第 29 卷第 1 期
2005 年 1 月
大 气 科 学
Chinese Journal of Atmospheric Sciences
Vol. 29, No. 1
Jan. 2005

大气边界层动力学和植被生态过程耦合的一个简单解析理论

巢纪平[1]　周德刚[2,3]

1 国家海洋环境预报研究中心，北京　100081
2 中国科学院大气物理研究所，北京　100029
3 中国科学院研究生院，北京　100039

摘　要　发展了一个大气边界层动力学和植被某些生态过程相互作用的简单模式，求得了这个耦合模式的解析解，分析了植被反照率和冠层阻抗（气孔阻力）对大气运动及植被温度的影响，这一相互作用的方式可为进一步发展大气运动和生态过程相互作用的、更复杂的数值模拟模式提供参考。

关键词　大气边界层运动　植被生态过程　耦合的解析理论

文章编号　1006-9895（2005）01-0037-10　　**中图分类号**　P461　　**文献标识码**　A

A Simple Analytical Theory of Coupling between the Atmosphere Boundary Layer and Plant

CHAO Ji-Ping[1], and ZHOU De-Gang[2,3]

1 *National Marine Environment Forecast Center, Beijing*　100081
2 *Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing*　100029
3 *Graduate School of the Chinese Acadamy of Sciences, Beijing*　100039

Abstract　A simple model is established after taking the interaction of dynamics of atmosphere boundary layer and some ecological processes of vegetation into consideration, the analytic solution of this couple model is resolved, and the effects of different plant albedos and canopy resistances on atmospheric motion and plant temperature are analyzed. This interaction may supply references to develop further more complex numerical simulation model about interaction of atmospheric motion and ecological process.

Key words　atmospheric motion, boundary layer, plant ecological process, couple analytic theory

1　引言

大气圈和生物圈相互作用的研究是近年来颇受关注的全球变化及全球变化区域响应的一个重要组成部分，而大气运动的动力学过程和植被的生态过程之间的耦合研究又是地—气相互作用研究的核心问题之一。

自 Charney[1] 发展了一个简单的陆—气相互作用模式并用来研究沙漠化的理论后，下垫面过程特别是植被的生态过程对发展全球或区域气候模式的作用已受到广泛的注意，在这方面，Dickinson 等[2] 和 Sillers 等[3] 把下垫面的生态过程和大气物理过程耦合起来的工作无疑是创造性的，对发展气候模式是重要的。在国内这方面的工作也随之开展，如季劲钧等[4] 发展了用于气候研究的简单陆面过程模式，赵鸣等[5] 引入近地层的土壤—植被—大气相互作用的模式，中国科学院大气物理研究所用于气候研究的陆面过程模式[6] 等。从气候变化的角度来看，陆气相互作用可能比海气相互作用更复杂。研究复杂的陆面过程对气候变化的作用，模式的数值模拟虽然是一个强有力的方法，但适度地发展一些有反馈物理过程的较为简单的陆—气相互作用模式，在解析数学的范围内讨论各种物理

收稿日期　2004-10-10 收到
作者简介　巢纪平，男，1932 年出生，中国科学院院士，目前主要从事地球物理流体动力学研究。E-mail：jipingchao@yahoo.com

过程的相对重要性，这仍然是有意义的研究。事实上，Charney 的沙漠化理论就属于这类工作。

本文的目的在于发展一个能在数学上解析处理的简单大气边界层动力学和植被生态过程相互作用的模式，用以讨论影响气候态变化的植被属性的相对重要性。

2 大气动力学—植被生态过程耦合模式

模式结构是这样考虑的，有一个很薄的贴地层，其厚度相当于株冠高度，植被的生态过程主要发生在这一层中，由于层中的能量（例如感热）会与其上的大气温度关联，这意味着大气运动会对这一层中的能量平衡起作用。在株冠高度以上是大气边界层，边界层中除有运动的动力过程外，还有辐射传输过程，即边界层中的运动不是正压的，温度将参与进来，而温度垂直变化方程的底边界的定解条件，又会用到株冠层中的温度。通过这种方式（过程）把大气层和植被层中的物理过程耦合起来了，构成了一个简单的大气边界层运动和植被生态过程相互作用模式。

2.1 植被冠层的能量平衡

考虑在植被冠层主要能量过程为：对太阳辐射的吸收、对来自其上大气层的长波辐射的吸收和本层中长波辐射的发射，由此，辐射平衡表达式为

$$R_{\mathrm{n}} = (1-\alpha_{\mathrm{c}})Q_{\mathrm{a}} + \varepsilon\sigma T_{\mathrm{a}}^4 - \varepsilon\sigma T_{\mathrm{c}}^4, \tag{1}$$

其中，Q_{a} 为到达冠层的太阳辐射通量，T_{c} 为植被的温度，T_{a} 为植被冠层顶处大气的温度，ε 为灰体系数，σ 为斯蒂芬－玻耳兹曼常数，α_{c} 为植被的反照率。注意到在长波辐射通量公式中，温度是用绝对温度写出的，如扣去 $\hat{T}=273\ \mathrm{K}$ 后用摄氏温度写出，并认为在所研究的问题中，摄氏温度的变化区间要比 $\hat{T}$ 小一个量级，则上面的平衡式可写成

$$R_{\mathrm{n}} = (1-\alpha_{\mathrm{c}})Q_{\mathrm{a}} + 4\varepsilon\sigma\hat{T}^3(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{c}}), \tag{2}$$

