

利用变分法计算西北典型干旱区 地表通量的研究^{*}

任宏利¹⁾ 王澄海¹⁾ 邱崇践¹⁾ 董文杰²⁾

1) (兰州大学资源环境学院大气科学系, 兰州 730000)

2) (中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

摘 要 利用 2000 年 5~6 月在敦煌进行的陆面过程野外观测试验加强期的观测资料, 采用变分法计算了西北干旱区荒漠戈壁的地表感热通量和潜热通量, 并与 Bowen 比能量平衡方法 (简称 BREB 法) 的结果进行了对比。结果表明: 变分法由于同时应用了地表能量平衡方程和相似性廓线方程, 充分利用了边界层观测资料的信息, 避免了 BREB 法中出现在 Bowen 比接近于 -1 时产生的计算不稳定和虚假的峰值, 使计算的通量结果更趋合理和稳定。同时也计算了动量和感热的总体输送系数, 与已有结果比较表明也具有合理性。

关键词: 变分法; Bowen 比; 感热; 潜热; 输送系数

文章编号 1006-9895 (2004) 02-0269-09 **中图分类号** P463 **文献标识码** A

1 引言

陆地和大气之间的动量和热量交换在全球大气环流和气候变化中起着重要作用, 同时也是各种尺度大气数值模式物理框架中极为关键的过程, 因此动量、感热和潜热通量的描述和计算就显得尤为重要^[1,2]。目前, 大尺度数值模式中对地表通量的计算大多是采用总体输送法 (或曳力系数法)^[3]来实现, 这种方法的关键是确定总体输送系数。现在大多数数值模式中所使用的总体输送系数还比较粗糙, 特别是在西北干旱地区, 由于资料稀少和研究的不足, 导致模式中该地区格点上总体输送系数的给定更是比较随意^[3]。另外, 总体输送系数的误差总是以等同的相对值传递到计算的地表通量上, 而大气数值模式所能容忍的地表通量误差程度极其有限, 所以总体输送系数的研究是目前模式中所迫切需要的^[4]。另一方面, 一般通过通量的观测计算出总体输送系数, 地表湍流通量的计算方法较多, 涡旋相关法是较为简单、相对精确的一种方法, 它直接应用超声仪观测的瞬时高频风、温值, 但对资料要求较高。空气动力学法是用两层以上风、温平均量的梯度资料来间接计算湍流通量^[5], 它依赖于半经验的 Monin-Obukhov 相似性函数, 但一般具有较大的不一致性^[6]。胡隐樵等^[7]发展的组合法是由风、温、湿梯度资料、地表辐射分量资料和地热流量资料联合计算地表湍流通量的间接方法, 它虽避开了 Monin-Obukhov 相似性函数, 但同样要求较高质量的梯度资料,

2002-08-26 收到, 2003-01-28 收到修改稿

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目 G1999043408、中国科学院创新课题 KZCX2-301 和中国科学院知识创新工程重要方向项目 KZ-SW-02 共同资助

并且对动量通量的计算在理论上还不够完善。

目前，在通量计算方面应用较为广泛的方法是 Bowen 比能量平衡方法^[8]（简称 BREB 法），这种方法通过定义 Bowen 比，综合使用了边界层中的观测资料和地表能量平衡方程的信息，且应用较为简便，但该方法的缺陷也是明显的，当 Bowen 比接近于 -1 时，计算通量会变得不稳定，产生的剧烈振荡和虚假的峰值，它虽然是基于 Monin-Obukhov 相似性理论导出，但却没有充分利用相似性理论廓线方程的信息，变分方法的提出有效地解决了这些问题^[9]。变分法的基本思想是在综合利用各种有效信息的前提下，寻求某种控制变量的最优估计，在这里有效信息即指边界层观测资料、Monin-Obukhov 相似性理论和地表能量平衡方程。本文将变分法应用于西北干旱区荒漠戈壁地表湍流通量的计算，并与传统方法（BREB 方法）进行比较，探讨在典型干旱区通量计算中变分法对 BREB 的改进。

