

# 在大气运动中考虑重力加速度 空间变化的问题\*

廖洞贤

(中国气象局国家气象中心, 北京 100081)

**摘要** 给出了在旋转坐标系中考虑重力加速度  $g$  的空间变化的大气控制方程组, 并证明了大气总质量和总能量的守恒性, 以及和取常值  $g$  时得到的结果相一致的动、位能和动、内能之间的转换关系。还讨论了在球坐标系中应用方程组时可能出现的困难, 给出了在高度近似下在该系中考虑  $g$  的空间变化的方案, 它可以用来建立完全弹性的非静力模式。

**关键词:** 重力加速度的空间变化; 能量守恒; 能量转换

**文章编号** 1006-9895 (2004) 05-0692-08 **中图分类号** P401 **文献标识码** A

## 1 问题的提出

在大气环流和数值天气预报中, 一般都把  $g$  作为常数来处理。其所以如此, 是因为  $g$  的空间变化很小, 在海平面上, 从赤道到极地的变差不过约  $0.05 \text{ m s}^{-2}$ , 只占  $g$  本身的 5%; 如果取  $g$  作  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ , 误差也仅  $0.01 \text{ m s}^{-2}$  左右<sup>[1,2]</sup>。这看来似乎没有问题。可是, 如果加以分析, 就会发现, 这种处理并不一定对任何情况都合理。比如, 在出现强对流时, 垂直速度可以从零变为  $10 \text{ m s}^{-1}$  以上, 而其生命期不过  $10^3 \sim 10^4 \text{ s}$ <sup>[3,4]</sup>; 这时, 其  $d\omega/dt$  约为  $10^{-2} \sim 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ , 比  $g$  取作上述值时引起的误差还小。至于非强对流的情况, 其  $d\omega/dt$  一般还更小。因此, 要描写好对流尺度的运动, 考虑  $g$  的空间变化是很重要的, 否则似难描写好非静力作用, 因而, 也难描写好强对流活动。

Phillips<sup>[5]</sup>曾讨论过如何在椭球体上用正交曲线坐标来表示大气运动的问题。栗原宜夫<sup>[6]</sup>曾在等位势面上和铅直方向建立坐标系, 并给出风分量的表达式和运动方程, 但并未见到其应用的报告。不过, 我们也可以用另外的方法来进行研究。如仍用球坐标系, 而用较高近似的方法考虑  $g$  的空间变化等。

下面我们将在第 2 节中给出一般的在旋转坐标系中的大气控制方程组, 其中包含了具有空间变化的重力加速度, 在第 3 节中讨论大气运动的基本性质, 在第 4 节中讨论在应用中可能出现的问题和解决问题的方案, 第 5 节是应用, 第 6 节是讨论, 第 7 节是结论。

## 2 大气控制方程组

在以地球的心为原点，绕地轴旋转的坐标系中，大气运动的控制方程组可以表示为

$$\frac{\partial \mathbf{V}_3}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3) \mathbf{V}_3 = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3 \rho = -\rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3, \quad (2)$$

$$C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3 T \right) = -\frac{p}{\rho} \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 + Q, \quad (3)$$

其中， $\mathbf{V}_3$  和  $\nabla_3$  表示三维风速和三维梯度算子， $\mathbf{g}$  是重力加速度，是高度和纬度的函数。

## 3 大气运动的基本性质

### 3.1 能量方程

从方程 (1)、(2) 和方程 (2)、(3)，各可以得到动能方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho k + \nabla_3 \cdot \rho k \mathbf{V}_3 = -\nabla_3 \cdot p \mathbf{V}_3 + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V} + \rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{g} + \rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{F} \quad (4)$$

和内能方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho C_v T + \nabla_3 \cdot \rho C_v T \mathbf{V}_3 = -p \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 + \rho Q, \quad (5)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (k + C_v T) + \nabla_3 \cdot \rho (k + C_v T) \mathbf{V}_3 = -\nabla_3 \cdot p \mathbf{V}_3 + \rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{g} + \rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{F} + \rho Q, \quad (6)$$

因为  $\mathbf{g}$  是保守力，故存在位势  $\Phi$ ，使

$$\mathbf{g} = -\nabla_3 \Phi, \quad (7)$$

而

$$\Phi = GM \left( \frac{1}{a_p} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2,$$

