-1} = \delta\bar{T}_{i-1,i} = -\delta\bar{F}_{i-1} < 0, && i = 1,2,\cdots,N,\\
&\delta\bar{T}_{ii} = \delta\bar{F}_{i-1} + \delta\bar{F}_i, && i = 1,2,\cdots,N,\\
&\delta\bar{T}_{ij} = 0, \qquad |i-j| > 1,
\end{aligned}$$

并且

$$q_i = \nabla^2\psi_i - d_i^{-1}\sum_{j=1}^{N} T_{ij}\psi_j - \delta(\bar{d}_i^{-1})\sum_{j=1}^{N}\bar{T}_{ij}\Psi_j - d_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}\delta\bar{T}_{ij}\Psi_j + \delta\bar{f}_i.$$

对应于 Arnold 第二定理，假定函数$\Psi_i(\cdot)$均是单调下降函数，且存在常数$C_{1i}$和$C_{2i}$使得

$$0 < C_{1i} \leqslant -d\Psi_i / dQ_i \leqslant C_{2i} < \infty, \qquad i = 1,\cdots,N, \tag{6}$$

这里

$$\frac{d\Psi_i}{dQ_i} = \frac{\nabla\Psi_i}{\nabla Q_i} = \frac{\partial\Psi_i}{\partial x} \Big/ \frac{\partial Q_i}{\partial x} \equiv \frac{\partial\Psi_i}{\partial y} \Big/ \frac{\partial Q_i}{\partial y}.$$

记$G_i(\eta) = \int_0^\eta \Psi_i(\tau)\mathrm{d}\tau$，利用能量、广义位涡拟能及边界速度环量守恒，有$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = 0$，$t \geqslant 0$，其中

$$\begin{aligned}
H(t) = &\frac{1}{2}\int_D\Big[\sum_{i=1}^{N} d_i|\nabla(\Psi_i + \psi_i)|^2 + F_0|\Psi_1 + \psi_1|^2 + F_N|\Psi_N + \psi_N|^2\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+ \frac{1}{2}\int_D\Big[\sum_{i=1}^{N-1} F_i(\Psi_{i+1} + \psi_{i+1} - \Psi_i - \psi_i)^2\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&- \frac{1}{2}\int_D\Big[\sum_{i=1}^{N}\bar{d}_i|\nabla\Psi_i|^2 + \bar{F}_0|\Psi_1|^2 + \bar{F}_N|\Psi_N|^2 + \sum_{i=1}^{N-1}\bar{F}_i(\Psi_{i+1} - \Psi_i)^2\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+ \sum_{i=1}^{N}\int_D d_i G_i(Q_i + q_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_{i=1}^{N}\int_D \bar{d}_i G_i(Q_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&- \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\oint_{\partial D_j} d_i\Psi_i\nabla\psi_i\cdot\vec{n}\mathrm{d}s, \qquad i = 1,2,\cdots,N.
\end{aligned}$$

由边界条件（3）式，并注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\nabla\Psi_i\nabla\psi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\nabla(\Psi_i\nabla\psi_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\Psi_i\nabla^2\psi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\oint_{\partial D_j} d_i\Psi_i\nabla\psi_i\cdot\vec{n}\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\Psi_i q_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_D \Psi_i T_{ij}\psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$- \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_D \delta \bar{T}_{ij}\Psi_i\Psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_D d_i\delta(\bar{d}_i^{-1})\bar{T}_{ij}\Psi_i\Psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\Psi_i\delta\bar{f}_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

以及

$$\int_D\left[\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\Psi_{i+1}-\Psi_i)(\psi_{i+1}-\psi_i)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_D \Psi_i T_{ij}\psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \int_D (F_0\Psi_1\psi_1 + F_N\Psi_N\psi_N)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E(t)+A(t)) = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{8}$$

其中

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i|\nabla\psi_i|^2 + F_0|\psi_1|^2 + F_N|\psi_N|^2 + \sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi_{i+1}-\psi_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

并且

$$A(t) = \int_D\left\{\sum_{i=1}^{N}d_i[G_i(Q_i+q_i) - G_i(Q_i) - G'_i(Q_i)q_i]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}.$$

为建立仅依赖于初始扰动场（初始扰动位势涡度、初始扰动边界速度环量与扰动参数）的扰动能量、扰动位涡拟能的精确的上（下）界估计，需要定义

$$q_i^* = \int_D q_{0i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big/ \int_D \mathrm{d}y\mathrm{d}y, \qquad q'_i = q_i - q_i^*, \tag{9}$$

这里$q_{0i} = q_i(x,y,0), i=1,2,\cdots,N$。由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_D q_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，知

$$\int_D q'_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \qquad t\geqslant 0, \qquad i = 1,2,\cdots,N. \tag{10}$$