2 资料介绍

本文分析的资料是 2000 年 5~6 月在敦煌进行的陆面过程野外观测试验加强期的观测资料。该站位于 (40°10'N, 94°31'E)，海拔高度为 1150 m，年降水约为 40 mm，属于典型干旱区。微气象站位于敦煌绿洲西侧的戈壁滩上，观测场地为平坦的沙石戈壁（表面有较多石子，下面主要以细沙为主）。铁塔上观测的风、温、湿资料的高度有 2 m、4 m、8 m、18 m，土壤热流量的观测深度在 2.5 cm 和 7.5 cm；地表辐射分量观测有直接辐射、总辐射、反射辐射、大气向下长波辐射和地表向上长波辐射，此外还有地表温度观测等。有关资料的详细情况见文献 [4]。

3 计算方法

按照 Monin-Obukhov 相似性理论^[10,11]，边界层中湍流运动的风速、位温和比湿的垂直廓线可以描述为下面的方程组形式：

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m\left(\frac{z}{L}\right) + \Psi_m\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \tag{1}$$

$$\Delta\theta = \theta(z_2) - \theta(z_1) = \frac{\theta_*}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right) - \Psi_h\left(\frac{z_2}{L}\right) + \Psi_h\left(\frac{z_1}{L}\right) \right], \tag{2}$$

$$\Delta q = q(z_2) - q(z_1) = \frac{q_*}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right) - \Psi_q\left(\frac{z_2}{L}\right) + \Psi_q\left(\frac{z_1}{L}\right) \right], \tag{3}$$

其中， $\kappa \approx 0.4$ 是卡曼常数； z_0 是粗糙度长度； $L = (u_*^2 T) / (\kappa g \theta_*)$ 是 Monin-Obukhov 长度， $T = [\theta(z_1) + \theta(z_2)] / 2$ ； Ψ_m 、 Ψ_h 和 Ψ_q 分别为动量、热量和水汽的无因次稳定度函数； u_* 、 θ_* 和 q_* 分别为摩擦速度、湍流温度尺度和湍流比湿尺度，它们与表面动量通量 τ 、表面感热通量 H 和表面潜热通量 Q 的关系表示为

$$\tau = \rho u_*^2, \tag{4}$$

$$H = -\rho c_p u_* \theta_*, \tag{5}$$

$$Q = -\rho \lambda u_* q_*, \tag{6}$$

其中, ρ 是空气密度; c_p 是大气定压比热系数; λ 是水汽的凝结潜热系数。

稳定度函数 Ψ_m 、 Ψ_h 和 Ψ_q 并没有完全固定的形式, 一般需用实测资料来确定。本文中不稳定层结的情形 ($\theta_* < 0$ 或 $L < 0$) 取如下形式^[12]:

$$\Psi_m = 2 \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) - 2\arctan x + \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

$$\Psi_{h,q} = 2 \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right), \quad (8)$$

$$x = \left(\frac{1-16z}{L}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(1 - \frac{16z\kappa g\theta_*}{Tu_*^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

对于稳定或很稳定层结的情形 ($\theta_* > 0$ 或 $L > 0$) 取如下形式^[13]:

$$-\Psi_m = a \frac{z}{L} + b\left(\frac{z}{L} - \frac{c}{d}\right)\exp\left(-d \frac{z}{L}\right) + \frac{bc}{d}, \quad (9)$$

$$-\Psi_{h,q} = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{az}{L}\right)^{\frac{3}{2}} + b\left(\frac{z}{L} - \frac{c}{d}\right)\exp\left(-d \frac{z}{L}\right) + \frac{bc}{d} - 1. \quad (10)$$

其中 $a=1$, $b=0.667$, $c=5$, $d=0.35$ 。在 (8) 和 (10) 式中, 假设 Ψ_h 和 Ψ_q 相等。

3.1 BREB 方法

Bowen 比能量平衡方法是基于下面的地表能量平衡方程:

$$H + Q = R + G, \quad (11)$$

其中, R 和 G 分别是地表净辐射通量和热流量。通过引入 Bowen 比 $B=H/Q$, (11) 式改写为

$$Q = \frac{R+G}{1+B}. \quad (12)$$

将 (2)、(3) 式代入 (5) 和 (6) 式的比中, 并考虑 Ψ_h 和 Ψ_q 相等的假设, 得到

$$B = \frac{c_p \Delta\theta}{\lambda \Delta q}. \quad (13)$$

由边界层温、湿的多层观测资料容易求出 B , 进而由地表净辐射和热流量资料就可以求出地表感热和潜热通量。由此可见, BREB 法是一种简便实用、稳妥可靠的方法^[8]。但它的缺陷也是很明显的, 当 B 位于 -1 附近时该方法在计算上将变得不稳定, 此时 (12) 式中 $R+G$ 或 B 上的小误差将会引起通量计算的很显著的误差。

