

里查森数对 α 中尺度涡旋波不稳定的影响^{*}

张立凤 王丽琼 张 铭

(解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

P4 A

摘 要 作者讨论了里查森数对 α 中尺度涡旋波不稳定的影响。结果表明: α 中尺度涡旋波的失稳与里查森数有很大关系; 当里查森数不太大时, 才存在 α 中尺度涡旋波的不稳定; 里查森数越小, 越容易出现斜交型不稳定, 且斜交型不稳定扰动的波长越短。此时在 α 中尺度波段以斜交型不稳定占优; 在弱稳定层结下, 更有利于出现 α 中尺度涡旋波的不稳定, 而大的风切变仅有利于该不稳定增长率的增大。

关键词: 不稳定; α 中尺度; 里查森数

1 引言

斜压大气中扰动能否发展与环境场的垂直风切变和层结稳定度有密切关系, 而综合反映这两点的一个无量纲参数是里查森数 Ri , 故扰动能否发展与 Ri 有密切的关系。Stone^[1] 曾讨论过 Ri 与斜压大气中不稳定的关系, 指出 $Ri < 0.95$ 时有斜压不稳定, $0.25 < Ri < 0.95$ 时有对称不稳定, $Ri < 0.25$ 时有 Kelvin-Helmholtz 不稳定。高守亭等^[2] 也用 Ri 讨论了中尺度扰动的不稳定问题。张颖和张铭^[3] 在对横波不稳定的数值研究中指出 Ri 越小, 不稳定增长越快, 且增长率越大的波动其波长就越短。Tokio^[4] 在对非地转非静力斜压流的稳定性研究中, 还讨论了因风切变或层结稳定度变化而引起 Ri 变化时, 其对不稳定的影响。指出不稳定最大增长率随 Ri 的减小而增大, 当风切变不变, 层结稳定度减小时, 最不稳定扰动的波长变短; 而当层结稳定度不变, 垂直风场加大时, Eady 模态的不稳定波长变大。

在大部分文献中, 研究者往往把基本气流理想化为纬向西风, 而这同实际大气有一定差距。在研究梅雨锋暴雨时发现, 其中的雨带大多与基流有一定的夹角^[5]。张立凤、王丽琼和张铭^[6] 研究了基流不是纬向西风, 即基流与扰动的传播方向有一夹角 α 时的不稳定, 并定义其为斜交型不稳定; 并在 Ri 较小时 ($Ri = 0.625$), 得到了其结构和性质, 即在 α 中尺度波段上它是一种非地转涡旋波的不稳定。但那里仅给出了 Ri 较小的情况。田生春等^[7] 在分析北京暴雨高度以下的 Ri 时, 发现临近暴雨前很多个例有 $Ri > 5$ 。这说明对暴雨这样的中尺度系统, 也有 Ri 不是太小的情况出现。为揭示不同 Ri 对 α 中尺度不稳定影响, 本文在文献[6]的基础上, 着重计算了各种 Ri 下最大不稳定增长率随其波长和夹角 α 的分布情况, 进一步讨论了斜交型不稳定的条件及该不稳定的性质。

2000-08-01 收到, 2001-07-19 收到再改稿

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目 G1998040907 和国家自然科学基金资助项目 49875008 共同资助

2 计算方案和结果

与文献[6]相同, 采用线性化、无粘、绝热的 Boussinesq 方程组, 假定扰动在 y 方向是均匀的, 而基本气流 $\bar{U}$ 仅为高度 z 的线性函数, 其与扰动传播方向 (x 方向) 有一个夹角 α , 则有: $\bar{u} = \bar{U} \cos \alpha$, $\bar{v} = \bar{U} \sin \alpha$ 。设波解后并考虑上下刚壁边条件则可将该小扰动的不稳定问题转化为复变系数常微分方程组的特征值问题, 然后可用数值方法将该问题归结为一个复矩阵的特征值问题求解。分析其特征值可得扰动的增长率、相速和谱点分布, 分析其特征向量则可得到扰动的结构。除层结参数 N^2 和垂直风切变 $\bar{U}_z$ 的取值变化外, 这里其他参数取值均不变, 取地转参数 $f = 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 垂直方向的高度为 $H = 10 \text{ km}$, 且将其分为 20 层 (层间距 $\Delta z = 0.5 \text{ km}$), 设在地面 ($z = 0$) 处取风速为 0, 而模式顶 ($z = 10 \text{ km}$) 处风速由垂直风切变 $\bar{U}_z$ 的取值来决定。为避免重复, 在此略去了有关的公式和细节 (参阅文献[6])。若存在不稳定, 正如文献[6]所指出的: 当 $\bar{u} = 0$, $\bar{v} \neq 0$ 时, 即夹角 $\alpha = 90^\circ, 270^\circ$ 时, 则为对称不稳定; 当 $\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} = 0$ 时, 即 $\alpha = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ 时, 则为横波型不稳定, 其包括天气尺度的斜压不稳定和中尺度的横波不稳定; 当 $\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} \neq 0$ 时, 则可称之为斜交型不稳定。

在以下的计算中, 层结参数的取值范围为 $1 \times 10^{-5} \sim 8 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$, 这里取的层结参数较其典型值 $1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ 要弱, 这是由于在实际大气风切变的范围内, 取典型值时通常已无中尺度不稳定发生, 故讨论该不稳定问题时层结须取的较弱。在该计算中垂直风切变 $\bar{U}_z$ 的取值范围为 $2 \times 10^{-3} \sim 4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, 即地面 ($z = 0$) 处风速取为 0, 模式顶 ($z = 10 \text{ km}$) 处风速取为 $20 \sim 40 \text{ m s}^{-1}$ 。该风速范围也在实际大气的范围中。