下面将扰动$(\psi_i, q_i)$分解为两部分（参见文献[4]）：

$$\psi_i = \psi'_i + \psi_i^*, \qquad q_i = q'_i + q_i^*, \tag{11}$$

其中$\psi'_i$与$\psi_i^*$分别为下面边值问题的解：

$$\begin{cases} \nabla^2\psi'_i - d_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\psi'_j = q'_i + \delta(\bar{d}_i^{-1})\sum_{j=1}^{N}\bar{T}_{ij}\Psi_j + d_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}\delta\bar{T}_{ij}\Psi_j - \delta\bar{f}_i, & \text{在}D\text{中}, \\ \left.\frac{\partial\psi'_i}{\partial s}\right|_{\partial D} = 0, \quad \oint_{\partial D_j}\nabla\psi'_i\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = 0, & j = 0,\cdots,J. \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \nabla^2\psi_i^* - d_i^{-1}\sum_{j=1}^{N}T_{ij}\psi_i^* = q_i^*, & \text{在}D\text{中}, \\ \left.\frac{\partial\psi_i^*}{\partial s}\right|_{\partial D} = 0, \quad \oint_{\partial D_j}\nabla\psi_i^*\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = \oint_{\partial D_j}\nabla\psi_{0i}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s, & j = 0,\cdots,J. \end{cases} \tag{13}$$

其中$\psi_{0i}=\psi_i\big|_{t=0}$。下面，为讨论问题方便，首先定义矩阵

$$K=\mathrm{diag}(d_1^{-1/2},\cdots,d_N^{-1/2})\ \ 和 R=\mathrm{diag}((\delta(\bar{d}_1^{-1}))^{1/2},\cdots,(\delta(\bar{d}_N^{-1}))^{1/2}),$$

且设矩阵$KTK$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$，于是由矩阵理论，存在正交矩阵$L$使得

$$L^T KTKL=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N), \tag{14}$$

其中$L^T$表示矩阵$L$的转置，$L^TL=I$，$I$为单位阵，且$0\leqslant\lambda_1<\cdots<\lambda_N$。在（12）式中左乘$L^TK^{-1}$，得

$$\begin{cases}\nabla^2 P_i-\lambda_i P_i=b_i+\omega_i+\tau_i-e_i, & 在D中,\\ \left.\dfrac{\partial P_i}{\partial s}\right|_{\partial D}=0,\quad \oint_{\partial D_j}\nabla P_i\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0, & j=0,\cdots,J.\end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}&P=L^TK^{-1}\psi',\quad b=L^TK^{-1}q',\quad e=L^TK^{-1}(\delta\bar{f}),\quad \omega=L^TK^{-1}R^2\bar{T}\Psi,\\&\tau=L^TK(\delta\bar{T})\Psi,\quad \sigma=L^TK^{-1}\bar{T}\Psi,\quad \delta\bar{f}=(\delta\bar{f}_1,\cdots,\delta\bar{f}_N)^T,\quad \psi'=(\psi'_1,\cdots,\psi'_N)^T,\\&q'=(q'_1,\cdots,q'_N)^T,\qquad 且\quad \Psi=(\Psi_1,\cdots,\Psi_N)^T.\end{aligned} \tag{16}$$

现在，利用（9）与（10）式，容易得到

$$Z(t)=Z^*+Z'(t), \tag{17}$$

其中

$$Z(t)=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i(q_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad Z^*=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$Z'(t)=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i(q'_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由（6）与（8）式，可得

$$\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_iC_{1i}(q_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant -A(t)=E(t)-E(0)-A(0), \tag{18}$$

并且，从（9）与（10）式，也有

$$\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_iC_{1i}(q'_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant E(t)-E(0)-A(0)-\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_iC_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{19}$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned}E(t)&=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i|\nabla\psi_i|^2+F_0|\psi_1|^2+F_N|\psi_N|^2+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi_{i+1}-\psi_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i\left|\nabla(\psi'_i+\psi_i^*)\right|^2+F_0\left|\psi'_1+\psi_1^*\right|^2+F_N\left|\psi'_N+\psi_N^*\right|^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}-\psi'_i+\psi_{i+1}^*-\psi_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=E'(t)+E^*+\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i\nabla\psi'_i\nabla\psi_i^*+F_0\psi'_1\psi_1^*+F_N\psi'_N\psi_N^*\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$+\int_D\left[\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}-\psi'_i)(\psi^*_{i+1}-\psi^*_i)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{20}$$