3.2 变分方法

尽管 BREB 法基于 Monin-Obukhov 相似性理论导出, 但却没有充分利用 (1)~(10) 式相似性理论的信息。为了充分利用边界层观测资料、Monin-Obukhov 相似性理论和地表能量平衡方程, 并考虑到 (4)~(6) 式的关系, 只要找到 u_* 、 θ_* 和 q_* 的最优估计, 我们就有理由相信找到了 τ 、 H 和 Q 的最优估计。为此, 定义如下目标函数:

$$J = \frac{1}{2} [\omega_u (u - u_{ob})^2 + \omega_\theta (\Delta\theta - \Delta\theta_{ob})^2 + \omega_q (\Delta q - \Delta q_{ob})^2 + \omega_\delta \delta^2], \quad (14)$$

其中, u 、 $\Delta\theta$ 和 Δq 是 (1)~(3) 式表示的 u_* 、 θ_* 和 q_* 的函数; u_{ob} 、 $\Delta\theta_{ob}$ 和 Δq_{ob} 分别是观测的风速、温度差和比湿差; 地表能量平衡方程作为约束条件以下面的形式引入:

$$\delta = R + G - H - Q. \quad (15)$$

这里 R 和 G 由观测值给定, H 和 Q 通过 (5)、(6) 式由 u_* 、 θ_* 和 q_* 计算得到。权重

系数的大小与各观测量的观测误差大致成反比，这里取 $w_u=10\text{ m}^{-2}\text{ s}^2$ ， $w_\theta=100\text{ K}^{-2}$ ， $w_q=10^8\text{ kg kg}^{-1}$ ， $w_r=10^{-4}\text{ W}^{-2}\text{ m}^4$ 。可见， J 是在地表能量平衡方程的约束下，全面衡量了观测值与由 Monin-Obukhov 相似性理论得到的计算值之间的差异，因此，当 J 取到极小点时就给出了 u_* 、 θ_* 和 q_* 的最优估计，此时 J 关于未知变量 u_* 、 θ_* 和 q_* 的梯度分量应为零，

$$\frac{\partial J}{\partial u_*}=\frac{\partial J}{\partial \theta_*}=\frac{\partial J}{\partial q_*}=0.$$

(16)

为了得到极小值，就必须计算出各个梯度分量，这可由 (1) ~ (9) 式解析得到，梯度分量计算的详细步骤参见附录。然后应用拟 Newton 算法迭代求解就可以得到 u_* 、 θ_* 和 q_* 的最优估计，然后通过 (4) ~ (6) 式计算出动量、感热和潜热通量。Xu 和 Qiu^[9]用美国 Oklahoma 的资料对上述方法进行了系统研究，得出了较为有意义的结论。

4 结果分析

4.1 通量的计算和比较

变分法的基本思想是在利用尽可能多的有效资料信息的基础上，给出控制变量的最优估计。因此，我们选取了日变化相对完整的时段——5 月 26、27 日连续两天的逐时资料。地表粗糙度选取了文献 [4] 的结果，取 $z_0=1.85\times10^{-3}$ 。图 1 是采用 BREB 法和变分法计算的感热和潜热通量。