式中温度已改用摄氏温度。

感热通量为

$$H_{\mathrm{c}} = \frac{\rho c_p(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}})}{r_{\mathrm{a}}}, \tag{3}$$

式中，ρ 为空气密度，c_p 为空气的定压比热，$r_{\mathrm{a}} = (C_{\mathrm{d}}\bar{V})^{-1}$ 为空气阻抗，C_{d} 为空气的拖曳系数，$\bar{V}$ 为参考风速值。

潜热通量为

$$\lambda E_{\mathrm{c}} = \frac{\rho L_{\mathrm{v}}}{r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{c}}}\left[\frac{c_p}{B_{\mathrm{e}}L_{\mathrm{v}}}(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}}) + (1-r)q_{\mathrm{s}}(T_{\mathrm{c}})\right], \tag{4}$$

式中，L_{v} 为相变潜热，B_{e} 为 Bowen 比，r_{c} 为植被冠层阻抗（气孔阻力），r 为相对湿度，q^{s} 为饱和比湿，取植被温度作为参考温度。

假定植被层的能量是平衡的，那么有

$$(1-\alpha_{\mathrm{c}})Q_{\mathrm{a}} - 4\varepsilon\sigma\hat{T}^3(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}}) = \frac{\rho c_p(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}})}{r_{\mathrm{a}}} + \frac{\rho L_{\mathrm{v}}}{r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{c}}}\left[\frac{c_p(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}})}{B_{\mathrm{e}}L_{\mathrm{v}}} + (1-r)q_{\mathrm{s}}(T_{\mathrm{c}})\right]. \tag{5}$$

取 $q_{\mathrm{s}}(T_{\mathrm{c}}) \approx q_{\mathrm{s}}(\hat{T}^{\cdot}) + \partial q_{\mathrm{s}}/\partial T(T_{\mathrm{c}} - \hat{T}^{\cdot}) = \hat{q} + bT_{\mathrm{c}}$，在此 $\hat{q} = q_{\mathrm{s}}(\hat{T}^{\cdot}) - \partial q_{\mathrm{s}}/\partial T \times \hat{T}^{\cdot}$，而 $\hat{T}^{\cdot}$ 为一参考温度，在这个温度值附近，饱和比湿和温度的关系接近线性，b 是由统计定出的一个常数。于是上式可改写成，

$$(1-\alpha_{\mathrm{c}})Q_{\mathrm{a}} - 4\varepsilon\sigma\hat{T}^3(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}}) = \frac{\rho c_p}{r_{\mathrm{a}}}(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}}) + \frac{\rho L_{\mathrm{v}}}{r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{c}}}\left[\frac{c_p(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{a}})}{B_{\mathrm{e}}L_{\mathrm{v}}} + (1-r)(\hat{q} + bT_{\mathrm{c}})\right]. \tag{5'}$$

在这一贴地层或植被覆盖层的能量平衡中，对植被的属性引进两个宏观参数，一是植被冠层阻抗 r_{c}，另一是植被的反照率 α_{c}。对多数植物来讲，温度高有利于它们生长、变得茂盛，因此有理由认为，当温度高时，茂盛的植被反照率会变小，即设 $\alpha_{\mathrm{c}} = \hat{\alpha}_{\mathrm{c}} - aT_{\mathrm{c}}$，$T_{\mathrm{c}} > 0$，如温度不为正，仍有 $\alpha_{\mathrm{c}} = \hat{\alpha}_{\mathrm{c}}$，$a$ 由观测资料统计定出。与这一假定相似的例子是，在研究冰期气候形成时就假定了冰面的反照率与温度有反比关系[7]。

当上面各种能量或热通量处于平衡状态时，得到

$$T_{\mathrm{c}} = a_1 T_{\mathrm{a}} + a_2, \tag{6}$$

式中，

$$a_1 = \frac{4\varepsilon\sigma\hat{T}^3 + \dfrac{\rho c_p}{r_{\mathrm{a}}}\dfrac{\rho c_p}{B_{\mathrm{e}}(r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{c}})}}{4\varepsilon\sigma\hat{T}^3 + \dfrac{\rho c_p}{r_{\mathrm{a}}} + \dfrac{\rho c_p + \rho L_{\mathrm{v}}(1-r)bB_{\mathrm{e}}}{B_{\mathrm{e}}(r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{c}})} - aQ_{\mathrm{a}}},$$

$$a_2 = \frac{(1-\hat{\alpha}_{\mathrm{c}})Q_{\mathrm{a}} - \dfrac{\rho L_{\mathrm{v}}(1-r)\hat{q}}{r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{c}}}}{4\varepsilon\sigma\hat{T}^3 + \dfrac{\rho c_p}{r_{\mathrm{a}}} + \dfrac{\rho c_p + \rho L_{\mathrm{v}}(1-r)bB_{\mathrm{e}}}{B_{\mathrm{e}}(r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{c}})} - aQ_{\mathrm{a}}}.$$

当在植被覆盖层中存在上面所述的能量平衡时，就把植被温度和植被冠层顶处的大气温度联系起来了，这也表示了大气运动通过边界层底部的温度影响着植被覆盖层的生态温度。

2.2 边界层大气运动方程

考虑到植被的生态过程首先影响的是大气的行星边界层，现给出边界层的动力学方程。在 (x,z) 剖面上边界层大气运动方程为

$$fu = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{7}$$

$$f \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{\bar{T}} \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