其中， $R$  是质点距地轴的距离； $G$  是引力常数，等于  $6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ， $M$  是地球质量，等于  $5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$ ， $a_p$  是极地地球半径，等于  $6.357 \times 10^6 \text{ m}^{[1,2]}$ 。于是

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3 \Phi = -\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{g}. \quad (8)$$

利用连续方程 (2)，则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \Phi + \nabla_3 \cdot \rho \Phi \mathbf{V}_3 = -\rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{g}, \quad (9)$$

故从 (6) 式有

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (k + C_v T + \Phi) + \nabla_3 \cdot \rho (k + C_v T + \Phi) \mathbf{V}_3 = -\nabla_3 \cdot p \mathbf{V}_3 + \rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{F} + \rho Q, \quad (10)$$

其中,  $k = (\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}_3) / 2$ 。

设地面位势为  $\Phi_s$ , 模式顶位势为  $\Phi_t$ , 且在  $\Phi = \Phi_t$  和  $\Phi_s$  处,  $v_n = 0$ , 则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(K + I + P) = \int_{\hat{G}} \rho(\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{F} + Q) dv, \quad (11)$$

其中,  $K$ 、 $I$ 、 $P$  各是  $\rho k$ ,  $\rho C_v T$ ,  $\rho \Phi$  在整个模式大气  $\hat{G}$  内的积分,  $v_n$  是  $\Phi_t$  和  $\Phi_s$  面外法线方向的速度。

### 3.2 能量守恒和能量转换

从方程 (11) 可见, 在绝热无耗散情况下, 大气的总能量是守恒的。

至于能量转换, 从动能方程 (4) 和内能方程 (5) 还有

$$(K, I) = \int_{\hat{G}} p \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 dV = - \int_{\hat{G}} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dv, \quad (12)$$

这里  $(A, B) = F$  表示  $A$  和  $B$  之间通过  $F$  进行转换;  $F > 0$ ,  $B$  向  $A$  转换;  $F < 0$ ,  $A$  向  $B$  转换。这些结果和取常值  $g$  时得到的是一致的。另外, 从方程 (4) 和 (9) 还有

$$(K, P) = \int_{\hat{G}} \rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{g} dv, \quad (13)$$

这个结果在形式上和取常值  $g$  时得到的结果相同。

至于  $I$  和  $P$ , 从方程 (5) 和 (9) 可以看到: 它们之间没有能量转换。这和取常值  $g$  时得到的结果也是一致的。

### 3.3 质量守恒

这是很显然的。因为在考虑  $g$  的空间变化时, 连续方程的形式并没有改变, 只要对该方程, 在前面所取的边界条件下进行积分, 总可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{G}} \rho dv = 0. \quad (14)$$

所以, 包括  $g$  的空间变化的大气控制方程组是能量和质量守恒的, 并有正确的能量转换关系, 任何绝热无耗散且考虑重力加速度空间变化的模式都应具有这种性质。

## 4 球坐标系

从上面得出的 (11) ~ (14) 式等结果来看, 在大气中把  $g$  考虑成随空间变化的函数是合理的。问题是如何在计算中进行考虑。这与对  $\nabla_3$  和  $\mathbf{V}_3$  等的表示有关, 要牵涉到常用的坐标系, 如球坐标系。下面我们进行讨论。

### 4.1 控制方程组写在球坐标系中可能出现的问题

在球坐标系中  $g$  可以表示为

$$\mathbf{g} = g_2 \mathbf{j} + g_3 \mathbf{k}, \quad (15)$$

其中

$$g_2 = -\Omega^2 r \cos \varphi \sin \varphi, \quad (16)$$

$$g_3 = -\frac{GM}{r^2} + \Omega^2 r \cos^2 \varphi, \quad (17)$$

$\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  各是沿经线向北和沿  $r$  方向的单位向量;  $g_2$ 、 $g_3$  各是  $g$  沿这两个方向的分量。这时, 经向运动方程是