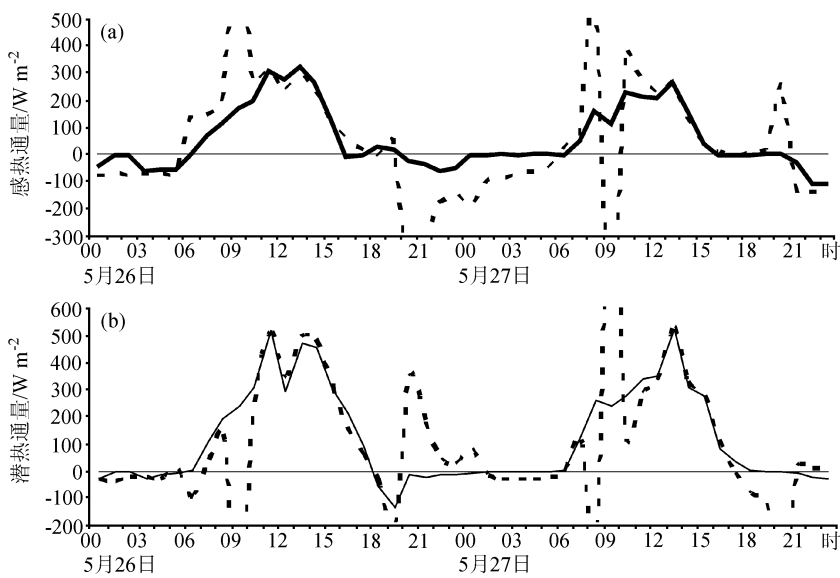


图 1 两种方法计算的通量随时间的变化
(a) 感热；(b) 潜热。实线：变分法结果；虚线：BREB 法结果

从图 1 中可以看出，不论是感热还是潜热通量，两种方法的计算结果在大多数时刻基本接近，变化的趋势也相对一致。白天感热和潜热通量均为正，说明热量向土壤传播，最大值出现在正午前后；而夜间则正相反，热量由土壤传回大气。从图 1 中可

以看出，由变分法计算的感热和潜热通量更能体现出物理量变化的连续性和平稳性；而 BREB 法计算的通量则出现了剧烈的跳动，呈现出虚假的尖峰和谷值。例如，在 26 日 09 时、20 时以及 27 日的 08~10 时、20 时，由于 Bowen 比计算中的 B 接近于 -1 ，导致由 (11) 式计算的潜热通量的数值异常增大（减小），相应得到的感热通量 ($H=QB$) 反向异常减小（增大）。由于 BREB 法直接由地表能量平衡方程计算通量，而变分法中通量的求取也是在地表能量平衡方程的约束下实现的，也就是变分法更好地遵守地表能量平衡方程。所以，我们会看到图 1 中对应时刻虚线的尖峰是围绕着实线近似互补的。

由于在 25 日 10 时前后有少量降水，因此 26~27 日的潜热通量相对较大。个别时次的潜热通量甚至超过了感热通量。已有研究表明，在西北典型干旱区，特别是戈壁荒漠地区，年降水量较小，平均而言地表通量中感热通量占绝对优势，而潜热较小，通常潜热通量与感热输送相比可以忽略。但研究也表明，在春夏季有降水过程发生时，降水强迫对干旱区局地气候的水热输送过程的影响主要通过辐射效应发生作用。作用的结果是使可供分配的地表净辐射大大减少，即降水期间感热通量很小，潜热通量也较小。随着降水的停止，辐射效应的影响也随之减少和停止，可供分配的地表净辐射恢复，但由于降水的发生，土壤湿度增加，土壤热容量变大，从而改变了晴天的地表辐射收支特征，地表潜热通量增加，潜热通量的瞬间最大值可以达到 570 W m^{-2} 以上。而由于吸热，感热通量的增加较慢。潜热通量远远大于感热通量。大约在 4~5 天后，地表已变得干燥，由于不断地蒸发，土壤增湿效应已基本消失，土壤热容量恢复到降水前的状态，地表能量收支已调整到接近一般的晴天状态^[14,15]。

为了进一步比较两种方法，我们把由两种方法计算得到的通量值进行相关分析。从图 2（不包含异常大的点）中我们可以看到，感热和潜热通量具有较好的相关，两种方法的相关系数 $r_s \approx 0.598$ 和 $r_l \approx 0.613$ ，通过了 $\alpha=0.05$ 的显著性检验，这说明了两种方法在总体上是一致的。