由（9）式，引入流函数 ψ，

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{10}$$

代入（7）式，得到

$$f \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{11}$$

取条件

$$z \to \infty, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \to 0, \quad \psi \to 0, \tag{12}$$

由此，有

$$\psi = -\frac{\mu}{f} \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{13}$$

由（8）、（10）、（13）式给出

$$w = -\frac{\mu g}{f^2 \hat{T}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{14}$$

$$u = \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}, \tag{15}$$

以及

$$v = -\frac{g}{f\hat{T}} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\infty} T \mathrm{d}z, \tag{16}$$

在此已假定 $z \to \infty$，$v \to 0$。至此，当大气温度已知后可算出运动场。

2.3 热量传输方程

在辐射能传递、感热垂直输送和垂直运动相平衡下，热量平衡方程为

$$\left(\rho c_p N^2 \frac{\hat{T}}{g}\right) w = K_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \sum_j \alpha'_j \rho_c (A_j + B_j - 2E_j) + \alpha'' \rho_c Q, \tag{17}$$

式中，$N = \left(\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 Brunt-Vaisala 频率。而 α'_j 和 α'' 分别为对波长为 λ_j 的长波辐射的吸收系数和对太阳辐射的吸收系数，A_j 和 B_j 分别为在波长 λ_j 区间内向下和向上的长波辐射通量，E_j 为在该波长区间内的黑体辐射能量，ρ_c 为吸收介质密度，Q 为太阳辐射通量，K_T 为热量的垂直湍流交换系数。

考虑到（14）式有

$$-\left(\frac{N}{f}\right)^2 K_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = K_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \sum_j \alpha'_j \rho_c (A_j + B_j - 2E_j) + \alpha'' \rho_c Q. \tag{18}$$

按郭晓岚[8]和巢纪平、陈英仪[7]处理长波辐射通量传输过程的方案，即将长波辐射谱按某一准则分成波长短的谱区和波长长的谱区，经过这样的分割处理后，（18）式的最终形式为

$$-\left(\frac{N}{f}\right)^2 K_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = K_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{8 r^{\cdot} \varepsilon \sigma \hat{T}^3}{\alpha'_s \rho_c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - 2(1 - r^{\cdot}) \alpha'_w \varepsilon \sigma \rho_c T^4 + \alpha'' \rho_c Q + C_0 + C_1 z, \tag{19}$$

式中，α'_s，α'_w 分别为波长短的辐射区和波长长的辐射区中介质的平均吸收系数，$r^{\cdot}$ 表示物质的辐射能量在波长短的辐射区中的部分与总辐射能量之比。

注意到，方程（19）中有两个积分常数，其中之一，考虑到 $z \to \infty$ 时，物理量有限，因此，$C_1 = 0$，而 C_0 可用下面的方法求得，设在充分大的侧向边界及大气顶部没有能量输入，能量只能在底部边界输入，因此有

$$C_0 = 2(1 - r^{\cdot}) \alpha'_w \varepsilon \sigma \rho_c \bar{T}^4 - \alpha'' \rho_c \bar{Q} - \frac{1}{H}\left(K_T + \frac{8 r^{\cdot} \varepsilon \sigma \hat{T}^3}{\alpha'_s \rho_c}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z \approx 0}, \tag{20}$$

式中，H 为区域的垂直厚度。如果区域取得相当大，上式最后一项相当小，可以略去，而在这一区域中，区域平均温度由辐射平衡决定，即 $\varepsilon \sigma \bar{T}^4 = (1 - \bar{\alpha}) \bar{Q}$。由此给出

$$C_0 = [2 \alpha_w \rho_c (1 - r^{\cdot})(1 - \bar{\alpha}) - \alpha'' \rho_c] \bar{Q}, \tag{21}$$

于是方程（19）为

$$\left(\frac{N}{f}\right)^2 K_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(K_T + \frac{8 r^{\cdot} \varepsilon \sigma \hat{T}^3}{\alpha'_s \rho_s}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - 8(1 - r^{\cdot}) \alpha'_w \rho_c \varepsilon \sigma \hat{T}^3 T = 2(1 - r^{\cdot}) \alpha'_w \rho_c [\varepsilon \sigma \hat{T}^4 - (1 - \bar{\alpha}) \bar{Q}] - \alpha'' \rho_c (Q - \bar{Q}), \tag{22}$$

这是大气边界层中动力—辐射耦合模式的基本方程。

方程（22）的定解条件之一为

$$z \to \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \tag{23}$$

考虑到植被覆盖层很薄，可将下边界条件置放在 $z \approx 0$ 处，在这个界面上感热、潜热和辐射通量是平衡的，即有

$$z \approx 0,$$

$$-\rho c_p K_l \frac{\partial T}{\partial z} = (1 - \alpha) Q_a + 4 \varepsilon \sigma \hat{T}^3 (T - T_e) - \frac{\rho L_v}{r_a + r_c}\left[\frac{c_p}{B_e L_v}(T_e - T) + (1 - r)(\hat{q} + bT)\right], \tag{24}$$

式中，T_a 的下标已去掉，T_e 可用（6）式替换成 T。从这个边界条件可以看到，植被的生态过程通过长波辐射通量和潜热通量又影响了边界层中的大气运动，

由此可见，这是一个简单的植被生态和行星边界层大气运动相互作用的模式。

2.4 模式的数学表达

现把上面各种物理过程汇总成一个数学问题。首先对方程进行无量纲处理，引进 $z=(\rho c_p K_l)z'$，$x=(N/f)\sqrt{K_v}x'$，方程（22）可写成（略去 x，z 的上标撇号），