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_2 \mathbf{v} + \omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_2 - \tilde{f}u - \frac{u\omega}{r} + F_v, \quad (18)$$

$$10^{-4} \quad 10^{-5} \quad 10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 10^{-8} \quad (L = 10^6 \text{ m})$$

$$10^{-3} \quad 10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 10^{-7} \quad (L = 10^6 \text{ m})$$

$$10^{-2} \quad 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad 10^{-6} \quad (L = 10^6 \text{ m})$$

其中,  $\mathbf{v}$  和  $\nabla_2$  各表示水平风速和水平梯度算子,  $\tilde{f} = f + u \tan \varphi / r$ ,  $dx = r \cos \varphi d\lambda$ ,  $dy = r d\varphi$ ,  $z = r - a$ ,  $a$  是地球平均半径。参照杨大升等<sup>[1]</sup>对于水平尺度  $L = 10^6 \text{ m}$  和廖洞贤等<sup>[7]</sup>对于  $L = 10^5$  和  $10^4 \text{ m}$  的运动所作的尺度分析, 我们可以把方程 (18) 各项的量级列在各项所在位置的下面 (采用 MTS 制单位)。为了比较, 按 (16) 式我们可以算得在海平面上  $g_2$  随  $\varphi$  的分布, 其结果如图 1 所示。

可以看出:  $\overline{|g_2|} \approx 0.8981 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ , 对于  $L \geq_M 10^5 \text{ m}$  的运动, 它比方程 (18) 中除  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  和  $F_v$  外所有的项都大, 因而, 在自由大气中, 只有  $\partial \mathbf{v} /$

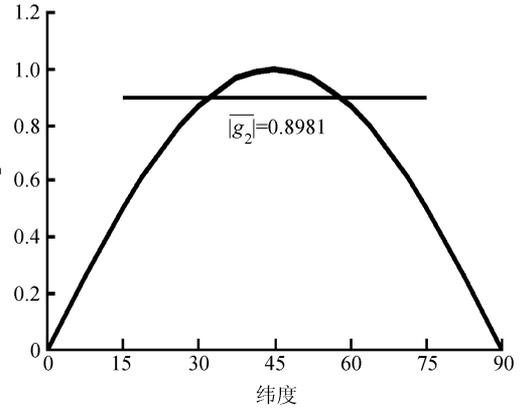


图 1  $|g_2|$  ( $\times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ ) 随纬度的分布

$\partial \mathbf{v} / \partial t$  才能与之平衡 (这里  $\geq_M$  表示在量级上大于或等于)。这样,  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  就会很大。这看来很不合理。产生这个问题显然是由于球面和等位势面不重合的缘故。因此, 较彻底的解决办法应当是: 在以等位势面为坐标面的正交曲线坐标系中建立可供计算用的大气控制方程组。不过, 也可以用另外的办法来建立。比如, 采取一些措施, 仍用球坐标系使  $g_2$  不出现, 其所引起的误差控制在可容许的范围之内, 等等。

## 4.2 变差分析

$g$  的变差有水平的和垂直的两种。在水平面上, 变差和计算范围有关, 范围愈小, 变差也愈小。比如, 在南北  $100 \text{ km}$  内, 一般仅约  $5 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$ , 远小于  $d\omega/dt$  在强对流情况的量级。但是, 在垂直方向, 如模式顶取为  $10^4 \text{ m}$ , 则从海平面到模式顶变差可达  $3 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ 。因此, 对于一个模式, 即便水平范围很小,  $g$  的水平变差可以不顾, 但垂直变差则是必须考虑的, 因为模式顶至少应在  $10^4 \text{ m}$  以上, 否则似难描写好强对流的活动。根据上面的分析, 下面我们将给出考虑  $g$  的空间变化的简化方案并进行讨论。

## 4.3 简化方案

把地面看成球面,  $\mathbf{g}$  指向球心,  $g = |\mathbf{g}|$ 。参考刘式适等<sup>[2]</sup>所给的经验公式,

$$g = \hat{g}(1 - a_1 z), \quad (19)$$

而  $\hat{g}$  是  $g_0(\varphi)$  在计算域内沿水平面的平均,

$$g_0(\varphi) = g_0(1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi)$$

其中,  $g_0 = 9.78031 \text{ m s}^{-2}$ ,  $a_1 = 3.14 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ 。于是, 大气控制方程组可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_2 \mathbf{u} + \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \tilde{f}v - \bar{f}w + F_u, \quad (20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_2 v + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \tilde{f}u + F_v, \quad (21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_2 w + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \tilde{f}u + F_w, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_2 \rho + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3, \quad (23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_2 T + w \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{p}{C_v \rho} \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 + \frac{Q}{C_v}, \quad (24)$$