由于 BREB 法只能计算感热和潜热通量，不包含动量通量的计算，而通过变分法

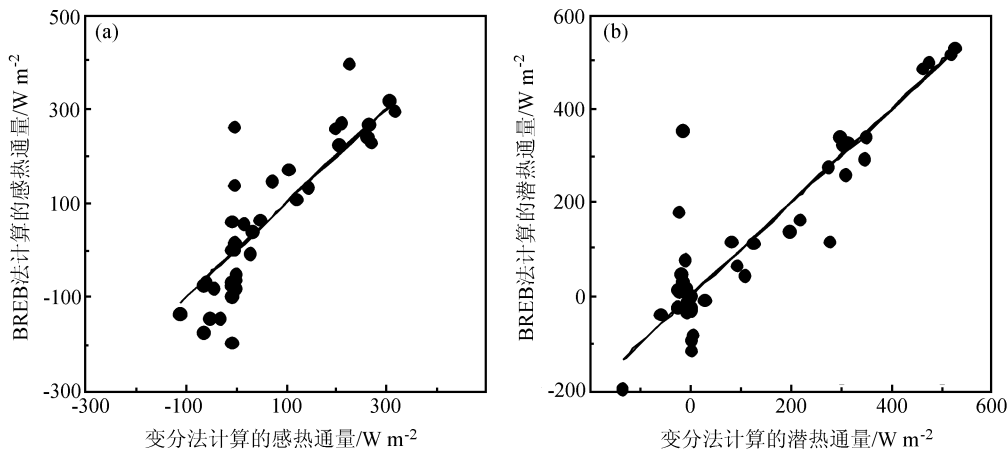


图 2 两种方法计算的通量相关图

(a) 感热；(b) 潜热。黑点：对应于两种方法计算结果组成的数对；实线：线性拟合

的控制方程则可以给出 u_* 、 θ_* 和 q_* 的最优估计，然后再通过 (4)~(6) 式可以计算动量通量。图 3 给出了由变分法计算得到的动量通量值，由图可以看出，变化曲线呈现出较明显的日变化，动量输送在白天和夜晚较大，而日出和傍晚前后较小，这与风速日变化的特征相对一致。从图 3 中还可以看出，在 26 日 03~05 时、27 日 21 时后的动量通量值较大，其原因主要来自于两个方面：一是此时段风向均为偏南风，根据文献 [4]，由于观测站南面高大建筑物的影响，导致地表粗糙度长度异常偏大，进而使摩擦速度也异常偏大，最终由 (4) 式计算得到的动量通量明显偏大；二是这两个时段的风速相对较大也应是一个影响因素，如在 27 日 03~05 时同样也是偏南风，但由于风速相对较小，动量通量值也相应较小。可见由变分法计算得到的动量通量的结果是比较合理的。

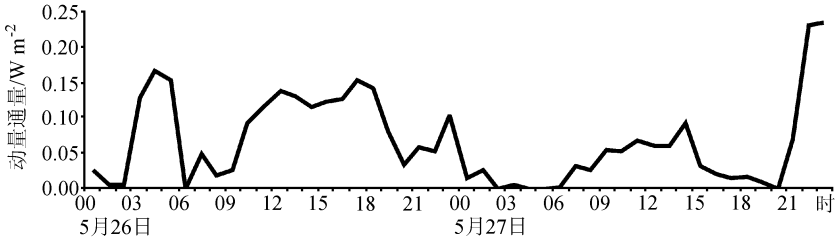


图 3 变分法计算的动量通量

4.2 动量和感热总体输送系数的计算

在实际中，各种尺度的大气数值模式中计算动量、感热和潜热通量都是需要给定动量、热量和水汽的总体输送系数，大量进行外场试验的目的之一是为了计算得到或观测得到各种通量的值，然后反过来给出输送系数较为合理的估计。通过上述比较，我们看到变分法在充分利用观测和理论中的信息的基础上，给出了 u_* 、 θ_* 和 q_* 的最优估计，进而得到了动量、感热和潜热通量的估计。因此，我们也就有理由相信，通过由变分法得到的通量值计算出的总体输送系数也应该是最优的和较为合理的估计。一般，计算地表面通量的总体输送法表示为下式^[16]，

