第28卷第4期　　大　气　科　学　　Vol. 28　No. 4
2004 年 7 月　　Chinese Journal of Atmospheric Sciences　　July　2004

非线性发展方程的非守恒格式的计算稳定性问题*

林万涛　谢正辉

（中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室，北京　100029）

摘　要　针对非线性发展方程的非守恒格式，以一维浅水波方程为例，对非守恒格式的计算稳定性进行了研究分析，探讨了非线性发展方程的非守恒格式与初值的关系。理论分析和数值试验表明，在格式结构已经确定的情况下，非守恒格式的计算稳定性主要由初值的形式所决定。

关键词：非线性发展方程；非守恒格式；计算稳定性；初值

文章编号　1006-9895（2004）04-0410-07　　**中图分类号**　P413　　**文献标识码**　A

1　引言

近代研究表明，大气和海洋的运动、发展与变化遵从非线性规律。描述大气和海洋运动的方程是一类比较复杂的非线性偏微分方程，通常称之为非线性发展方程。基于描述大气和海洋运动的非线性发展方程本身的复杂性，很难求得解析解，由此就必须将其进行离散化后数值求解。

大气和海洋系统短期运动的主要特点是能量守恒。对这类问题进行数值求解时使用最多的是有限差分格式，因此，能否设计出长时间计算稳定的差分格式是一个关键性问题。正是基于这种情况，曾庆存等[1,2]和季仲贞[3,4]系统地研究了绝热或无耗散情况下非线性发展方程的计算稳定性问题，探讨了产生非线性计算不稳定的原因，首先构造了计算稳定的隐式完全平方守恒差分格式。之后，季仲贞等[5,6]和王斌等[7~10]又设计发展了计算稳定的显式完全平方守恒差分格式。最近，陈嘉滨和季仲贞[11]研究了保持总能量守恒的半拉格朗日平方守恒格式。季仲贞等[12]对总能量守恒和辛几何算法之间的关系也进行了讨论。林万涛等[13]分析了大气和海洋短期运动与守恒及非守恒格式的关系，进一步证实了对大气和海洋系统的短期运动问题用平方守恒格式进行数值求解是稳定的，而用非守恒格式则是不稳定的。所以用平方守恒格式解决这类问题有更多的优势。

大气和海洋的中、长期运动一般情况下能量是不守恒的。由于大气和海洋运动本质上的非线性，其中、长期运动状态依赖于基态（初始场）。基态的改变会导致大气和海洋运动的改变[14]。在中、长期数值天气预报和海流数值模拟中，对非线性大气海洋

2003-03-12 收到，2003-06-16 收到修改稿

* 中国科学院重大创新项目 KZCX2-208、中国科学院百人计划项目“气候与植被相互作用”和国家自然科学基金资助项目 40275023 共同资助

动力学方程组同样需要使用有限差分格式进行数值求解。因此，研究非线性发展方程离散为差分格式后与初值的关系，就具有十分重要的意义。对非线性发展方程的非平方守恒格式，林万涛等[15]给出了一种判定其是否计算稳定的新方法。同时，林万涛等[16]对非线性发展方程的平方守恒格式和非平方守恒格式进行了比较分析，证实了平方守恒格式和非平方守恒格式的计算稳定性是完全不同的。本文针对非线性发展方程的非守恒格式，以一维浅水波方程为例，对非守恒格式的计算稳定性进行了研究分析，探讨了非线性发展方程的非守恒格式与初值的关系。

2　方程和差分格式

考虑一维非线性浅水波方程的初值问题，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + u\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + (\Phi + \varphi)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\varphi = g\xi$，$\Phi = gh$，ξ 是波面起伏；g 是重力加速度，h 是水深，均为常数。

对问题（1），取 C 网格，采用如下差分格式。

格式 1（CTCS 格式）：

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^{n-1}}{2\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+3/2}^{n} - u_{j-1/2}^{n}}{2\Delta t} + \frac{\varphi_{j+1}^{n} - \varphi_{j-1}^{n}}{2\Delta t} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\varphi_{j}^{n+1} - \varphi_{j}^{n-1}}{2\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{\varphi_{j+1}^{n} - \varphi_{j-1}^{n}}{2\Delta x} + (\Phi + \varphi_j^n)\frac{u_{j+3/2}^{n} - u_{j-1/2}^{n}}{2\Delta x} = 0. \tag{3}$$