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\hat{a}^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\hat{d}^2 T=\Omega(x,z), \tag{25}$$

式中

$$\hat{a}^2=\left(K_T+\frac{8r^{\cdot}\varepsilon\sigma\hat{T}^3}{\alpha'_s\rho_s}\right)\Big/(\rho c_p K_l)^2,$$

$$\hat{d}^2=8(1-r^{\cdot})\alpha'_w\rho_c\varepsilon\sigma\hat{T}^3,$$

$$\Omega(x,z)=2(1-r^{\cdot})\alpha'_w\rho_c[\varepsilon\sigma\hat{T}^4-(1-\bar{\alpha})\bar{Q}]-\alpha''\rho_c(Q-\bar{Q}).$$

垂直边界条件为

$$z=0,\qquad -\frac{\partial T}{\partial z}=AT+S(x), \tag{26}$$

$$z=\infty,\qquad \frac{\partial T}{\partial z}=0, \tag{27}$$

式中，

$$A=4\varepsilon\sigma\hat{T}^3+\frac{\rho c_p}{B_e(r_a+r_c)}-\frac{\rho L_v(1-r)b}{(r_a+r_c)}-\left[4\varepsilon\sigma\hat{T}^3+\frac{\rho c_p}{B_e(r_a+r_c)}\right]a_1, \tag{28a}$$

$$S=(1-\alpha)Q_a-\frac{\rho L_v(1-r)\hat{q}}{r_a+r_c}-\left[4\varepsilon\sigma\hat{T}^3+\frac{\rho c_p}{B_e(r_a+r_c)}\right]a_2. \tag{28b}$$

方程（25）和条件（26）、（27）构成了一个二阶椭圆型方程的混合边界条件问题。问题的侧向边界条件视问题的提法而定。

3 热力学耦合模式

由方程（25）注意到，如果强迫源在区域中是水平均匀的，对一个无侧向边界强迫的线性问题来讲，响应出的温度分布在 x 方向也是均匀的，由（14）、（15）和（16）式可以看到，此时在大气边界层中垂直运动及水平运动均为零，也即边界层的动力过程将不在这一相互作用模式中起作用。这样，方程（25）中只有辐射能传输和热量垂直湍流交换之间的平衡，即动力学模式退化成单纯的热力学模式。

在这种情况下，方程（25）变成

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2}-C^2 T=\Omega^{\cdot}(z), \tag{29}$$

式中，$C^2=\hat{d}^2/\hat{a}^2$，$\Omega^{\cdot}=\Omega/\hat{a}^2$。边界条件仍为（26）、（27）式，但（26）式中的 A 和 S 不再是 x 的函数，分别取常数 $A^{\cdot}$ 和 $S^{\cdot}$，边界条件（26）式改写为

$$z=0,\qquad -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=A^{\cdot}T+S^{\cdot} \tag{30}$$

方程（29）满足条件（30）、（27）式的解为

$$T(z)=\frac{S^{\cdot}\mathrm{e}^{-Cz}}{C-A^{\cdot}}-\frac{1}{2C}\Big[\frac{C+A^{\cdot}}{C-A^{\cdot}}\int_0^{\infty}\Omega^{\cdot}(\xi)\mathrm{e}^{-C(\xi+z)}\mathrm{d}\xi+\int_0^{z}\Omega^{\cdot}(\xi)\mathrm{e}^{-C(z-\xi)}\mathrm{d}\xi+\int_z^{\infty}\Omega^{\cdot}(\xi)\mathrm{e}^{-C(\xi-z)}\mathrm{d}\xi\Big]. \tag{31}$$

解（31）是考虑了大气边界层中的热力过程（即辐射过程）和贴地植被层中生态过程后温度在垂直方向的分布。我们称这一温度为热力学平衡温度，标以 T_t。

假定，太阳辐射垂直方向上的分布为 $Q=S_0-(S_0-Q_a)\mathrm{e}^{-z/H}$，取 $S_0=340\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$，$Q_a=200\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$，$H=3\times10^3\mathrm{m}$，上述各方程中的参数除反照率 α_c 和气孔阻力 r_c 待定外，其他各参数分别取值如下：$\hat{q}=3.46\times10^{-4}$，$b=6.86\times10^{-4}(°)^{-1}$，$C_d=2.75\times10^{-3}$，$\bar{V}=2.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$r=0.5$，$K_v=K_T=3.0\times10^4\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot(°)^{-1}}$，$N^2=1.2\times10^{-4}\mathrm{s^{-2}}$，$f=1\times10^{-4}\mathrm{s^{-1}}$，$\rho=1.29\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$\rho_c=6\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$\alpha'_s=10\ \mathrm{m^2\cdot kg^{-1}}$，$\alpha'_w=0.125\ \mathrm{m^2\cdot kg^{-1}}$，$\alpha''=2.5\times10^{-2}\ \mathrm{m^2\cdot kg^{-1}}$。

分别讨论不同反照率和冠层阻抗对热力学温度的影响。图 1a，b 是 $r_c=200\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$ 和分别取反照率 $\alpha_c=0.16$ 和 $\alpha_c=0.26$ 时的结果，前者算得近地面空气温度为 13.2℃，植被温度为 18.7℃，后者近地面空气温度为 10.6℃，植被温度为 15.8℃，可见当反照率增加后植被和空气的温度均降低。