$$\tau = \rho C_m u_a^2, \tag{17}$$

$$H = -\rho c_p C_s (\theta_a - \theta_g) u_a, \tag{18}$$

$$Q = -\rho \lambda C_l (q_a - q_g) u_a. \tag{19}$$

其中， u_a 、 θ_a 和 q_a 分别是近地层大气的水平风速、位温和比湿，一般都取 10 m 高的观测值； θ_g 和 q_g 分别是地表面大气的位温和比湿； C_m 、 C_s 和 C_l 分别是大气动量、感热和潜热的总体输送系数，它们表示了湍流通量与雷诺平均量之间的比例关系，其典型量值一般在 $1 \times 10^{-3} \sim 5 \times 10^{-3}$ 之间^[3]，通常情况下它们主要受表面粗糙度长度和大气稳定度的影响。由于所用资料中缺少土壤湿度的资料，因此只用 (17) 和 (18) 式计算得到动量和感热的总体输送系数。

图 4 中给出了由变分法计算的 C_m 、 C_s 和由 BREB 法计算的 C_s 的变化曲线，从图中可以看出，27 日的日变化相对较大，而 26 日较小；变分法的 C_m 和 C_s 的变化趋势比较一致，而 BREB 法的 C_s 则变化比较剧烈，且出现不连续点，这与通量计算中的虚假尖峰是相对应的；平均而言，变分法得到的 C_m 和 C_s 约为 2.694×10^{-3} 和 $2.148 \times$

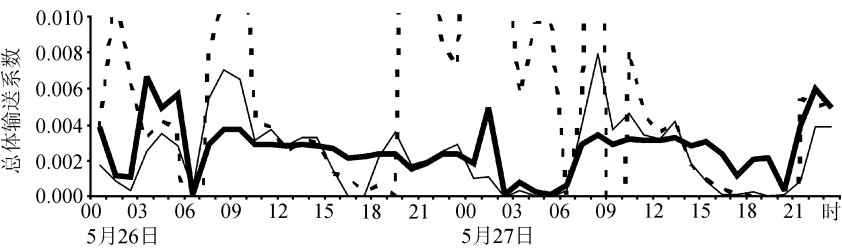


图 4 总体输送系数的变化曲线
虚线：变分法 C_s ；粗实线：变分法 C_m ；细实线：BREB 法 C_s

10^{-3} ，BREB 法的 C_s 约为 3.502×10^{-3} ，与文献 [4] 比较，变分法的结果较一致，而 BREB 法的偏大。

5 小结及讨论

本文通过典型干旱区荒漠戈壁的感热通量和潜热通量的计算，比较了 BREB 方法和变分法的特点，计算了动量通量，并给出了动量和热量的总体输送系数。试验结果表明，与 BREB 法相比，变分法是一种相对稳定、更为合理的计算地表通量以及总体输送系数的方法，它有效地解决了当 Bowen 比接近 -1 时 BREB 方法在计算感热和潜热通量过程中所产生的虚假跳跃和尖峰问题。由此，变分法可以作为计算其他通量方法的改进途径。

通过本文的研究，我们发现变分方法在处理西北干旱区荒漠戈壁复杂下垫面边界层总体输送系数计算问题的一种行之有效的办法。这种方法具有较强的适用性和计算稳定性，它所计算给定的总体输送系数是基于各种大气边界层观测资料、相似性理论以及受到地表能量平衡方程约束的较为全面信息的最优估计，虽然本文中仅使用了两天的资料进行检验，但得到的结果却是较为稳定和合理的，与已有的研究结果相吻合，说明变分法的结果可以作为给各种尺度大气数值模式计算边界层通量提供总体输送系数的途径和参考。

另外，在研究中，变分方法虽然较为全面地利用了各种有效的信息，但显然我们还只是局限于大气边界层的范围，对于土壤层中的观测信息和相关理论的利用还远远不够，这是一个很有实际意义却又非常复杂的问题，也是需要继续研究的方向。

参 考 文 献

1 张可苏，大气动力学模式的比较研究，中国科学，1980，**10**（3），277~287。
2 孙荪芬、卢志泊，一个可与大气环流模式相耦合的陆地水热交换模式，中国科学（B辑），1989，**19**（2），216~224。
3 杨长新译，边界层气象导论，北京：气象出版社，1991，279~287。
4 张强、卫国安、黄荣辉，西北干旱区荒漠戈壁动量和感热总体输送系数，中国科学（D辑），2001，**31**（9），783~792。
5 张强、胡隐樵、王喜红，黑河地区绿洲内农田微气象特征，高原气象，1992，**11**（4），361~370。