其中

$$E'(t)=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i|\nabla\psi'_i|^2+F_0|\psi'_1|^2+F_N|\psi'_N|^2+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}-\psi'_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$E^*=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i|\nabla\psi^*_i|^2+F_0|\psi^*_1|^2+F_N|\psi^*_N|^2+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi^*_{i+1}-\psi^*_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到（12)、(7）两式，有

$$\begin{aligned}&\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\nabla\psi'_i\nabla\psi^*_i+F_0\psi'_1\psi^*_1+F_N\psi'_N\psi^*_N+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}\right.\\&\qquad\left.-\psi'_i)(\psi^*_{i+1}-\psi^*_i)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\psi^*_i\cdot\nabla^2\psi'_i\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_D\left[\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}-\psi'_i)(\psi^*_{i+1}-\psi^*_i)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\qquad+\int_D(F_0\psi'_1\psi^*_1+F_N\psi'_N\psi^*_N)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\psi^*_i\cdot q'_i\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\delta(\bar{d}_i^{-1})\psi^*_i\left(\sum_{j=1}^{N}\overline{T}_{ij}\Psi_j\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\qquad-\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\delta\overline{T}_{ij})\psi^*_i\Psi_j\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i(\delta\bar{f}_i)\psi^*_i\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{21}$$

再由数学归纳法，可以得到

$$\begin{aligned}&\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\nabla\psi'_i\nabla\psi^*_i+F_0\psi'_1\psi^*_1+F_N\psi'_N\psi^*_N+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}-\psi'_i)(\psi^*_{i+1}\right.\\&\qquad\left.-\psi^*_i)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2(E^*)^{1/2}(E'(t))^{1/2}.\end{aligned} \tag{22}$$

对取值于[0, 1]内的任何实数 $\alpha$，综合（20)、(21）与（22）式，有

$$\begin{aligned}E(t)\leqslant{}&E'(t)+E^*+\alpha\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\psi^*_i q'_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|+\alpha\left|\sum_{i=1}^{N}\delta(\bar{d}_i^{-1})\int_D d_i\psi^*_i\left(\sum_{j=1}^{N}\overline{T}_{ij}\Psi_j\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\&+\alpha\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_D\psi^*_i(\delta\overline{T}_{ij})\Psi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|+\alpha\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\delta\bar{f}_i)\psi^*_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\&+2(1-\alpha)(E^*)^{1/2}(E'(t))^{1/2}\\\leqslant{}&E'(t)+E^*+\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\psi^*_i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(q'_i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\\&+\alpha|\delta(\bar{d}^{-1})|\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\psi^*_i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\left(\sum_{j=1}^{N}\overline{T}_{ij}\Psi_j\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\\&+\alpha|d^{-1}|\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\psi^*_i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\left(\sum_{j=1}^{N}\delta\overline{T}_{ij}\Psi_j\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\end{aligned}$$

$$+\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\psi_i^*)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\delta\bar{f}_i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}$$

$$+2(1-\alpha)(E^*)^{1/2}(E'(t))^{1/2}$$

$$=E'(t)+E^*+\sqrt{2}\alpha\|\psi^*\|(Z'(t))^{1/2}+\alpha|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\psi^*\|\|\Psi\|+\alpha|d^{-1}|\|\psi^*\|\|\delta\Psi\|$$
$$+\alpha\|\psi^*\|\|\delta\bar{f}\|+2(1-\alpha)(E^*)^{1/2}(E'(t))^{1/2},\tag{23}$$

且

$$\|\psi^*\|=\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\psi_i^*)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2},$$

$$\|\Psi\|=\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\Big(\sum_{j=1}^{N}\bar{T}_{ij}\Psi_j\Big)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2},\quad|\delta(\bar{d}^{-1})|=\sum_{i=1}^{N}|\delta(\bar{d}_i^{-1})|,$$

$$\|\delta\Psi\|=\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i\Big(\sum_{j=1}^{N}\delta\bar{T}_{ij}\Psi_j\Big)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2},$$

$$\|\delta\bar{f}\|=\left[\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i(\delta\bar{f}_i)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2},\quad|d^{-1}|=\sum_{i=1}^{N}|d_i^{-1}|.\tag{24}$$

再从（7）与（12）式，又有

$$E'(t)=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i|\nabla\psi'_i|^2+F_0|\psi'_1|^2+F_N|\psi'_N|^2+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}-\psi'_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\psi'_i\nabla^2\psi_i\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_D\left[F_0|\psi'_1|^2+F_N|\psi'_N|^2\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi'_{i+1}-\psi'_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\psi'_i\Big(q'_i+\delta(\bar{d}_i^{-1})\Big(\sum_{j=1}^{N}\bar{T}_{ij}\Psi_j\Big)+(d_i^{-1})\Big(\sum_{j=1}^{N}\delta\bar{T}_{ij}\Psi_j\Big)\right.$$
$$\left.-\delta\bar{f}_i\Big)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{25}$$

利用（16）式，（25）式可以改写为

$$E'(t)=-\frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{N}P_i(b_i+\omega_i+\tau_i-e_i)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{26}$$