格式 2（FTBS 格式）：

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^{n}}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+1/2}^{n} - u_{j-1/2}^{n}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{j}^{n} - \varphi_{j-1}^{n}}{\Delta x} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\varphi_{j}^{n+1} - \varphi_{j}^{n}}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{\varphi_{j}^{n} - \varphi_{j-1}^{n}}{\Delta x} + (\Phi + \varphi_j^n)\frac{u_{j+1/2}^{n} - u_{j-1/2}^{n}}{\Delta x} = 0. \tag{5}$$

格式 3（BTCS 格式）：

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^{n}}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+3/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\varphi_{j}^{n+1} - \varphi_{j}^{n}}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (\Phi + \varphi_j^n)\frac{u_{j+3/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1}}{2\Delta x} = 0. \tag{7}$$

格式 4（Lax-Wendroff 格式）：

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^{n}}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{u_{j+3/2}^{n} - u_{j-1/2}^{n}}{2\Delta x} + \frac{\varphi_{j+1}^{n} - \varphi_{j-1}^{n}}{2\Delta x}$$
$$= \frac{[(u_{j+1/2}^{n})^2 + \Phi + \varphi_j^n]\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+3/2}^{n} - 2u_{j+1/2}^{n} + u_{j-1/2}^{n}) + \frac{u_{j+1/2}^{n}\Delta t}{\Delta x^2}(\varphi_{j+1}^{n} - 2\varphi_{j}^{n} + \varphi_{j-1}^{n}), \tag{8}$$

$$\frac{\varphi_{j}^{n+1} - \varphi_{j}^{n}}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n}\frac{\varphi_{j+1}^{n} - \varphi_{j-1}^{n}}{2\Delta x} + (\Phi + \varphi_j^n)\frac{u_{j+3/2}^{n} - u_{j-1/2}^{n}}{2\Delta x}$$

$$=\frac{[(u_{j+1/2}^n)^2+\Phi+\varphi_j^n]\Delta t}{2\Delta x^2}(\varphi_{j+1}^n-2\varphi_j^n+\varphi_{j-1}^n)+\frac{u_{j+1/2}^n(\Phi+\varphi_j^n)\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+3/2}^n-2u_{j+1/2}^n+u_{j-1/2}^n). \tag{9}$$

3 差分格式的计算稳定性分析

参照文献［15］，我们将对格式1～4进行计算稳定性分析。以格式1为例，将（2）、（3）式作Taylor展开，略去上下标可得：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Delta t^2-\frac{1}{6}u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^2-\frac{1}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\Delta x^2+O(\Delta t^4,\Delta x^4). \tag{10}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Delta t^2-\frac{1}{6}u\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\Delta x^2-\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^2+O(\Delta t^4,\Delta x^4). \tag{11}$$

由（10）、（11）式可以看出：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=-u\frac{\partial \varphi}{\partial x}-(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{13}$$

（12）式对t微分，得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{14}$$

（12）式对x微分，得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{15}$$

（13）式对x微分，得：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\partial x}=-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}-u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-(\Phi+\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{16}$$

把（12）、（15）、（16）式代入（14）式，得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(\Phi+\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{17}$$

类似地，可得：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+4u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+2(\Phi+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(\Phi+\varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2(\Phi+\varphi)u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{18}$$

同样可求得：

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=-6u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3-11\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}-9u^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12u\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-15u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-5\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-7(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3(\Phi+\varphi)u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3u^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-(\Phi+\varphi)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{19}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}=-18u\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-8\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2-6(\Phi+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3-9u^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-9u^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-9u\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$
$$-8(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-18(\Phi+\varphi)u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-7(\Phi+\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$

$$-3(\Phi+\varphi)u\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-3(\Phi+\varphi)u^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-(\Phi+\varphi)^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{20}$$

将（19）、（20）式代入（10）、（11）式，可得格式 1 的修正微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\Delta t^2+\frac{11}{6}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t^2+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+12u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+7(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left(15u\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{6}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}u^2\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$
$$+\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{6}\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+O(\Delta t^4,\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{21}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}=3u\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta t^2+\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Delta t^2+(\Phi+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\Delta t^2$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+18(\Phi+\varphi)u\frac{\partial u}{\partial x}+7(\Phi+\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+9u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+8(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$
$$+\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^4,\Delta t^2,\Delta x^2). \tag{22}$$