其中,  $\tilde{f} = 2\Omega \cos\varphi$ 。注意: 这里已用  $a$  代替  $r$ , 并略去了所有的曲率项。

用和第 3 节中所用的同样的方法, 从方程 (20) ~ (24), 可以得到和方程 (4)、(5) 相似的动能方程和内能方程, 但方程 (4) 中的  $\rho \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{g}$  应改为  $-\rho g w$ 。于是,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(k + C_v T) + \nabla_3 \cdot \rho(k + C_v T) \mathbf{V}_3 = \nabla_3 \cdot p \mathbf{V}_3 - \rho g w + \rho(\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{F} + Q), \quad (25)$$

定义

$$\phi = \int_0^z g dz, \quad (26)$$

注意: 这里  $\phi$  是用 (19) 式和 (26) 式定义的位势, 它和用 (7) 式定义的不同。这样, 由 (19) 式有

$$\phi = \hat{g}z \left(1 - \frac{a_1}{2}z\right), \quad (27)$$

故

$$\frac{d\phi}{dt} = gw, \quad (28)$$

于是, 利用连续方程 (23), 还有

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \phi + \nabla_3 \cdot \rho \phi \mathbf{V}_3 = \rho gw. \quad (29)$$

把方程 (25) 和方程 (29) 相加, 则

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(k + \phi + C_v T) + \nabla_3 \cdot \rho(k + \phi + C_v T) \mathbf{V}_3 = -\nabla_3 \cdot \rho \mathbf{V}_3 + \rho(\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{F} + Q). \quad (30)$$

设这时计算范围较小, 但在水平侧边界上所有预报变量  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $\rho$ 、 $T$ 、 $\varphi$  等均为周期分布, 且在  $z=0$  和  $z_t$  处,  $w=0$ ; 如有地形起伏, 则在  $z=z_s$  处,  $w=\mathbf{v}_s \cdot \nabla_2 z_s$ , 其中下标  $t$  和  $s$  各表示模式大气顶和地面。于是, 在形式上, (11) 式仍成立, 即总能量守恒。用和第 3 节中类似的方法, 还可证明, (12)、(13) 和 (14) 式成立。

## 5 应用

### 5.1 静力方程

设  $T = \bar{T}(z) + T'$ ,  $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'$ ,  $\bar{p} = \bar{\rho}RT$ ,  $p = \bar{p}(z) + p'$

$$\bar{T} = \begin{cases} \bar{T}_0 - \Gamma_1 z, & 0 \leq z \leq z_T, \\ \bar{T}_T - \Gamma_2 \hat{z}, & z_T \leq z < \infty. \end{cases} \quad (31)$$

采用  $g$  的简化方案 (19), 则  $\bar{p}$  应满足的静力方程可以表示为

$$\frac{\partial \ln \bar{p}}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{\hat{g}}{RT_0} \left( \frac{1-a_1 z}{1-b_1 z} \right) & 0 \leq z \leq z_T \\ -\frac{g_T}{RT_T} \left( \frac{1-a_2 \hat{z}}{1-b_2 \hat{z}} \right) & z_T \leq z < \infty, \end{cases} \quad (32)$$

其解是

$$\bar{p} = \begin{cases} p_0 \exp \left\{ -\frac{\hat{g}}{RT_0} \left[ \mu_1 z - \frac{1}{b_1} (1 - \mu_1) \ln(1 - b_1 z) \right] \right\}, & 0 \leq z \leq z_T, \\ \bar{p}_T \exp \left\{ -\frac{g_T}{RT_T} \left[ \mu_2 \hat{z} - \frac{1}{b_2} (1 - \mu_2) \ln(1 - b_2 \hat{z}) \right] \right\}, & z_T \leq z < \infty, \end{cases} \quad (33)$$