注意到（15）式，应用偏微分方程的 Poincare 不等式，并根据$KTK$的最小特征值$\lambda_1\geqslant 0$，有

$$E'(t)\leqslant\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda+\lambda_i}(b_i+\omega_i+\tau_i-e_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda+\lambda_i}(b_i^2+\omega_i^2+\tau_i^2+e_i^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda+\lambda_i}(b_i\omega_i+b_i\tau_i+\omega_i\tau_i-b_ie_i-\omega_ie_i-\tau_ie_i)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{27}$$

进而有

$$E'(t)\leqslant\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda+\lambda_i}b_i^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{\lambda+\lambda_1}\left\{\frac{1}{2}|\delta(\bar{d}^{-1})|^2\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D\sigma_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D \tau_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D e_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|+|\delta(\bar{d}^{-1})|\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D b_i\sigma_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$
$$+\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D b_i\tau_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|+\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D b_ie_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|+|\delta(\bar{d}^{-1})|\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D \sigma_i\tau_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$
$$+|\delta(\bar{d}^{-1})|\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D \sigma_ie_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|+\left|\sum_{i=1}^{N}\int_D \tau_ie_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\Bigg\}. \tag{28}$$

其中 $\lambda$ 是以下边值问题的最小正特征值，

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi+\lambda\varphi=0, & \text{在}D\text{中},\\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}\right|_{\partial D}=0,\quad \displaystyle\oint_{\partial D_j}\nabla\varphi\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0, & j=0,\cdots,J.\end{cases} \tag{29}$$

记三角矩阵 $\Lambda$ 和 $C$ 分别为

$$\Lambda=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda+\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda+\lambda_N}\right),\qquad C=\mathrm{diag}(C_{11},\cdots,C_{1N}). \tag{30}$$

利用（16）、（24）及（30）式，可将（28）式写为

$$E'(t)\leqslant\frac{1}{2}\int_D[(q')^TK^{-1}L\Lambda L^TK^{-1}q']\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{\lambda+\lambda_1}\Big[\frac{1}{2}|\delta(\bar{d}^{-1})|^2\|\Psi\|^2$$
$$+\frac{1}{2}|d^{-1}|^2\|\delta\Psi\|^2+\frac{1}{2}\|\delta\bar{f}\|^2+\sqrt{2}|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|(Z'(t))^{1/2}$$
$$+\sqrt{2}|d^{-1}|\|\delta\Psi\|(Z'(t))^{1/2}+\sqrt{2}\|\delta\bar{f}\|(Z'(t))^{1/2}+|\delta(\bar{d}^{-1})||d^{-1}|\|\Psi\|\|\delta\Psi\|$$
$$+|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|\|\delta\bar{f}\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|\|\delta\bar{f}\|\Big]. \tag{31}$$

从（27）式，又可得到

$$(E'(t))^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\sum_{i=1}^{N}\int_D\frac{1}{\lambda+\lambda_i}b_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{N}\int_D\frac{1}{\lambda+\lambda_i}\omega_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{i=1}^{N}\int_D\frac{1}{\lambda+\lambda_i}\tau_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{N}\int_D\frac{1}{\lambda+\lambda_i}e_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\right\}$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda+\lambda_1}}(Z'(t))^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|$$
$$+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|). \tag{32}$$

由（31）与（32）两式，可将（23）式写为

$$E(t)\leqslant\frac{1}{2}\int_D[(q')^TK^{-1}L\Lambda L^TK^{-1}q']\mathrm{d}x\mathrm{d}y+B(\alpha)(Z'(t))^{1/2}+H^*(\alpha), \tag{33}$$

其中

$$B(\alpha)=\sqrt{2}\alpha\|\psi^*\|+2(1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{\lambda+\lambda_1}}(E^*)^{1/2}$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{\lambda+\lambda_1}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)$$

且

$$H^*(\alpha)=E^*+\alpha|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\psi^*\|\|\Psi\|+\alpha|d^{-1}|\|\psi^*\|\|\delta\Psi\|+\alpha\|\psi^*\|\|\delta\bar{f}\|$$
$$+2(1-\alpha)(E^*)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2(\lambda+\lambda_1)}}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)$$
$$+\frac{1}{2(\lambda+\lambda_1)}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)^2$$
$$=E^*+\frac{1}{\sqrt{2}}B(\alpha)(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)$$
$$-\frac{1}{2(\lambda+\lambda_1)}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)^2. \tag{34}$$

结合（33）与（34）式，可将（19）式写为

$$\frac{1}{2}\int_D[(q')^T K^{-1}[C-L\Lambda L^T]K^{-1}q']\mathrm{d}x\mathrm{d}y-B(\alpha)(Z'(t))^{1/2}-H(\alpha)\leqslant 0, \tag{35}$$