同样，可求出格式 2～4 的修正微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta t-\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\Delta t^2+\frac{11}{6}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t^2$$
$$+\frac{1}{2}[u\Delta x-(u^2+\Phi+\varphi)\Delta t]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(\Delta x-2u\Delta t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+12u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+7(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left(15u\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{6}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}u^2\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$
$$+\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{6}\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x). \tag{23}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}=-2u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Delta t-(\Phi+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta t$$
$$+3u\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta t^2+\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Delta t^2+(\Phi+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\Delta t^2$$
$$+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)(\Delta x-2u\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}[u\Delta x-(u^2+\Phi+\varphi)\Delta t]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+18(\Phi+\varphi)u\frac{\partial u}{\partial x}+7(\Phi+\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+9u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+8(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$
$$+\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x). \tag{24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t-\frac{7}{6}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t^2$$

$$+\frac{1}{2}(u^2+\Phi+\varphi)\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\Delta t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$-\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+18u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+11(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$-\frac{1}{6}\Delta t^2\left(18u\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{3}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-u^2\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$
$$-\frac{1}{3}(\Phi+\varphi)\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{6}\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x^2). \tag{25}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Delta t+\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Delta t^2$$
$$+(\Phi+\varphi)u\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(u^2+\Phi+\varphi)\Delta t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$-\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+18(\Phi+\varphi)u\frac{\partial u}{\partial x}+5(\Phi+\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$-\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+7(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{3}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$
$$-(\Phi+\varphi)u^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{3}(\Phi+\varphi)^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$
$$-\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x^2). \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta t-\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\Delta t^2+\frac{11}{6}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t^2$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+12u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+7(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{6}\Delta t^2\left(15u\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}u^2\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$
$$-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x^2). \tag{27}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}=-2u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta t-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Delta t-(\Phi+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta t$$
$$+3u\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta t^2+\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Delta t^2+(\Phi+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\Delta t^2$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+18(\Phi+\varphi)u\frac{\partial u}{\partial x}+7(\Phi+\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{6}\Delta t^2\left[9u^2\frac{\partial u}{\partial x}+9u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+8(\Phi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{6}u^3\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$$
$$+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u\Delta t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{1}{2}(\Phi+\varphi)u^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)^2\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$
$$-\frac{1}{6}u\Delta x^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-\frac{1}{6}(\Phi+\varphi)\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x^2). \tag{28}$$

要使格式 1～4 计算稳定，则(21)～(28)式右端的二阶耗散系数必须为正[17]。这自然要求二阶耗散系数在 $t=0$ 时亦为正[15]，于是有以下定理。

定理 1 一维非线性浅水波方程差分格式 1（CTCS 格式）和格式 4（Lax-Wendroff 格式）计算稳定的必要条件为

$$①u(x,0)>0;\qquad ②\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}\geqslant 0;\qquad ③\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial x}>0.$$

定理 2　一维非线性浅水波方程差分格式 2（FTBS 格式）计算稳定的必要条件为

①$u(x,0)>0$；　②$\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x}\geqslant 0$；　③$\dfrac{\partial \varphi(x,0)}{\partial x}>0$；

④$\dfrac{u(x,0)\Delta t}{\Delta x}\leqslant \min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{u^2(x,0)}{u^2(x,0)+\Phi+\varphi(x,0)}\right\}$.

定理 3　一维非线性浅水波方程差分格式 3（BTCS 格式）计算稳定的必要条件为

①$u(x,0)>0$；　②$\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x}\leqslant 0$；　③$\dfrac{\partial \varphi(x,0)}{\partial x}\geqslant 0$.

4　数值试验

为进一步探讨非线性发展方程的非守恒格式与初值的关系，针对一维非线性浅水波方程的非守恒格式 1～4，我们做如下的数值试验。取如下两个初值：

（1）$u(x,0)=x$，$\varphi(x,0)=g(1-\mathrm{e}^{-x})$；

（2）$u(x,0)=\sin 2\pi x$；$\varphi(x,0)=g\cos 2\pi x$.