先不考虑反照率随温度的反馈，来看冠层阻抗对热力学平衡温度的影响。取 $\alpha_c=0.16$，冠层阻抗分别取 $r_c=150\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$ 和 $250\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$，结果如图 2a，b 中的实线所示，这时近地面温度分别为 11.7℃，14.5℃，相应植被温度分别为 16.8℃，20.5℃。由结果可见，当冠层阻抗增加时，植被和空气的温度相应增加。

当考虑植被温度对反照率有反馈时，比如 $\alpha_c=\hat{\alpha}_c-aT_c$，$a$ 取 0.01，相当植被温度增加 1℃，反照率减小 0.01。如果以图 1a 中的热力学平衡温度解作为参照，即取 $r_c=200\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$ 和 $\alpha_c=0.16$，此时植被温度 $T_{c0}=18.7$℃，把反照率的表达式修改为：$\alpha_c=$

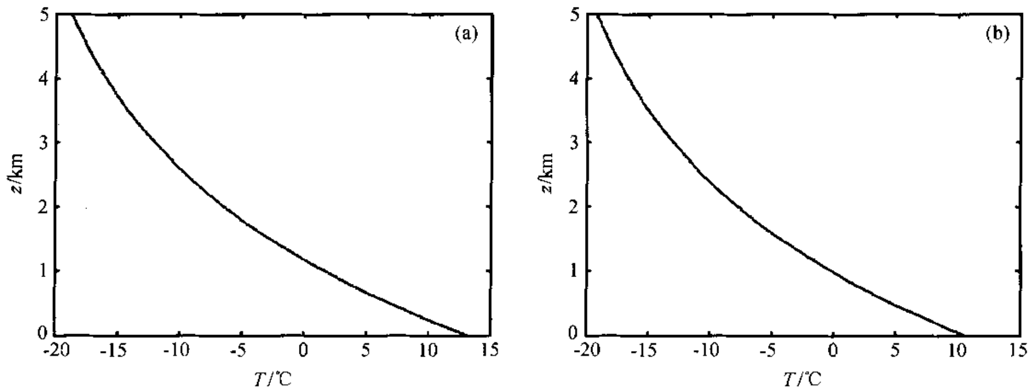

图 1　不同反照率 $\alpha_c=0.16$（a）和 $\alpha_c=0.26$（b）对热力学平衡温度的影响

Fig. 1　The effect of different albedos $\alpha_c=0.16$（a）和 0.26（b）on thermodynamic balance temperature

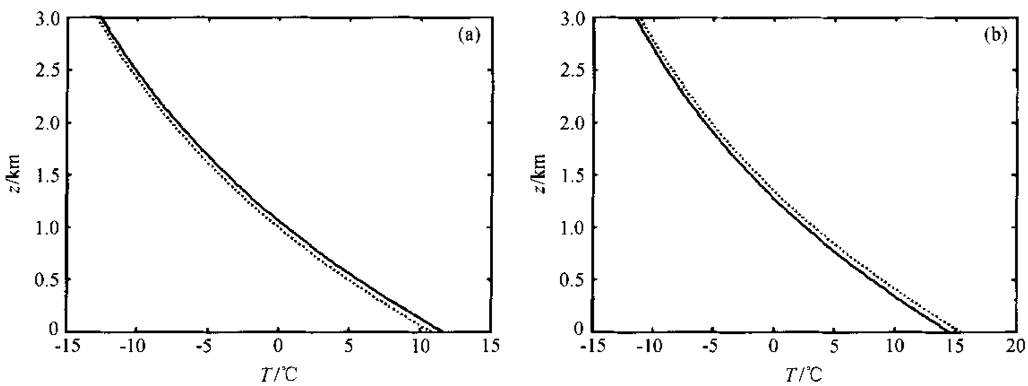

图 2　不同冠层阻抗 $r_c=150\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$（a）和 $r_c=250\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$（b）对热力学平衡温度的影响

Fig. 2　The effect of different canopy resistances $r_c=150\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$（a）和 $250\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$（b）on thermodynamic balance temperature

$\hat{\alpha}_c-a(T_c-T_{c0})$，则如果取 $\hat{\alpha}_c=0.16$，当 $r_c=200\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$，显然热力学温度解就回到了图 1a，此时植被温度 $T_c=T_{c0}$，反照率 $\alpha_c=\hat{\alpha}_c=0.16$，也就是说这时不存在反馈。当取 $r_c=150\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$和 $250\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$，反照率的反馈机制起作用，其结果分别见图 2a，b 中的点线，此时计算出近地面温度和植被温度分别为 10.8℃，15.5℃和 15.9℃，21.6℃。与没有反照率反馈的结果相比较，前者当冠层阻抗从 $150\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$增加到 $250\ \mathrm{s\cdot m^{-1}}$时，地面气温增加了 2.8℃，当反照率存在随温度的变化有反馈时，同样的冠层阻抗变化使地面气温增加了 4.7℃。这一对比表明反照率随温度变化的反馈是重要的，如何提出一个更合理的反馈方案是值得进一步研究的。

4　动力学耦合模式的解析解

现以热力学耦合模式得到的热力学平衡温度作为背景温度，将动力学耦合模式得出的温度扣去背景温度，即可分析动力学过程在气候中的作用。令 $T'=T-T_t$，方程（25）可写成

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}+\hat{a}^2\frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}-\hat{d}^2T'=\Omega'(x,z),\tag{32}$$