其中$H(\alpha)=H^*(\alpha)-E(0)-A(0)-\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i C_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。又由（14）式，知

$$L\Lambda^{-1}L^T=L\mathrm{diag}(\lambda+\lambda_1,\cdots,\lambda+\lambda_N)L^T=\lambda I+L\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)L^T=\lambda I+KTK,$$

于是，$L\Lambda L^T=(L\Lambda^{-1}L^T)^{-1}=(\lambda I+KTK)^{-1}$，定义矩阵

$$M=C-L\Lambda L^T=C-(\lambda I+KTK)^{-1}. \tag{36}$$

针对矩阵 $M$ 的最小特征值的不同符号，分别讨论如下:

(a) 若矩阵 $M$ 是正定的，可设其最小特征值为 $k>0$。由（35）式，并注意到对任意 $N$ 维向量 $\Phi$，有

$$\Phi^T M\Phi\geqslant k|\Phi|^2, \tag{37}$$

可得

$$kZ'(t)-B(\alpha)(Z'(t))^{1/2}-H(a)\leqslant 0, \tag{38}$$

且$(Z'(t))^{1/2}\leqslant\xi_+(\alpha)$，再由（17）式，知

$$Z(t)\leqslant Z^*+\xi_+^2(\alpha), \tag{39}$$

其中$\xi_+(\alpha)=\frac{1}{2k}[B(\alpha)+\sqrt{B^2(\alpha)+4kH(\alpha)}]$。

另一方面，由（30）式，可知矩阵$L\Delta L^T$的最大特征值为$1/(\lambda+\lambda_1)$，于是，再从（33）式，又得

$$E(t)\leqslant\frac{\xi_+^2(\alpha)}{\lambda+\lambda_1}+B(\alpha)\xi_+(\alpha)+H^*(\alpha). \tag{40}$$

显然，$\xi_+(\alpha)$与$H^*(\alpha)$作为$B(\alpha)$的函数是单调增加的。因此，为分别确定扰动能量与扰动位涡拟能的最小上界，我们求得$B(\alpha)$的最小值如下:

$$B=\min_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}B(\alpha)$$

$$=\begin{cases}2\left(\dfrac{E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}+\dfrac{\sqrt{2}}{\lambda+\lambda_1}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\| \\ +\|\delta\bar{f}\|) \qquad 当\|\psi^*\|\geqslant\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}, \\ \sqrt{2}\|\psi^*\|+\dfrac{\sqrt{2}}{\lambda+\lambda_1}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\| \\ +\|\delta\bar{f}\|) \qquad 当\|\psi^*\|<\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2},\end{cases} \tag{41}$$

因此，扰动能量与扰动位涡拟能的最小上界分别为

$$E(t)\leqslant\frac{\xi_+^2}{\lambda+\lambda_1}+B\xi_++H^* \quad 且 \quad Z(t)\leqslant Z^*+\xi_+^2, \tag{42}$$

其中

$$\xi_+=\frac{1}{2k}(B+\sqrt{B^2+4kH}),\ H=H^*-E(0)-A(0)-\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_iC_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

且

$$H^*=\min_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}H^*(\alpha)$$

$$=\begin{cases}E^*+\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|) \\ +\dfrac{1}{2(\lambda+\lambda_1)}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)^2 \quad 当\|\psi^*\|\geqslant\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}, \\ E^*+\|\psi^*\|(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|) \\ +\dfrac{1}{2(\lambda+\lambda_1)}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)^2 \quad 当\|\psi^*\|<\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}.\end{cases}$$

(b) 若矩阵 $M$ 不是正定的，$M$ 的最小特征值 $k<0$，且

$$\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}H^*(\alpha)-E(0)-A(0)-\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_iC_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0,$$

其中

$$\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}H^*(\alpha)=$$

$$\begin{cases}E^*+\|\psi^*\|(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+\|d^{-1}\|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|) \\ +\dfrac{1}{2(\lambda+\lambda_1)}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)^2, \quad 当\|\psi^*\|\geqslant\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}, \\ E^*+\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|) \\ +\dfrac{1}{2(\lambda+\lambda_1)}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\|+|d^{-1}|\|\delta\Psi\|+\|\delta\bar{f}\|)^2, \quad 当\|\psi^*\|<\left(\dfrac{2E^*}{\lambda+\lambda_1}\right)^{1/2}.\end{cases} \tag{43}$$

则由（38）式，知

$$Z'(t) \geqslant \xi_{-}(\alpha) \quad 且 \quad Z(t) = Z^{*} + Z'(t) \geqslant Z^{*} + \xi_{-}^{2}(\alpha), \tag{44}$$