- 6 Sorbjan, Z., *Structure of the Atmospheric Boundary Layer*, New Jersey: Englrwood Cliffs, Prentice-Hall Inc, 1989, 74~76.
- 7 胡隐樵、奇跃进, 组合法确定近地面层通量和通用函数, 气象学报, 1991, **49** (1): 47~53.
- 8 Fritschen, L. J., and J. R. Simpson, Surface energy and radiation balance systems: General description and improvements, *J. Appl. Meteor.*, 1989, **28**, 680~689.
- 9 Xu Qin, and Qiu Chongjian, A variational method for computing surface heat fluxes from ARM surface energy and radiation balance systems, *J. Appl. Meteor.*, 1997, **36**, 3~11.
- 10 Businger, J. A., J. C. Wyngaard, Y. Izumi et al., Flux profile relationships in the atmospheric surface layer, *J. Atmos. Sci.*, 1971, **28**, 181~189.
- 11 Yaglom, A. M., Comments on wind and temperature flux—profile relationships, *Bound.-Layer Meteor.*, 1977, **11**, 89~102.
- 12 Hogstrom, U., Nondimensional wind and temperature profile in the atmospheric surface layer: A reevaluation, *Bound.-Layer Meteor.*, 1988, **42**, 55~78.
- 13 Holtslag, A. A. M., and H. A. R. DeBruin, Applied modeling of the nighttime surface energy balance over land, *J. Appl. Meteor.*, 1988, **27**, 689~704.
- 14 王澄海、董文杰、韦志刚等, 典型干旱区感热和潜热通量特征和数值模拟, 高原气象, 2002, **21** (5), 466~471.
- 15 张强、胡隐樵、赵鸣, 降水强迫对戈壁局地气候系统水、热输送的影响, 气象学报, 1997, **55** (4), 492~498.
- 16 赵鸣、苗曼倩、王彦昌, 边界层气象学教程, 北京: 气象出版社, 1991, 247~248.

A Study of Computing the Surface Flux in the Typical Arid Region of Northwest China by a Variational Method

Ren Hongli¹⁾, Wang Chenghai¹⁾, Qiu Chongjian¹⁾, and Dong Wenjie²⁾

1) (*Department of Atmospheric Science, College of Resources and Environment, Lanzhou University, Lanzhou 730000*)

2) (*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*)

Abstract By using the data observed during the intensive observation period of the Dunhuang Land-Surface Process Field Experiment (DLSPFE) from May through June in 2000, a variational method is applied to compute surface fluxes of sensible and latent heat over Gobi in the typical arid region of Northwest China. In comparison with the conventional Bowen ratio energy balance (BREB) method, by making fuller and more complete use of the information provided by the observational data and by the surface energy balance equation and the similarity profile equations, the variational method solves the problem that the BREB method becomes computationally unstable and produces spurious large values when Bowen ratio is in the vicinity of -1 . The fluxes and bulk transport coefficients computed by the variational method are more rational and stabler than those of the BREB.

Key words: variational method; Bowen ratio; sensible heat; latent heat; transport coefficient