式中，$\Omega'=\Omega-\hat{a}^2\mathrm{d}^2T_t/\mathrm{d}z^2+\hat{d}^2T_t$。同时，认为边界条件（26）式右边的 AT 项中 A 变化不大，近似取作常数 $A^{\cdot}$，（26）式改写为

$$z=0,\qquad \frac{\partial T'}{\partial z}+A^{\cdot}T'=-S'(x),\tag{33}$$

式中 $S'=S+\mathrm{d}T_t/\mathrm{d}z+AT_t$。（27）式改为

$$z=\infty,\qquad \frac{\partial T'}{\partial z}=0.\tag{34}$$

问题的侧向条件为

$$|x|\to\infty,\qquad T'=0,\tag{35}$$

这个数学物理问题的解法见附录 1。

当考虑不同的植被分布时，有相应的 $S'(x)$和 $\Omega'(x,z)$表达式，进而可以求出不同的动力过程解。这里只简单考虑 $S'(x)$的影响而不考虑 $\Omega'(x,z)$，即令 $\Omega'(x,z)=0$，于是附录中（A23）式可简化为

$$T'(x,z)=\frac{\hat{a}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S'(x'')\cdot$$

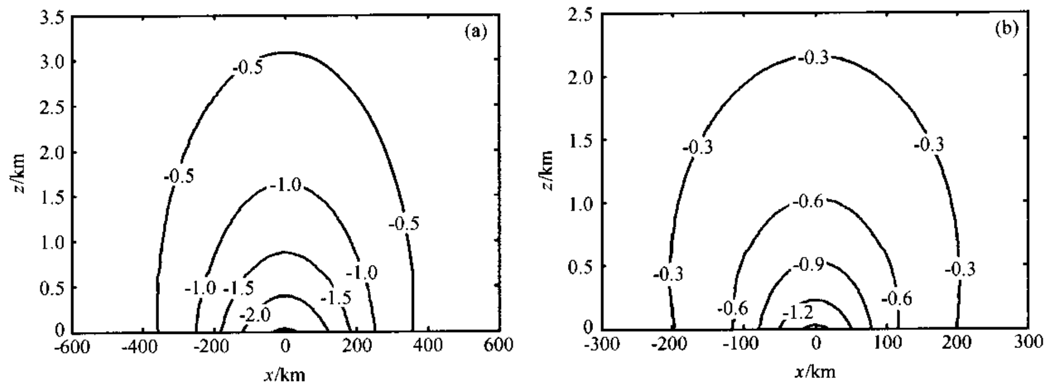

图 3　植被阻抗在不同水平分布范围下的动力学解：(a) $L=150$ km；(b) $L=50$ km

Fig. 3　Dynamic temperature in different horizontal distributions of plant resistance：(a) $L=150$ km；(b) $L=50$ km

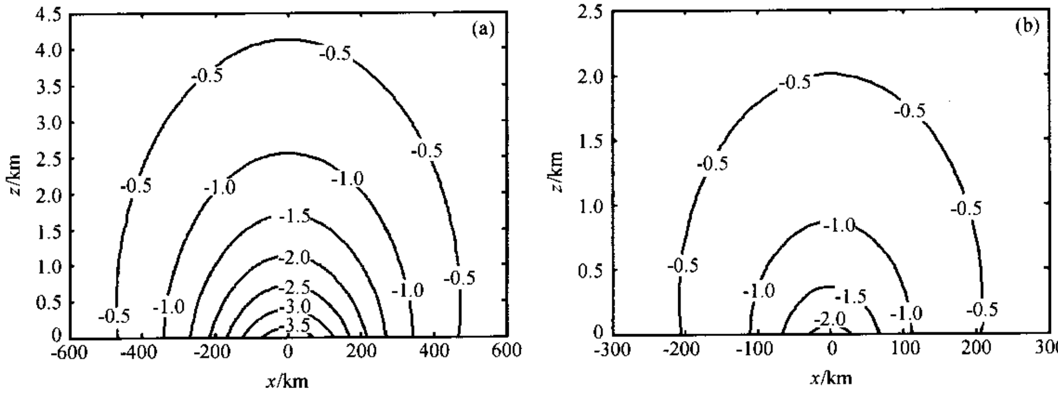

图 4　反照率存在随温度反馈的动力学解：(a) $L=150$ km；(b) $L=50$ km

Fig. 4　Dynamic temperature with a feedback of temperature on albedo：(a) $L=150$ km；(b) $L=50$ km

$$K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2(x''-x)^2+z^2}\right)\mathrm{d}x''+$$
$$\frac{A^{\cdot}\hat{a}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S'(x'')\mathrm{d}x''\int_{z}^{\infty}\mathrm{e}^{A^{\cdot}(z''-z)}K_0\cdot$$
$$\left[\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2(x''-x)^2+z''^2}\right]\mathrm{d}z'', \qquad (36)$$

式中，K_0 为第二类修正贝赛尔函数。

4.1　植被不同水平分布格局的影响

考虑植被的属性在水平方向上的分布是不均匀的，例如取植被阻抗在水平方向上分布为：$r_c=200-100\mathrm{e}^{-x^2/(2L^2)}$ $\mathrm{s\cdot m^{-1}}$，$L=150$ km，其他参数与图 1a 中所取的参数一样，即以图 1a 的热力学解为基础，由此计算出的动力学解如图 3a 所示，在 $x=0$ 的中心处温度距平可达到 -2.5℃。如果改变植被阻抗差异的水平分布格局，令 $L=50$ km，其他参数与图 3a 相同，其动力学解见图 3b。两图相比较，可以发现当植被阻抗差异的水平范围变窄时，其动力学温度解由 -2.5℃变为 -1.5℃，幅度变小，解在垂直和水平方向上的分布范围变窄。