其中$\xi_{-}(\alpha) = \frac{1}{2k}\left[B(\alpha) - \sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)}\right]$。注意到（19）式，有

$$\begin{aligned} E(t) &= -A(t) + E(0) + A(0) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_D \left[\sum_{i=1}^{N} d_i C_{1i}(q_i^{*})^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + E(0) + A(0) + \frac{1}{2}\int_D \left[\sum_{i=1}^{N} d_i C_{1i}(q'_i)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_D \left[\sum_{i=1}^{N} d_i C_{1i}(q_i^{*})^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + E(0) + A(0) + \tilde{C}_1 \xi_{-}^{2}(\alpha), \end{aligned} \tag{45}$$

其中$\tilde{C}_1 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} C_{1i}$。为了分别确定扰动能量与扰动位涡拟能的最大下界，我们证明$\xi_{-}(\alpha)$作为$B(\alpha)$的函数是单调减少的。事实上，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\xi_{-}(\alpha)}{dB(\alpha)} &= \frac{1}{2k}\left[1 - \frac{2B(\alpha) + 2\sqrt{2}k(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|)}{2\sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)}}\right] \\ &= \frac{1}{2k}\frac{\sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)} - [B(\alpha) + \sqrt{2}k(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|)]}{\sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)}} \\ &= \frac{1}{2k}\frac{4kH(\alpha) - 2\sqrt{2}kB(\alpha)(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|)}{\sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)}(\sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)} + B(a) + \sqrt{2}k(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|))} \\ &\quad - \frac{1}{2k}\frac{2k^2(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|)^2}{\sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)}(\sqrt{B^2(\alpha) + 4kH(\alpha)} + B(\alpha) + \sqrt{2}k(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|))}. \end{aligned} \tag{46}$$

又矩阵$M = C - L\Lambda L^T$的最小特征值为$k$，而$L\Lambda L^T$的最大特征值为$1/(\lambda + \lambda_1)$，故知$1/(\lambda + \lambda_1) + k > 0$，因此

$$\begin{aligned} B(\alpha) &> \frac{\sqrt{2}}{\lambda + \lambda_1}(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|) \\ &> -\sqrt{2}k(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|), \end{aligned}$$

即（46）式右端的分母为正的。又注意到

$$\begin{aligned} &4kH(\alpha) - 2\sqrt{2}kB(\alpha)(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|) - 2k^2(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| \\ &\qquad + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|)^2 \\ &= 4kE^{*} - 2k(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|)^2\left(k + \frac{1}{\lambda + \lambda_1}\right) \\ &\quad - 4k\left[E(0) + A(0) + \frac{1}{2}\int_D \left(\sum_{i=1}^{N} d_i C_{1i}(q_i^{*})^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \end{aligned}$$

$$= 2k\left[2E^* - \left(k+\frac{1}{\lambda}\right)(|\delta(\bar{d}^{-1})|\|\Psi\| + |d^{-1}|\|\delta\Psi\| + \|\delta\bar{f}\|)^2\right]$$
$$- 4k\left[E(0) + A(0) + \frac{1}{2}\int_D\left(\sum_{i=1}^N d_i C_{1i}(q_i^*)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]. \tag{47}$$

再由假定条件$\max\limits_{0\leq\alpha\leq 1} H^*(\alpha) < E(0) + A(0) + \frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i C_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，知（47）式的右端是大于零的。结合上面的讨论，我们知道$\mathrm{d}\xi_-(\alpha)/dB(\alpha) < 0$，由此可得扰动能量与扰动位涡拟能的最大下界分别为

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i C_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + E(0) + A(0) + \tilde{C}_1\xi_-^2, \quad Z(t) \geq Z^* + \xi_-^2, \tag{48}$$

其中$\xi_- = (B - \sqrt{B^2 + 4kH})/2k$，这里 $B$ 与 $H$ 的意义如（a）中所述。

（c）若矩阵 $M$ 的最小特征值 $k = 0$ 且$\max\limits_{0\leq\alpha\leq 1} H(\alpha) < 0$，则由（38）式，知

$$B(\alpha)(Z'(t))^{1/2} + H(\alpha) \geq 0,$$

从$\max\limits_{0\leq\alpha\leq 1} H(\alpha) < 0$，有

$$(Z'(t))^{1/2} \geq \frac{-H(\alpha)}{B(\alpha)}, \tag{49}$$

再由$H(\alpha)$的意义，易知$-H(\alpha)/B(\alpha)$作为$B(\alpha)$的函数是单调减少的，因此$(Z'(t))^{1/2}$的最大下界是$-H/B$，故

$$Z'(t) \geq \frac{H^2}{B^2}, \tag{50}$$

其中 $H$ 及 $B$ 的意义如（a）中所述。因此，得到了扰动能量与扰动位涡拟能的最大下界为

$$E(t) = -A(t) + E(0) + A(0) \geq \frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^N d_i C_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+ E(0) + A(0) + \tilde{C}_1\frac{H^2}{B^2}, \tag{51}$$