Stone^[1]曾指出 $Ri < 0.95$ 会出现对称不稳定。从我们的计算结果看, $Ri = 0.95$ 确是能出现对称不稳定的分界, 且最不稳定增长率随波长和夹角 α 的分布形式也以此为界分成两种情况, 下面给出这两种情况的计算结果。

2.1 里查森数大于 0.95 的情况

在 $Ri > 0.95$ 时, 计算结果不出现对称不稳定, 占优势的是天气尺度横波型扰动的不稳定 ($\alpha = 0^\circ$ 或 $\alpha = 180^\circ$), 即通常的斜压不稳定。

首先给出 Ri 大的情况。图 1 是 $Ri = 20$ 的计算结果 (此时 $\bar{U}_z = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $N^2 = 8 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$), 由图可见, 此时存在两个不稳定增长率的大值中心, 一个在波长小于 200 km 的 β 中尺度范围内 (另文讨论); 另一个在 $\alpha = 0^\circ$, 波长 $L = 3500 \text{ km}$ 处, 这是天气尺度横波型扰动的不稳定, 即通常的斜压不稳定。该不稳定在 $L = 2300 \text{ km}$ 处有短波截断, 即 $L < 2300 \text{ km}$ 的扰动都是稳定的。值得注意的是该短波截断波长与夹角 α 无关, 此时斜交型不稳定不占优势。

其次给出 $Ri = 2.5$ 时的情况 (此时 $\bar{U}_z = 4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $N^2 = 4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$, 见图 2)。与图 1 比较相同的是, 图 2 中也存在两个不稳定增长率大值中心, 一个在 β 中尺度波段 (拟另文讨论), 另一个也在 $\alpha = 0^\circ$ 的天气尺度波段上。与图 1 比较不同的是, 图 2 在天气尺度波段横波型不稳定的短波截断一侧, 不稳定增长率的等值线有两个“尖角”, 其从 $\alpha = 0^\circ$, $L = 2800 \text{ km}$ 的增长率最大值中心伸向 $\alpha = \pm 90^\circ$ 处, 即伸展出了两条关于 $\alpha = 0^\circ$ 对称的不稳定增长率的大值带。此时对某一固定波长的扰动, 其不稳定增长率的