4.2　反照率存在随温度反馈的影响

当考虑反照率存在随温度的反馈时，采用上面反照率随温度反馈的表达形式$\alpha_c=\hat{\alpha}_c-a(T_c-T_{c0})$，$\hat{\alpha}_c=0.16$，取植被的热力学解温度 $T_{c0}=18.7$℃，分别考虑植被不同水平分布范围（与图 3 相同的分布）的影响，如果 $a=0$，则动力学解回到图 3 所示的解，现取 $a=0.01$，动力学解分别如图 4a，b 所示。与图 3 相比，可以发现考虑反照率随温度反馈后，植被阻抗差异造成的动力学解幅度增加，同时它们在垂直方向和水平方向的影响范围也增加。

5　大气动力学场的计算

注意到，虽然现在温度已解出，但从（14）式不能直接算出垂直速度，这是因为（14）式只在流体内部表明垂直运动和温度场的关系，而垂直运动尚需受边界条件的约束，为此，可对（10）式求旋度，将（14）、（15）式代入，得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{37}$$

改写成

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{38}$$

式中，

$$\Phi = \psi + \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\frac{\partial T}{\partial x}.$$

边界条件

$$z = 0, \qquad \psi = 0, \tag{39}$$

地面是一条流线，确保垂直运动为零，因此有

$$z = 0, \qquad \Phi = \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\frac{\partial T(x, 0)}{\partial x}, \tag{40}$$

右端已知。考虑到 $z \to \infty$，$\psi \to 0$，$\partial T/\partial x \to 0$，于是有

$$z \to \infty, \qquad \Phi \to 0. \tag{41}$$

类似地考虑，给出

$$|x| \to \infty, \qquad \Phi \to 0. \tag{42}$$

当 Φ 算出后，

$$\psi = \Phi - \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\frac{\partial T}{\partial x}.$$

方程的解为

$$\psi(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\frac{\partial T(x', 0)}{\partial x}\frac{z}{(x' - x)^2 + z^2}\mathrm{d}x' - \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\frac{\partial T}{\partial x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\frac{\partial T(x + \tan\alpha z, 0)}{\partial x}\mathrm{d}\alpha - \frac{\mu g}{f^2 \hat{T}}\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{43}$$

当流函数求出后，可以计算出 u，w，由（16）式可计算出 v。这里给出与图 3 所示温度动力学解相对应的大气运动的动力学场（见图 5），其中实线表示速度 v 的空间分布，由流函数算得的 u，w 由矢量线给出。由图 5 可以看出，在低层水平辐合，导致在中间有上升气流；植被差异水平分布范围越宽，u，w 的值越小，差异的水平范围越窄，u，w 的值越大。另外，v 和 u 的分布符合科里奥利力场应起的作用，表明 u，v，w 这三个场在动力学上是协调的。

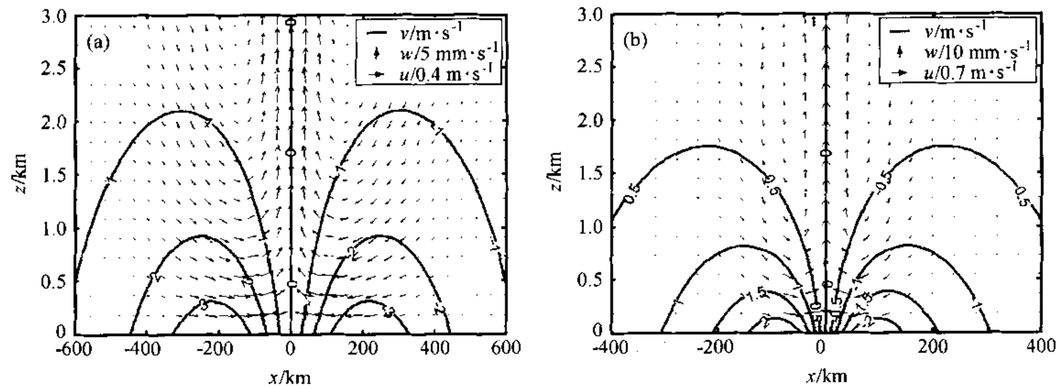

图 5　植被阻抗不同水平分布下的大气动力学场：(a) $L = 150$ km；(b) $L = 50$ km

Fig. 5　Atmosphere dynamic flow in different horizontal distributions of plant resistance：(a) $L = 150$ km；(b) $L = 50$ km

值得注意的是，在轴中心的温度虽然低于两侧，但空气是上升的，这显然是动力学的结果。可以预料，如果空气是湿的，水汽可以在上升过程中相变，则潜热的释放，将使温度增加，那么中心附近的低温将向高温转化，从而改变植被上空温度分布的格局，这是绿洲生态动力学研究中一个值得重视的问题。

6　结论

本文在考虑了行星边界层大气中的动力学过程和辐射传输过程后，将边界层的物理场与下垫面植被冠层中的热量平衡方程相耦合，从而建立一个简单的边界层大气运动和植被生态过程相耦合的理论模式，并对该耦合模式进行了解析求解。用此解析理论分析了不同的植被反照率和阻抗对热力学解和动力学解的影响，进而考虑了反照率随温度的反馈的作用。这一相互作用的方式可为进一步发展大气运动和生态过程相互作用的、更复杂的数值模拟模式提供参考。