$$Z(t) = Z^* + Z'(t) \geq Z^* + \frac{H^2}{B^2}. \tag{52}$$

以上讨论了模式中初值与参数共同扰动的情形，并在初始扰动场仅依赖于初始扰动位势涡度、初始扰动边界速度环量与扰动参数的条件下，根据矩阵 M 的最小特征值的不同符号分别建立了扰动能量、扰动位涡拟能的发展上（下）界的精细的显式估计。这些估计式可直接用于研究 Shepherd 方法的非线性不稳定性的饱和问题[12,13]。

本文利用了与文献[11]完全相同的原始方程及边界条件，考虑了模式中的初值与参数的扰动。当扰动参数取为零时，即仅考虑初值的扰动，本文对矩阵 $M$ 正定时给出的扰动量发展上界比文献[11]中的相应结果更为精确，并且对矩阵 $M$ 不是正定的情形给

出了扰动量发展下界的精细的显式估计。

## 3 非线性稳定性

我们将对上述矩阵 $M$ 为正定的情形建立广义非线性稳定性判据。为此，首先给出数学上严谨、物理上合理的用于模式中初值与参数共同扰动的 Lyapunov 意义下广义非线性稳定性定义。

**定义 1** 设$(\Psi_i, Q_i)$是满足（4）与（6）式的方程（1）～（3）的一组定常解，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当$\sum_{i=1}^{N}\left(\int_D |q_{0i}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)<\delta$，$\sum_{i=1}^{N}\left(\int_D |\delta \bar{f}_i|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)<\delta$，$\sum_{i=1}^{N}\left|\delta(\bar{d}_i^{-1})\right|<\delta$，并且$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\left|\oint_{\partial D_j}\nabla\psi_{0i}\cdot \vec{n}\mathrm{d}s\right|<\delta$时，有

$$E(t)<\varepsilon,\quad Z(t)<\varepsilon,$$

则称定常态$(\Psi_i, Q_i)$相对于模式中初值与参数的共同扰动为 Lyapunov 意义下广义非线性稳定的。这里符号的意义如本文前面所述。

**判据 1** 设定常态$(\Psi_i, Q_i)$满足（4）与（6）式，且由（36）式定义的矩阵 $M$ 是正定的，则该定常态在定义 1 的 Lyapunov 意义下是广义非线性稳定的，并且扰动能量、扰动位涡拟能的最小上界可分别由（42）式给出。

事实上，从 $\sum_{i=1}^{N}\int_D |q_{0i}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\to 0$，$\sum_{i=1}^{N}\int_D |\delta\bar{f}_i|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\to 0$，$\sum_{i=1}^{N}\left|\delta(\bar{d}^{-1})\right|\to 0$，$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\left|\oint_{\partial D_j}\nabla\psi_{0i}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\right|\to 0$，有 $\|\delta\bar{f}\|=\left(\sum_{i=1}^{N}\int_D d_i|\delta\bar{f}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\to 0$，$\left|\delta(\bar{d}^{-1})\right|\to 0$，结合（9）式，又有 $q_i^*\to 0$，进而有 $Z^*=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to 0$，$\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_iC_{1i}(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to 0$，且利用（9）、（10）两式，又有 $Z'(0)=\frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i(q'_{0i})^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to 0$。由$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\left|\oint_{\partial D_j}\nabla\psi_{0i}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\right|\to 0$，类似于前面对$E'(t)$的估计方法，并利用偏微分方程的 Poincare 不等式，得到

$$\begin{aligned}
E^* &= \frac{1}{2}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\left|\nabla\psi_i^*\right|^2+F_0\left|\psi_1^*\right|^2+F_N\left|\psi_N^*\right|^2+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi_{i+1}^*-\psi_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\int_D\nabla(\psi_i^*\nabla\psi_i^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\sum_{i=1}^{N}d_i\int_D\psi_i^*\nabla^2\psi_i^*\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_D\left[F_0\left|\psi_1^*\right|^2+F_N\left|\psi_N^*\right|^2+\sum_{i=1}^{N-1}F_i(\psi_{i+1}^*-\psi_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}d_i\oint_{\partial D_j}(\psi_i^*\nabla\psi_i^*)\cdot\vec{n}\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{N}d_i\int_D\psi_i^*q_i^*\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\
&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\left|d_i\psi_i^*\right|_{\partial D}\left|\oint_{\partial D_j}\nabla\psi_{0i}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\right|+\frac{1}{2(\lambda+\lambda_1)}\int_D\left[\sum_{i=1}^{N}d_i(q_i^*)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}\tag{53}$$