附录：梯度分量的计算

按照链式求导法则，由（14）式确定的目标函数 J 关于 u_* 、 θ_* 和 q_* 的梯度分量公式如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial u_*} &= w_u(u - u_{ob}) \frac{\partial u}{\partial u_*} + w_\theta(\Delta\theta - \theta_{ob}) \frac{\partial \Delta\theta}{\partial u_*} + w_q(\Delta q - \Delta q_{ob}) \frac{\partial \Delta q}{\partial u_*} + w_\delta \frac{\partial \delta}{\partial u_*}, \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_*} &= w_u(u - u_{ob}) \frac{\partial u}{\partial \theta_*} + w_\theta(\Delta\theta - \theta_{ob}) \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \theta_*} + w_q(\Delta q - \Delta q_{ob}) \frac{\partial \Delta q}{\partial \theta_*} + w_\delta \frac{\partial \delta}{\partial \theta_*}, \\ \frac{\partial J}{\partial q_*} &= w_q(\Delta q - \Delta q_{ob}) \frac{\partial \Delta q}{\partial q_*} + w_\delta \frac{\partial \delta}{\partial q_*},\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial u_*} &= \frac{1}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi_m\left(\frac{z}{L}\right) + \Psi_m\left(\frac{z_0}{L}\right) \right] - \frac{u_*}{\kappa} \left[\frac{\partial \Psi_m(z/L)}{\partial u_*} - \frac{\partial \Psi_q(z_0/L)}{\partial u_*} \right], \\ \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \theta_*} &= \frac{1}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right) - \Psi_h\left(\frac{z_2}{L}\right) + \Psi_h\left(\frac{z_1}{L}\right) \right] - \frac{\theta_*}{\kappa} \left[\frac{\partial \Psi_h(z_2/L)}{\partial \theta_*} - \frac{\partial \Psi_h(z_1/L)}{\partial \theta_*} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial \theta_*} &= -\frac{u_*}{\kappa} \left[\frac{\partial \Psi_m(z/L)}{\partial \theta_*} - \frac{\partial \Psi_m(z_0/L)}{\partial \theta_*} \right], \\ \frac{\partial \Delta q}{\partial u_*} &= -\frac{q_*}{\kappa} \left[\frac{\partial \Psi_q(z_2/L)}{\partial u_*} - \frac{\partial \Psi_q(z_1/L)}{\partial u_*} \right], \\ \frac{\partial \Delta\theta}{\partial u_*} &= -\frac{\theta_*}{\kappa} \left[\frac{\partial \Psi_h(z_2/L)}{\partial u_*} - \frac{\partial \Psi_h(z_1/L)}{\partial u_*} \right], \\ \frac{\partial \Delta q}{\partial \theta_*} &= -\frac{q_*}{\kappa} \left[\frac{\partial \Psi_q(z_2/L)}{\partial \theta_*} - \frac{\partial \Psi_q(z_1/L)}{\partial \theta_*} \right], \\ \frac{\partial \Delta q}{\partial q_*} &= \frac{1}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right) - \Psi_q\left(\frac{z_2}{L}\right) + \Psi_q\left(\frac{z_1}{L}\right) \right], \\ \frac{\partial \delta}{\partial u_*} &= -\rho(c_p\theta_* + \lambda q_*), \quad \frac{\partial \delta}{\partial \theta_*} = -\rho c_p u_*, \quad \frac{\partial \delta}{\partial q_*} = -\rho \lambda u_*.\end{aligned}$$

其中，稳定度函数 Ψ_m 、 Ψ_h 和 Ψ_q 按文中给定的形式求取相应的偏导数，各种符号意义同文中定义。不稳定层结情形有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_m}{\partial x} &= 2\left(\frac{1}{1+x} + \frac{x-1}{1+x^2}\right), \quad \frac{\partial \Psi_{h,q}}{\partial x} = \frac{4x}{1+x^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial u_*} &= \frac{8\kappa g \theta_*}{Tu_*^3} x^{-3}, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_*} = -\frac{4\kappa g}{Tu_*^2} x^{-3},\end{aligned}$$

这里 $x=(1-16z/L)^{1/4}=[1-16(\kappa g \theta_*)/(Tu_*^2)]^{1/4}$ 与式（7）和（8）中定义相同。

对于稳定层结的情形有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_m}{\partial x} &= -a - b\exp(-dx) + db\left(x - \frac{c}{d}\right)\exp(-dx), \\ \frac{\partial \Psi_{h,q}}{\partial x} &= -z\left(1 + \frac{2}{3}x\right)^{1/2} - b\exp(-dx) + db\left(x - \frac{c}{d}\right)\exp(-dx), \\ \frac{\partial x}{\partial u_*} &= -\frac{2\kappa g \theta_*}{Tu_*^3}, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_*} = \frac{\kappa g}{Tu_*^2}.\end{aligned}$$

这里 $x=z/L=(\kappa g \theta_*)/(Tu_*^2)$ ， $a=1$ ， $b=0.667$ ， $c=5$ 和 $d=0.35$ ，同式（9）和（10）中定义。