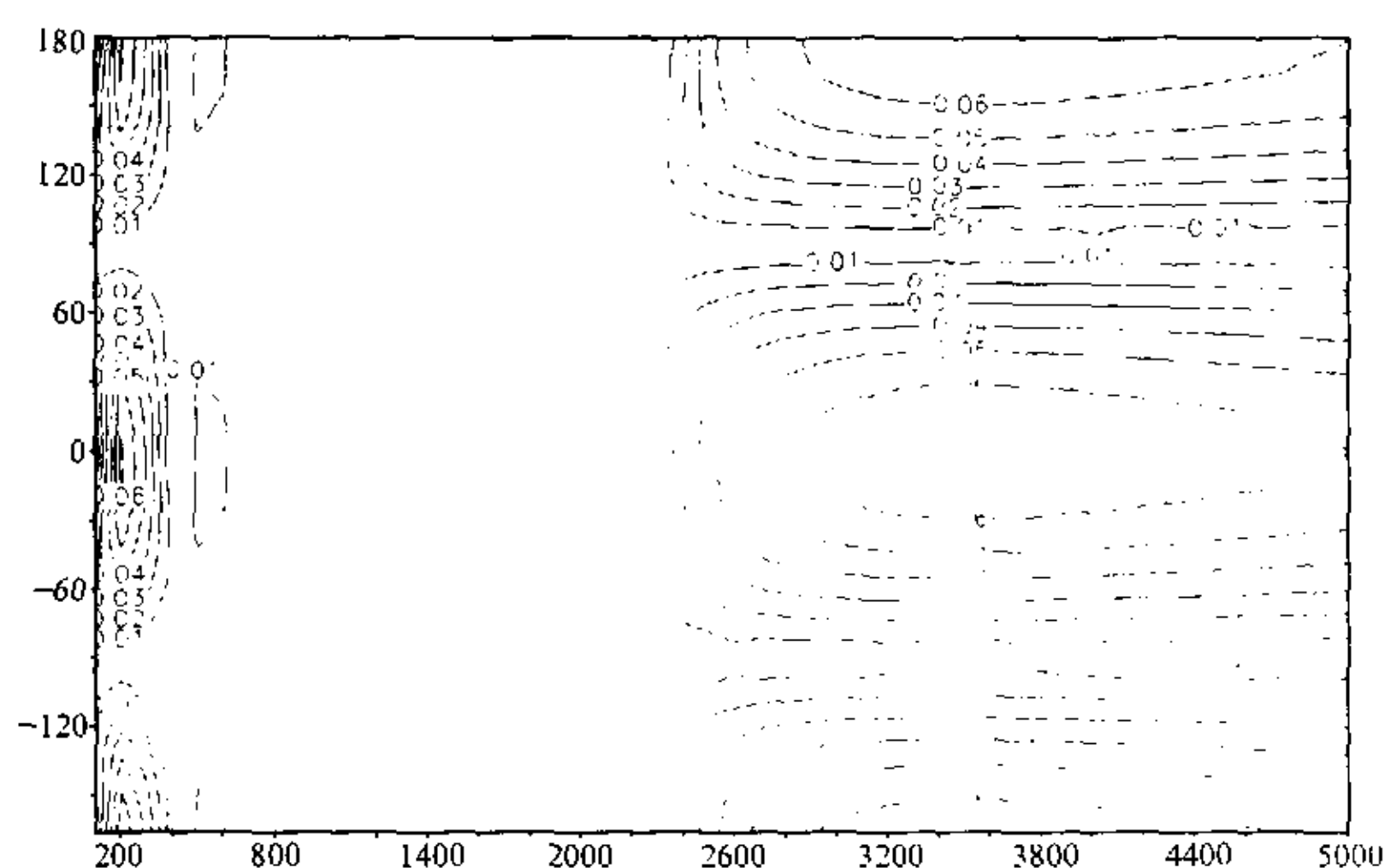


图1 $Ri=20$ 时最大不稳定增长率随波长和 α 角的变化
横坐标为扰动波长, 单位: km; 纵坐标为基流与扰动传播方向的夹角 α , 单位: ($^{\circ}$)

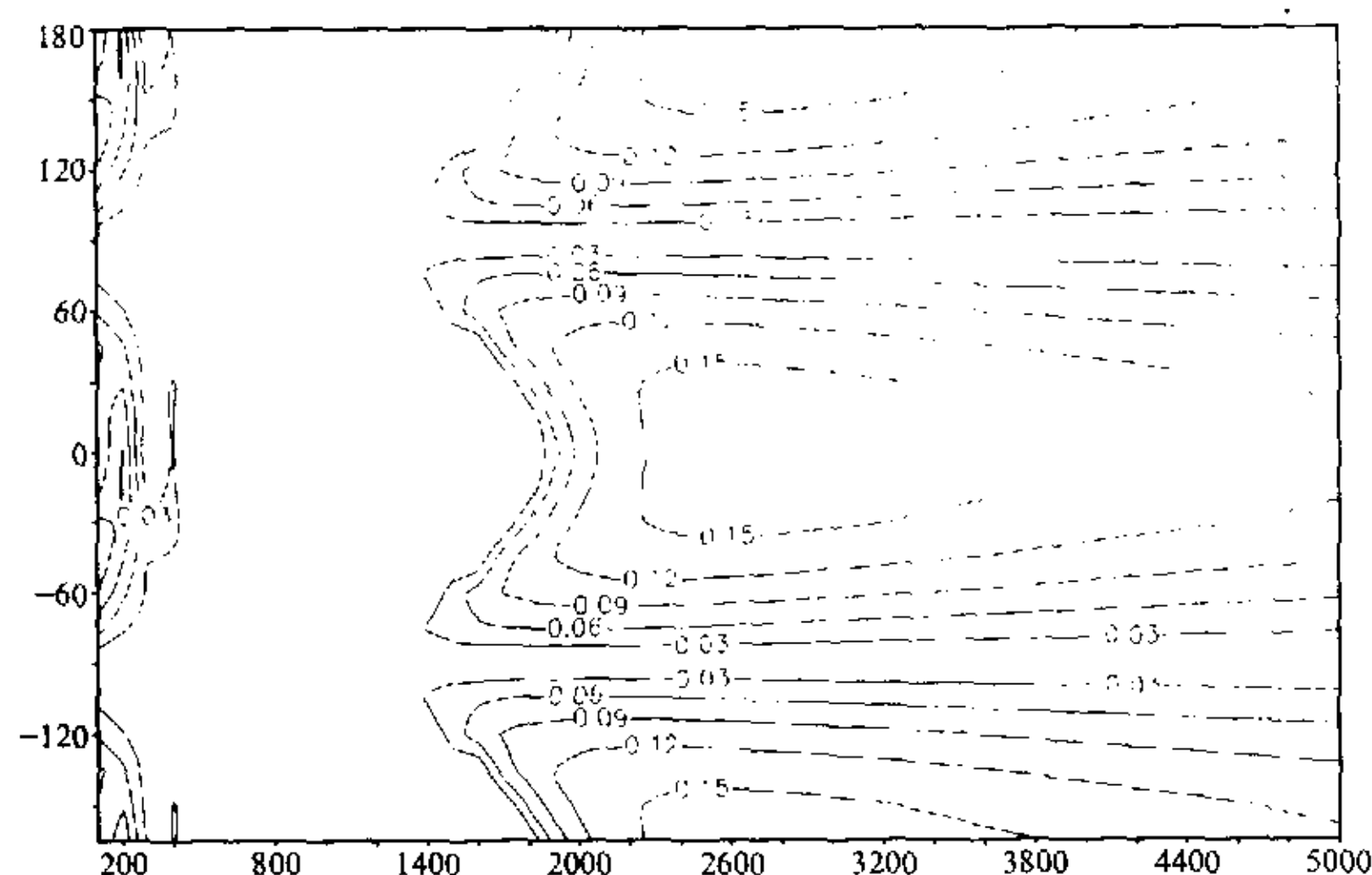


图2 $Ri=2.5$ 时最大不稳定增长率随波长和 α 角的变化, 其余同图1

大小与夹角 α 有关; 对不同波长则增长率最大值对应的夹角 α 不同。这两条不稳定增长率大值带的出现表明, 对波长小于 2 200 km 的扰动, 增长最大的不再是 $\alpha=0^{\circ}$ 处的横波型扰动, 而是 $\alpha \neq 0^{\circ}$ 处的斜交型扰动, 即此时以斜交型不稳定占优。特别是波长在 $1\,400\text{ km} < L < 1\,900\text{ km}$ 内的扰动, 其横波型扰动是稳定的, 而斜交型扰动则是不稳定的。但此时无论是横波型还是斜交型的不稳定, 因其水平尺度在天气尺度范围内, 故均属于斜压波的准地转不稳定。若 Ri 再小, 这两条不稳定增长率大值带向短波方向将延伸得更远, 其可伸展到 α 中尺度波段, 此时则出现了 α 中尺度扰动的斜交型不稳定。