其中,  $b_1 = \Gamma_1 / \bar{T}_0$ ,  $b_2 = \Gamma_2 / \bar{T}_T$ ,  $a_2 = \hat{g} a_1 / g_T$ ,  $\mu_1 = a_1 / b_1$ ,  $\mu_2 = a_2 / b_2$ ,  $\hat{z} = z - z_T$ ,  $\bar{T}_T = \bar{T}_0 - \Gamma_1 z_T$ ;  $p_0$ 、 $\bar{T}_0$ 、 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$  各是用气候资料确定的海平面的气压和温度, 以及对流层和对流层顶以上的温度垂直递减率, 在计算域内均是常数; 下标 T 表示对流层顶, 注意它和下标 t 的意义是不同的。

## 5.2 随地形坐标中的控制方程

在坐标

$$\sigma_1 = \frac{z - z_s}{z_t - z_s} \quad (34)$$

中大气控制方程可以写成 (参见附录):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla_2 \cdot U \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \sigma_1} U \dot{\sigma}_1 + \mu_\sigma \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial \sigma_1} \frac{\partial z}{\partial x} = F_U, \quad (35)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_2 \cdot V \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \sigma_1} V \dot{\sigma}_1 + \mu_\sigma \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial \sigma_1} \frac{\partial z}{\partial y} = F_V, \quad (36)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla_2 \cdot W \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \sigma_1} W \dot{\sigma}_1 + \frac{\partial p'}{\partial \sigma_1} + \mu_\sigma \rho' g = F_W, \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mu_\sigma + \nabla_2 \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \dot{\Sigma} = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \nabla_2 \cdot \Theta \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial \sigma_1} (\dot{\Theta} \Sigma) = F_\Theta, \quad (39)$$

$$p = p_{00} \left( \frac{R \Theta}{p_{00} \mu_\sigma} \right)^\gamma, \quad (40)$$

其中,  $p_{00}$  表示标准海平面气压。由 (34) 式还有

$$z = \mu_\sigma \sigma_1 + z_s, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{1}{\mu_\sigma} [\omega + (\sigma_1 - 1) \mathbf{v} \cdot \nabla_2 z_s], \quad (42)$$

其中, 当  $\sigma_1 = 0$  时,  $\omega_s = \mathbf{v}_s \cdot \nabla_2 z_s$ ,  $\mu_\sigma = z_t - z_s$ ,  $(U, V, W) = \rho \mu_\sigma (u, v, w)$ ;  $\mathbf{V} = U \mathbf{i} + V \mathbf{j}$ ,  $\Theta = \rho \mu_\sigma \theta$ ,  $\dot{\Sigma} = \rho \mu_\sigma \dot{\sigma}_1$ ,  $F_U, F_V, F_W, F_\Theta$  等包含有科里奥利力项、耗散项或加热项;  $\gamma = C_p / C_v$ 。

## 6 讨论

对于  $g$  的处理, 如前所述, 不论取常值  $g$  或简化方案, 在一定条件下, 都可以使

大气总质量和总能量守恒, 并有相似的能量转换关系, 但它们处理  $g$  的近似程度和其所起的物理作用却有一定差异。如果记取常值  $g$  和简化方案的重力加速度各为  $g_0$ 、 $g_1$ , 准确值为  $g$ , 以经验公式为准, 则  $g_1$  在一定程度上考虑了  $g$  的空间变化, 而  $g_0$  则没有。而且, 由于它们的近似程度不同, 其作用也有所不同。如定义  $E(g_i) = g - g_i$ ,  $i = 0, 1$  则在低纬地区, 在低空  $g_0$  比准确值夸大,  $E(g_0)$  有使  $d\omega/dt$  为负的作用, 使上升气流减弱; 在高纬地区, 在低空  $g_0$  比准确值小,  $E(g_0)$  有使  $d\omega/dt$  为正的作用, 使上升气流夸大; 在对流层上层, 则一般  $g_0$  比准确值大,  $E(g_0)$  有使  $d\omega/dt$  为负的作用; 使上升气流减弱。由于这样, 在低纬地区, 暴雨预报会有强度偏小的可能。至于  $g_1$  如 4.2 节所述, 因为  $\bar{G}$  的水平范围较小,  $g_1$  所引起的  $d\omega/dt$  的虚假作用也较小。