故有 $E^* \to 0$。由此再根据前面 $B$ 与 $H$ 的表达式，可知 $B \to 0$, $H^* \to 0$。注意到（20）、（32）与（22）式，知道 $E(0) \to 0$, 结合（6）式和不等式 $-A(0) \leqslant \frac{1}{2}\int_D \left[\sum_{i=1}^{N} d_i C_{2i}(q_{0i})^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得到 $A(0) \to 0$。综上所证，可知 $H \to 0$, $\xi_+ \to 0$。因此，由（42）式知 $E(t)$ 与 $Z(t)$ 关于时间 $t$ 一致趋于零。

此外，从文献[11]的讨论，知道（36）式给出的矩阵 $M$ 的最小特征值 $k$ 满足

$$k \geqslant \tilde{k} = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} C_{1i} - \frac{1}{\lambda + \lambda_1}.$$

因此，$(\lambda + \lambda_1)\min_{1 \leqslant i \leqslant N} C_{1i} > 1$ 蕴涵矩阵 $M$ 是正定的，于是有如下判据。

**判据 2**　设定常态 $(\Psi_i, Q_i)$ 满足（4）与（6）式，且 $(\lambda + \lambda_1)\min_{1 \leqslant i \leqslant N} C_{1i} > 1$，则该定常态在定义 1 的 Lyapunov 意义下是广义非线性稳定的。

在一般多层准地转流体运动模式中初值与参数共同扰动情形下，我们建立了对应于 Arnold 第二定理的广义非线性稳定性判据。由于初始扰动场仅依赖于初始扰动位势涡度、初始扰动边界速度环量与扰动参数，因此本文的这些判据是仅考虑初值扰动情形所得到的相应非线性稳定性判据的推广[11]。

## 参　考　文　献


1　Arnold, V. I., Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid, *Dokl. Akad. Nauk. USSR.*, 1965, **162**, 975～978.

2　Arnold, V. I., On an a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability, *Izv. Uchebn. Zaved. Matematika*, 1966, **54**, 3～5.

3　穆穆，大气运动非线性不稳定性研究的若干新进展，大气科学，1995, **19**, 494～509.

4　Mu Mu, T. G. Shepherd, On Arnold's second nonlinear stability theorem for two-dimensional quasi-geostrophic flow, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1994, **75**, 21～37.

5　宋士吉、刘秦玉，二维准地转基本流的扰动发展与非线性稳定性，科学通报，1999, **44**, 597～603.

6　穆穆，多层准地转流体运动的稳定性，中国科学，B辑，1991, **8**, 888～897.

7　Mu Mu, Zeng Qingcun, Shepherd, T. G. and Liu Yongming, Nonlinear stability of multilayer quasi-geostrophic motions, *J. Fluid Mech.*, 1994, **264**, 165～184.

8　Mu Mu and Xiang Jie, On the evolution of finite-amplitude disturbance to the barotropic and baroclinic quasigeostrophic flows, *Advances in Atmospheric Sciences*, 1998, **15**, 113～123.

9　Ripa, P., Wave energy-momentum and pseudo energy-momentum conservation for the layered quasi-geostrophic instability problem, *J. Fluid Mech.*, 1992, **235**, 379～398.

10　宋士吉，刘秦玉，多层准地转基本流的扰动发展与非线性稳定性，中国科学，D辑，1999, **29**, 163～174.

11　Liu Yongming and Mu Mu, Arnold's second nonlinear stability theorem for general multilayer quasi-geostrophic motions, *Adv. Atmos. Sci.*, 1994, **11**, 36～42.

12　Shepherd, T. G., Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part I: The two-layer model, *J. Atmos. Sci.*, 1989, **45**, 2104～2025.

13　Shepherd, T. G., Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part II: The Continuously-stratified fluid, *J. Atmos. Sci.*, 1989, **46**, 888～907.

14　Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, New York: Springer-Verlag, 1979.

# Disturbance Evolution and Nonlinear Stability for a General Multilayer Quasi–Geostrophic Model

Song Shiji

(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210096)

Liu Jiaqi

(*Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001)

Liu Qinyu

(*Institute of Physical Oceanography, Ocean University of Qingdao, Qingdao* 266003)

**Abstract** The status of disturbance of both initial values and parameters in the model is investigated, and the exact estimations of the disturbance energy and disturbance potential enstrophy are given, when the initial disturbance fields depend only on the initial disturbance enstrophy, initial disturbance velocity circulation along the boundary, and the disturbance parameters. And based on the concept of generalized nonlinear stability in the sense of Lyapunov, the nonlinear stability criteria paralleling to Arnold's second theorem are obtained. The results of this paper generalize the findings, in which only the initial value disturbances are considered.

**Key words:** quasi–geostrophic motion; disturbances of both initial values and parameters; nonlinear stability