最后给出 $Ri=1$ 时的情况 (此时 $\overline{U_z}=4 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$, $N^2=16 \times 10^{-5}\text{ s}^{-2}$, 见图3)。由图3可见, 该不稳定增长率的大值带沿 $\alpha \approx 0^{\circ}$ 到 $\alpha = \pm 90^{\circ}$ 的通道向较短波长方向伸展到 500 km 处, 此时 $600\text{ km} < L < 1\,300\text{ km}$ 的 α 中尺度扰动其不稳定均为斜交型不稳

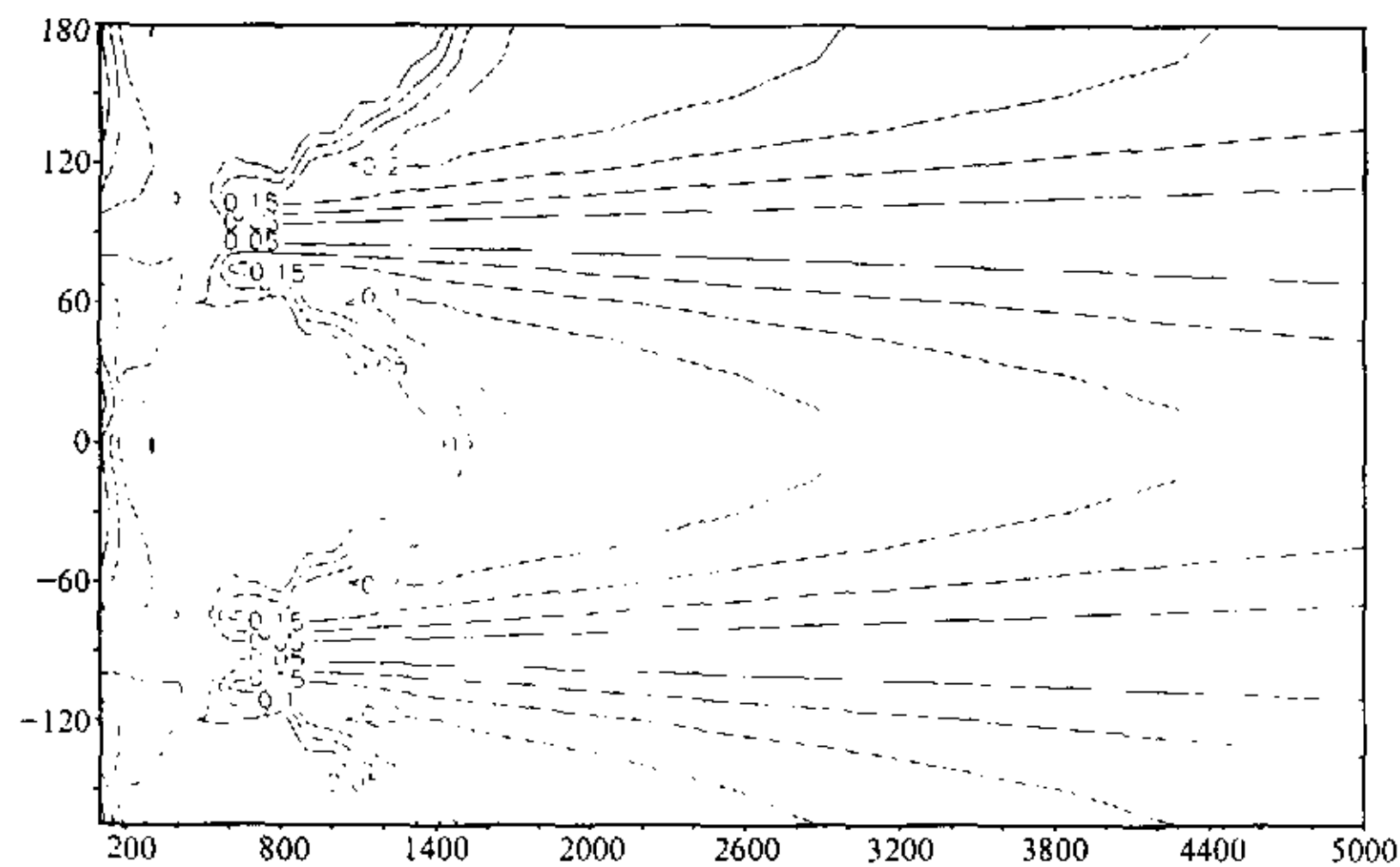


图3 $Ri=1$ 时最大不稳定增长率随波长和 α 角的变化, 其余同图1

定, 但不稳定增长率的大值中心仍在 $\alpha=0^\circ$ 处。

2.2 里查森数小于 0.95 的情况

按照 Stone 的理论^[1], 当 $Ri < 0.95$ 时会出现对称不稳定。我们的计算结果的确表明, 此时不稳定增长率随波长和夹角 α 的分布形式与前面不同, 即在 $\alpha = \pm 90^\circ$ 处出现了对称不稳定区。图4给出了 $Ri=0.9$ 时最大不稳定增长率随波长和夹角 α 的分布情况 (此时 $\bar{U}_z = 4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $N^2 = 1.44 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$)。由图4可见, 在 $\alpha = \pm 90^\circ$ 波长小于 250 km 处出现了对称不稳定区域, 其不稳定增长率的大值中心在波长小于 200 km 的 β 中尺度波段。