另一方面, 在动、位能之间的转换上, 因  $(K, P) = -\int_G \rho g \tau \omega dv$  由于  $g_i$  导致  $E(g_i)$  会使转换率产生误差。在低纬上升气流控制地区,  $E(g_0)$  使  $(K, P) < 0$ ; 在高纬上升气流控制地区,  $E(g_0)$  使  $(K, P) > 0$ 。不过, 在引用  $g_1$  时这些系统误差都远小于引用  $g_0$  时的误差。

## 7 结论

根据前面的分析讨论, 我们可以得出如下结论:

(1) 把重力加速度的空间变化引入到大气控制方程组中, 是可行的。分析表明: 在绝热无耗散情况下, 采用合适的水平侧边界条件和垂直边界条件, 大气总能量和总质量是守恒的, 其动、位能和动、内能之间的转换关系和取常值  $g$  时的关系一致。

(2) 在 4.2 节和 4.3 节中给出了在球坐标系中, 在高度近似下考虑  $g$  的空间变化的方案和相应的大气控制方程组, 可以作为设计完全弹性非静力模式的基础。

## 参 考 文 献

- 1 杨大升、刘余滨、刘式适, 动力气象学, 北京: 气象出版社, 1980, 88~89.
- 2 刘式适、刘式达, 大气动力学, 上册, 北京: 北京大学出版社, 1991, 6.
- 3 叶家东、李如祥, 积云动力学, 北京: 气象出版社, 1988, 34~36.
- 4 张玉玲, 中尺度大气动力学引论, 北京: 气象出版社, 1999, 148~150.
- 5 Phillips, N. A., Principles of large scale numerical weather prediction, *Dynamic Meteorology*, Ed. P. Morel, Reidel Publishing Company, 1973, 1~96.
- 6 栗原宜夫, 大气动力学入门, 田生春译, 北京: 气象出版社, 1984, 18~24.
- 7 廖洞贤、孙岚, 尺度分析的 3 个问题和尺度分析, 南京气象学院学报, 2002, 25 (4), 449~454.
- 8 Klemp, J. B. et al., Conservative split-explicit time integration methods for the compressible nonhydrostatic equations, NCAR, Boulder, Colorado, 2000.
- 9 Kasahara, K., Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction, *Mon. Wea. Rev.*, 1974, **102**, 509~522.

# The Problem for Consideration of the Spatial Variation of Gravitational Acceleration in the Atmospheric Motion

Liao Dongxian

(National Meteorological Center, China Meteorological Administration, Beijing 100081)

**Abstract** A set of controlling equations for the atmospheric motion in the rotational coordinate system is presented, inclusive of the spatial variation of gravitational acceleration. It can be shown that the total atmospheric mass and energy are conservative, and the conversion between kinetic energy and internal energy, and that between kinetic energy and potential energy are similar to those in the case of constant  $g$ . Then discussions are made on the problems possibly encountered in the application of the aforementioned results in the spherical coordinates and subject to high approximations, a scheme with the spatial variation of  $g$  is suggested. With the scheme a set of controlling equations written in the height terrain following coordinates is given, on the basis of which a fully elastic nonhydrostatic model could be constructed.

**Key words:** spatial variation of gravitational acceleration; conservation of energy; energy conversion

## 附录 连续方程的推导

$\sigma_1$  坐标系

根据 Kasahara, 对于任一垂直坐标  $a$ , 连续方程<sup>[9]</sup>可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial z}{\partial a} \right)_a + \nabla_a \left( \rho \frac{\partial z}{\partial a} v \right) + \frac{\partial}{\partial a} \left( \rho \frac{\partial z}{\partial a} \dot{z}_a \right) = 0, \quad (\text{A.1})$$

令  $a = \sigma_1$ , 从 (34) 式有

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma_1} = z_t - z_s = \mu_\sigma, \quad (\text{A.2})$$

代入方程 (A.1), 则

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu_\sigma \rho) + \nabla_z \cdot (\mu_\sigma \rho v) + \frac{\partial}{\partial \sigma_1} (\mu_\sigma \rho \dot{\sigma}_1) = 0. \quad (\text{A.3})$$