其中，$0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant t\leqslant 100$，$h=10$。

取 $\Delta x=0.1$，$\Delta t=0.01$，计算结果如表 1。

表 1　数值试验计算结果（E 为格式的总能量）

步数	初值 1					初值 2				
	1	10	10^2	10^3	10^4	1	10	10^2	10^3	10^4
格式 1(E)	5089.812	5090.460	5291.624	4170.564	4090.066	2456.560	2593.931	4068.600	2.419×10^7	3.945×10^{12}
格式 2(E)	5089.812	4231.321	3859.742	3012.455	2898.704	2456.560	2689.645	4577.412	3.564×10^6	4.678×10^{10}
格式 3(E)	5089.812	5276.341	7869.467	4.325×10^8	6.243×10^{14}	2456.560	2897.893	5121.759	6.542×10^7	2.657×10^{13}
格式 4(E)	5089.812	4835.765	4536.378	3948.672	3157.984	2456.560	2579.319	4143.874	5.315×10^5	7.474×10^9

由计算结果可以看出，格式 1、2、4 对初值 1 是计算稳定的，这是由于初值 1 满足定理 1、2 所给定的计算稳定的必要条件。同时，由于初值 2 不满足定理 1、2 所给定的计算稳定的必要条件，格式 1、2、4 对初值 2 是计算不稳定的。对初值 1、2，格式 3 均不满足定理 3 所给定的计算稳定的必要条件，因此是计算不稳定的。

5　结论

通过理论分析与数值试验，可以得出如下结论：

（1）非线性发展方程的非守恒格式的计算稳定性与初值是密切相关的。在格式结构已经确定的情况下，非守恒格式的计算稳定性主要由初值的形式所决定。这说明非线性发展方程在离散化后其运动状态仍然依赖于基态（初始场）。

（2）由计算稳定性分析所得到的稳定性判据是判定非线性发展方程的非守恒格式计算稳定的必要条件。

参　考　文　献

1　曾庆存，计算稳定性的若干问题，大气科学，1978，**2**（3），181～191.

2 曾庆存、季仲贞，发展方程的计算稳定性问题，计算数学，1981，**3**（1），79～86.
3 季仲贞，二维 Lilly 格式非线性计算不稳定的例子，科学通报，1980，**25**（19），890～892.
4 季仲贞，非线性计算稳定性的比较分析，大气科学，1981，**4**（4），344～354.
5 季仲贞、王 斌，再论发展方程差分格式的构造和应用，大气科学，1991，**15**（2），72～78.
6 季仲贞、王 斌、曾庆存，计算地球流体力学若干新进展，空气动力学学报，1998，**16**（1），108～114.
7 王 斌、季仲贞，显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验，科学通报，1990，**35**（10），766～768.
8 王 斌、季仲贞，协调耗散算子与显式完全平方守恒差分格式，中国科学（B 辑），1993，**23**（6），665～672.
9 王 斌、曾庆存、季仲贞，平方守恒系统与 Hamilton 系统，中国科学（A 辑），1995，**25**（7），765～770.
10 王 斌、季仲贞，变步长显式完全平方守恒差分格式，气象学报，1995，**53**（3），299～305.
11 陈嘉滨、季仲贞，半拉格朗日平方守恒计算格式的研究，大气科学，2001，**25**（6），837～846.
12 Ji Zhongzhen，Wang Bin，Zhao Ying et al.，Total energy conservation and the symplectic algorithm，*Advances in Atmospheric Sciences*，2002，**19**（3），459～469.
13 林万涛、季仲贞、王 斌，大气和海洋短期运动与守恒及非守恒格式的关系，科学通报，2003，**48**（7），723～725.
14 曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，北京：科学出版社，1979，543pp.
15 林万涛、季仲贞、王 斌，一种判定非线性发展方程差分格式计算稳定性的新方法.，科学通报，2000，**45**（8），881～885.
16 林万涛、季仲贞、王 斌等，守恒格式与非守恒格式的比较研究，自然科学进展，2002，**12**（12），1326～1328.
17 吴江航、韩庆书，计算流体力学的理论、方法及应用，北京：科学出版社，1988，293pp.

The Computational Stability of Nonconservative Schemes of Nonlinear Evolution Equations

Lin Wantao，and Xie Zhenghui

（*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics*，*Institute of Atmospheric Physics*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100029）

Abstract　For the nonconservative schemes of nonlinear evolution equations，taking one-dimensional shallow water wave equation as an example，the necessary conditions of computational stability are given. Based on the numerical tests，the relationship among the nonlinear computational stability，the construction of difference schemes，and the form of initial values is further discussed. It is proved through theoretical analysis and numerical tests that the computational stability of nonconservative schemes is not only dependent on the structure of scheme，but also on the form of initial values and their partial derivatives.

Key words：nonlinear evolution equation；nonconservative scheme；computational stability；initial value