此时在 α 中尺度波段上在 $\alpha=0^\circ$ 处存在有不稳定的大值中心, 且其大值区关于 $\alpha=0^\circ$ 对称并从 $\alpha=0^\circ$ 向 $\alpha = \pm 90^\circ$ 的短波方向延伸, 也形成一对不稳定增长率的大值带。该值带即是斜交型不稳定带, 其与对称不稳定的分界波长大约是 250 km。应特别注意在 $400 \text{ km} < L < 1400 \text{ km}$ 的 α 中尺度波段内, 横波型扰动和对称型扰动都是

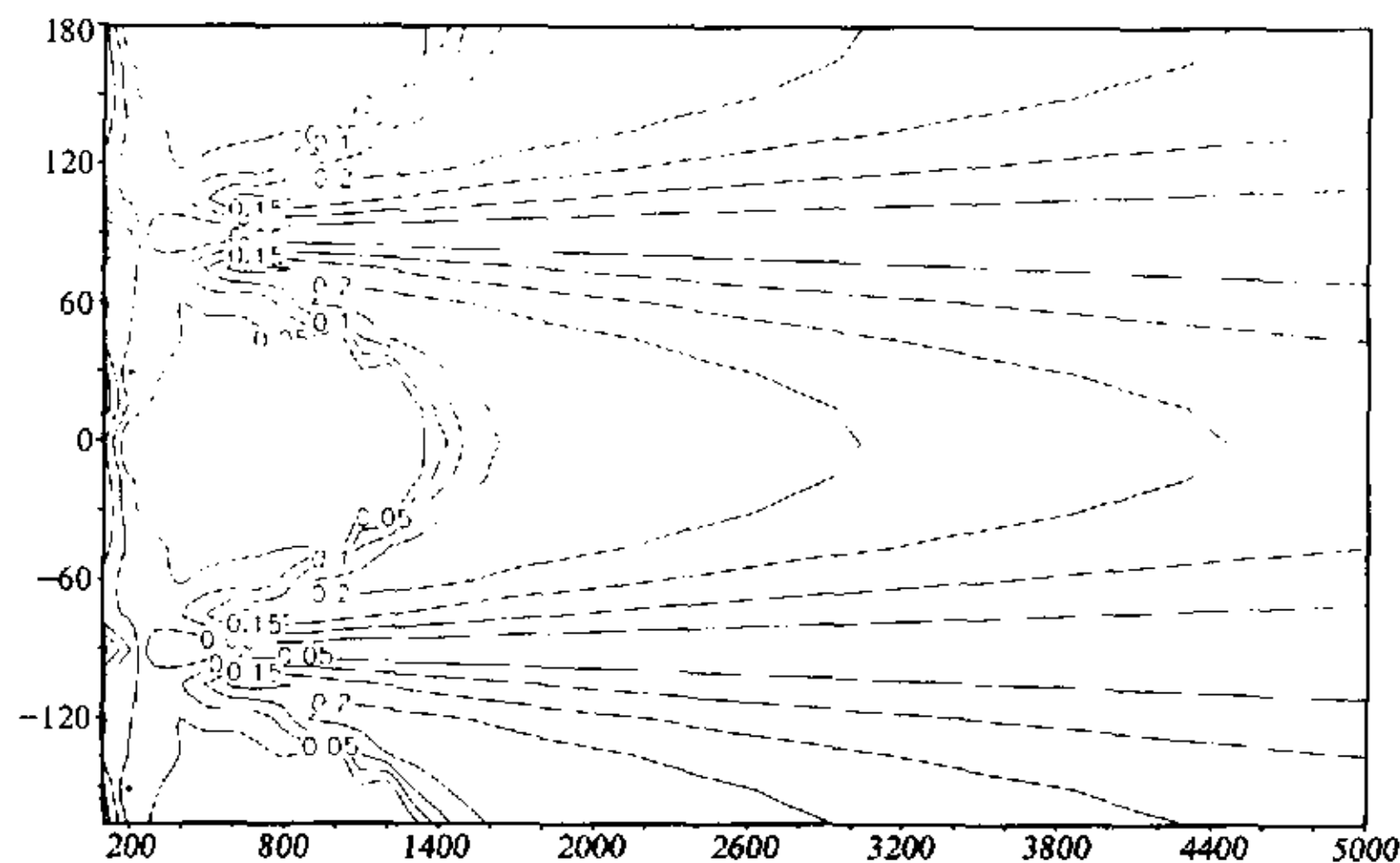


图4 $Ri=0.9$ 时最大不稳定增长率随波长和 α 角的变化, 其余同图1

稳定的, 仅斜交型扰动出现不稳定。当 Ri 再减小时, 对称不稳定扰动的长波截断波长增大, 从 $\alpha=0^\circ$ 向 $\alpha=\pm 90^\circ$ 伸展的两条斜交型不稳定带更窄, 且向较短波长方向伸展得更远。与前面 $Ri>0.95$ 时最大的不同是, 当 Ri 较小时, 增长率大值中心不是出现在 $\alpha=0^\circ$ 的横波型扰动上, 而是出现在 $\alpha\neq 0^\circ$ 的斜交型扰动上, 例如当 $Ri=0.625$ 时 (此时 $\bar{U}_z=4\times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$, $N^2=1\times 10^{-5}\text{ s}^{-2}$, 见图 5)。这时除在波长 $L<200\text{ km}$ 处有对称不稳定中心外, 另一个斜交型不稳定的大值中心出现在 $\alpha=75^\circ$, $L=500\text{ km}$ 处, 此时对称不稳定与斜交型不稳定的分界波长大约为 400 km 。

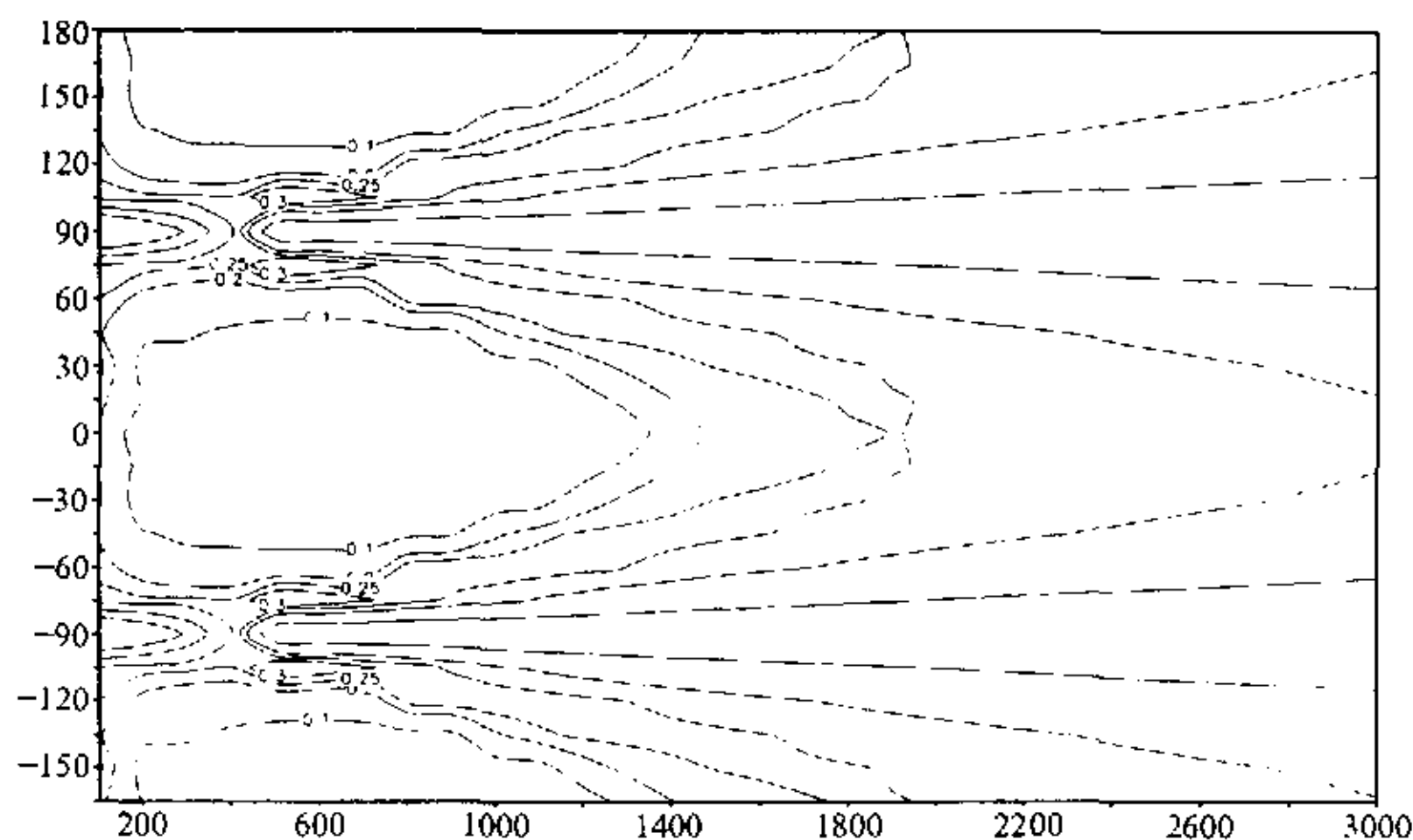


图 5 $Ri=0.625$ 时最大不稳定增长率随波长和 α 角的变化, 其余同图 1

2.3 讨论

为揭示 α 中尺度不稳定性与 Ri 的关系, 本文还对不同的 Ri 做了大量计算。结果表明, 当 $Ri>0.95$ 时, 不出现对称不稳定, 不稳定增长率分布的共同特点是有一增长率的大值中心出现在天气或次天气尺度的横波型扰动上。当 $Ri>10$ 时, 以天气尺度的横波型扰动的准地转斜压不稳定占优。当 $5<Ri<10$ 时, 除在 $\alpha=0^\circ$ 处的横波型扰动有增长率大值中心外, 由该处向 $\alpha=\pm 90^\circ$ 的短波方向可延伸出两条不稳定增长率的大值带。这表明在横波型扰动不稳定的短波截断处, 有斜交型不稳定出现, 在上述大值带的范围内, 以斜交型不稳定占优, 且总存在小于该横波型不稳定扰动波长的斜交型不稳定扰动。随着 Ri 进一步减小, 该横波型不稳定的大值中心向短波方向移动, 上述两条不稳定增长率的大值带也向短波方向延伸得更远, 即斜交型不稳定区域也向短波方向伸展, 此时横波型不稳定和斜交型不稳定的尺度都在减小。当 $Ri<5$ 时, 在中尺度波段扰动出现了占优的斜交型不稳定, 而该处横波型扰动却是稳定的。

当 $Ri<0.95$ 时, 除存在对称不稳定外, 在 α 中尺度波段从 $\alpha=0^\circ$ 向 $\alpha=\pm 90^\circ$ 伸展的两条增长率大值带向短波方向延伸得更远, 且在该大值带上仍以斜交型不稳定占优。此时随着 Ri 的减小, 不稳定大值中心不再出现在 $\alpha=0^\circ$ 的横波型扰动上, 而是出现在 $\alpha\neq 0^\circ$ 斜交型扰动上。此时对称不稳定的长波截断波长增大, 对称不稳定与斜交型不稳定的分界波长也增大。故在 Ri 不大的环境下, α 中尺度扰动的发生发展主要由斜交型不稳定激发。

从斜交型不稳定扰动随 Ri 的变化来看 (参见图 1~5), 其与天气尺度斜压不稳定扰动是同源的, 故其性质应是涡旋波的不稳定。注意到扰动的性质还应与扰动的水平尺度有关, 对波长较长的 α 中尺度扰动 (水平波长在 1 000 km 以上) 其不稳定是准地转涡旋波的不稳定; 对波长较短的 α 中尺度扰动, (水平波长为数百公里) 其不稳定是非地转涡旋波的不稳定, 这点从其对应的 Rossby 数 Ro 也可看出。

上述结果还表明, 对水平尺度在 800 km 以上的扰动, 随着其水平尺度的增加, 其最不稳定扰动的传播方向与基流的夹角 (指绝对值) 则在减小, 即该扰动的等位相线与基流的夹角 (指绝对值) 在增大, 最终变成垂直。这也许可解释实际天气中短波的槽脊线较倾斜而长波的槽脊线较垂直的观测事实。

Ri 的大小决定于风的垂直切变和层结稳定度两个因子, 下面分别讨论这两个因子的作用, 即当风的垂直切变固定而层结稳定度减小引起 Ri 变小, 和层结稳定度固定由垂直风切变增大引起 Ri 变小时, 其对不稳定的影响。

当风的垂直切变取 $4 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 不变时, 对层结稳定度 N^2 取不同的值作了计算后发现, 随 N^2 的减小, Ri 减小, 上述横波型扰动处的不稳定大值中心向短波方向移动, 且不稳定增长率增大, 此时由该大值中心伸出的两条增长率大值带也向短波方向伸展得更远, 并可在 α 中尺度波段出现不稳定。当 N^2 减小使 Ri 小于 1 时, 最不稳定大值中心会出现在 $\alpha \neq 0^\circ$ 的 α 中尺度斜交型扰动处 (参见图 2 和图 4)。

当 N^2 不变取为 $4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$, 而垂直风切变增大引起 Ri 减小时, $\alpha = 0^\circ$ 处上述横波型不稳定增长率大值中心的位置几乎不变, 此时最明显的变化是, 随 Ri 的减小, 该中心值增大, 且有利于在该横波不稳定的短波截断处产生斜交型不稳定 (参见图 6 和图 2)。

由此可见, 当风的垂直切变增大引起 Ri 变小时, 基本不影响上述横波型不稳定大值中心的位置, 即不影响该最不稳定扰动波长; 而由层结稳定度的变小引起 Ri 变小时, 不仅影响该不稳定增长率的大小, 而且影响该最不稳定扰动的尺度。随层结稳定度的减小, 该不稳定增长率大值中心向短波方向移动, 且占优势的斜交型不稳定也向

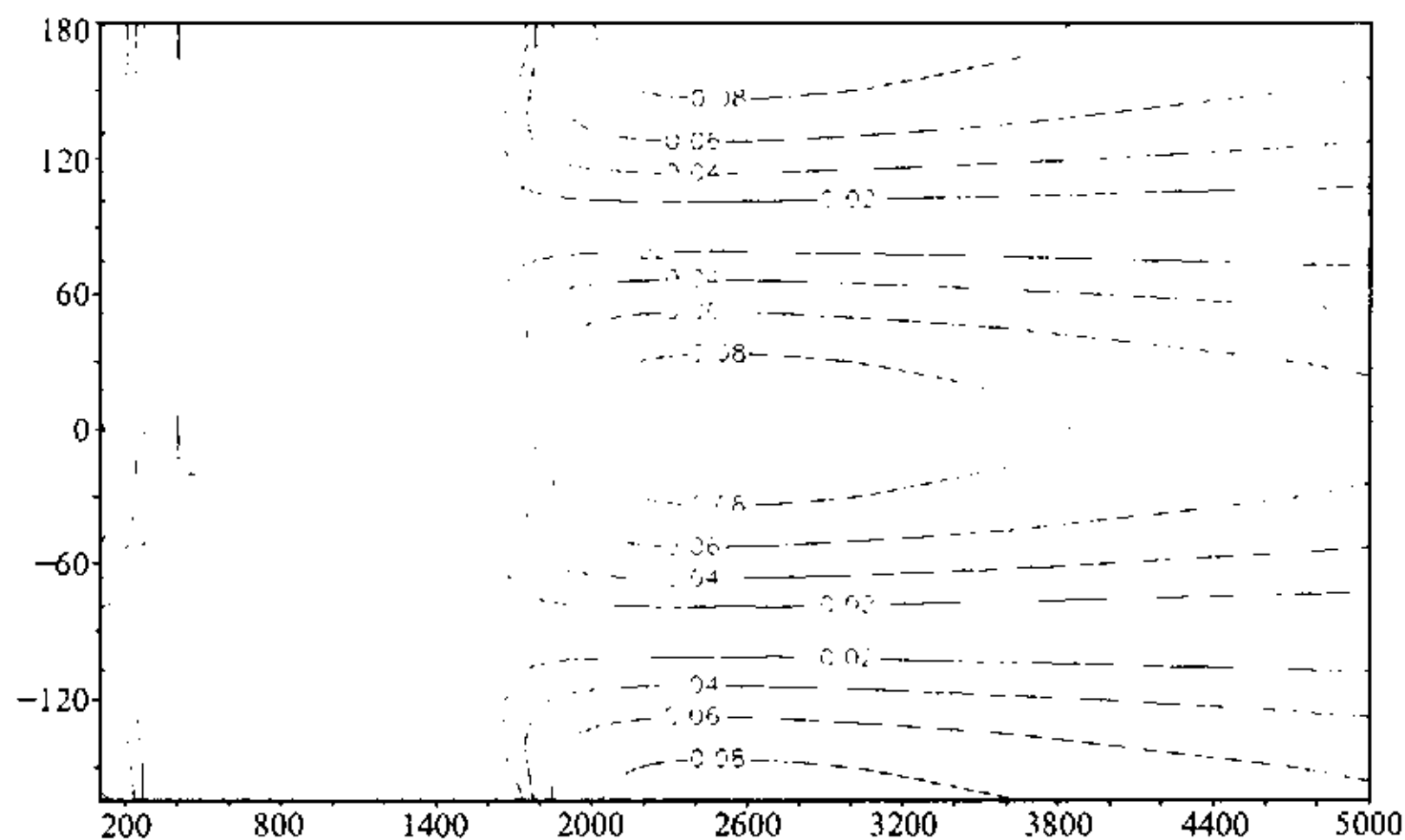


图 6 $Ri = 10$ 时最大不稳定增长率随波长和 α 角的变化, 其余同图 1
($\overline{U_z} = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $N^2 = 4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-2}$)

短波方向延伸得更远, 故弱的稳定层结更有利于 α 中尺度不稳定的出现。

3 结语

本文分析了里查森数 Ri 对 α 中尺度涡旋波不稳定的影响, 得到了以下主要结论:

(1) α 中尺度涡旋波的失稳与 Ri 有很大关系, 当 Ri 不很大时, 方才出现 α 中尺度涡旋波的不稳定。

(2) Ri 越小, 越容易出现 α 中尺度涡旋波的不稳定, 且不稳定扰动的波长越短。此时在 α 中尺度波段斜交型不稳定占优。

(3) 在弱稳定层结下, 更有利于出现 α 中尺度涡旋波的不稳定, 而大的风切变仅有利于该不稳定增长率的增大。

以上结果都是在基流为线性切变, 层结稳定度为常数时得到的。对于非线性垂直风切变及非均匀层结时的情况还有待于进一步研究, 特别是对 β 中尺度扰动的性质及其与 Ri 的关系还应做深入的工作, 而这些都是我们今后研究工作的方向。

参 考 文 献

- 1 Stone, P. H., On non-geostrophic baroclinic stability, *J. Atom. Sci.*, 1966, **23**, 390~400.
- 2 高守亭, 孙淑清, 应用里查逊数判别中尺度波动的不稳定, *大气科学*, 1986, **10**, 171~182.
- 3 张颖, 张铭, 线性和非线性横波型不稳定的数值研究, *气象学报*, 1998, **56**, 447~457.
- 4 Tatsushi Tokioka, Non-geostrophic and non-hydrostatic instability of a baroclinic fluid, *J. Meteor. Soc. Japan*, 1970, **48**, 503~520.
- 5 许秀, 王鹏云, 冷锋前部中尺度雨带特征及其机制分析, *气象学报*, 1989, **47**, 199~206.
- 6 张立凤, 王丽琼, 张铭, 垂直切变基流中非地转涡旋波的不稳定, *大气科学*, 2001, **25**, 391~400.
- 7 出生春, 杜长萱, 北京地区暴雨时各层温、湿、风的统计特征, *大气科学*, 1983, **7**(1), 68~77.

Influences of Richardson Number on the Instability of Meso- α Scale Vortex Wave

Zhang Lifeng, Wang Liqiong and Zhang Ming

(Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101)

Abstract The influences of Richardson number Ri on the instability of meso- α scale vortex wave is discussed. The results are as follows. There is close relationship between Ri and the destabilization of meso- α scale vortex wave. The instability of meso- α scale vortex wave appears only when Ri is not large. The smaller Ri is, the easier the appearance of heterotropic instability is and the shorter it's wavelength is, temporality the heterotropic instability is ascendent in meso- α scale waveband. The condition of weak stable stratification is advantageous to instability of meso- α scale vortex wave, but the augment of wind shear is only advantageous to the increase of the unstable growth rate.

Key words: instability; meso- α scale; Richardson number