由于陆面过程对气候的影响有两种显然的过程是重要的，一是改变地表反照率从而改变局地辐射通量和温度；二是通过蒸发和降水改变系统中热量收支。对于前者本文简单探讨了植被反照率和温度的反馈对大气运动及植被温度的影响，对于后者，通过解析求解出的温度场和垂直运动场的格局初步定性地提出潜热在绿洲生态动力学中的重要作用，它将改变绿洲上空温度分布格局，从而影响绿洲的生消。这两种过程有待于进一步的研究。

参考文献

[1] Charney J G. Dynamics of deserts and drought in the Sahel. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1975, **101**: 193～202

[2] Dickinson R E. Modeling evapotranspiration for three-dimensional global climate models. *Geophys. Monograph*, 1984, **29**: 58～72

[3] Sillers P J, Mintz Y. The design of a Simple Biosphere model (SIB) for use within general circulation models. *J. Atmos. Sci.*, 1986, **43**: 505～531

[4] Ji J J, Hu Y C. A simple land surface process model for use in climate study. *Acta Meteorologica Sinica*, 1989, **3**: 342～351

[5] 赵鸣，江静，苏炳凯，等. 一个引入近地层的土壤—植被—大气相互作用模式. 大气科学，1995，**19** (4)：405～414
Zhao M, Jiang J, Su B K, et al. An interactive model between soil-atmosphere including surface layer. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 1995, **19** (4): 405～414

[6] Dai Y J, Zeng Q C. A land surface model (IAP94) for climate studies, Part I: Formulation and validation in off-line experiments. *Adv. Atmos. Sci.*, 1997, **14** (4): 433～460

[7] 巢纪平，陈英仪. 二维能量平衡模式中极冰—反照率的反馈对气候的影响，中国科学，1979，**12**：1198～1207
Chao J P, Chen Y Y. The effect of pole ice-albedo feedback on climate in a two-dimension energy balance model. *Science in China* (in Chinese), 1979, **12**: 1198～1207

[8] Kuo H L. On a simplified radiative-conductive heat transfer equation. *Pure & Appl. Geophys.*, 1973, **109**: 1870～1876

附录　动力学耦合模式方程的解析求解

解分成两个部分：A：一部分为齐次方程满足非齐次边界条件的解，即

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \hat{a}^2 \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} - \hat{d}^2 T' = 0 , \tag{A1}$$

及条件(33)～(35)式；B：另一部分为非齐次方程（32）满足齐次边界条件，

$$\frac{\partial T'}{\partial z} = - A^{\cdot} T' , \tag{A2}$$

及（34)、(35）式的解。

引进傅立叶变换

$$T'(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}'(k,z) e^{ikx} dk , \tag{A3}$$

而

$$\tilde{T}'(k,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T'(x'',z) e^{-ikx''} dx'' . \tag{A4}$$

对问题 A，有

$$\frac{d^2 \tilde{T}'}{dz^2} - K^2 \tilde{T}' = 0 , \tag{A5}$$

式中，$K^2 = (k^2 + \hat{d}^2)/\hat{a}^2$。它满足条件

$$z = 0, \quad \frac{d\tilde{T}'}{dz} = - A^{\cdot} \tilde{T}' - \tilde{S}' , \tag{A6}$$

式中

$$\tilde{S}'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S'(x'') e^{-ikx''} dx'' ,$$

$$z \to \infty , \quad \frac{d\tilde{T}'}{dz} = 0 , \tag{A7}$$

因而解为(标以下标 1)

$$T'_1(x,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S'(x'') e^{-A^{\cdot} z} \frac{e^{-(K-A^{\cdot})z}}{K - A^{\cdot}} e^{ik(x-x'')} dk dx'' , \tag{A8}$$

令

$$I(z'',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Kz''} e^{ikt} dk , \tag{A9}$$

$$J(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(K-A^{\cdot})z}}{K-A^{\cdot}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k=\int_{z}^{\infty}\mathrm{e}^{A^{\cdot}z''}I\mathrm{d}z'', \tag{A10}$$

在（A10）中，对 $K>A^{\cdot}$，z''在$[z,+\infty)$范围内积分是收敛的。注意到

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z''}{\hat{a}}\sqrt{k^2+\hat{d}^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\hat{d}z''}{\sqrt{(\hat{a}t)^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{(\hat{a}t)^2+z''^2}\right), \tag{A11}$$

式中$K_1(r)$为第二类修正贝赛尔函数。由此得

$$J=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{z}^{\infty}\frac{\hat{d}\mathrm{e}^{A^{\cdot}z''}z''}{\sqrt{\hat{a}^2(x-x'')^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2(x-x'')^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'', \tag{A12}$$

最后积分为

$$T_1'(x,z)=\frac{\hat{d}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{z}^{\infty}\frac{S'(x'')z''\mathrm{e}^{-A^{\cdot}(z-z'')}}{\sqrt{\hat{a}^2(x-x'')^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2(x-x'')^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z''\mathrm{d}x''. \tag{A13}$$

问题 B，应用傅立叶变换后，方程（31）为

$$\frac{\partial^2\tilde{T}'}{\partial z^2}-K^2\tilde{T}'=\tilde{\Omega}'(k,z), \tag{A14}$$

其中，

$$\tilde{\Omega}'(k,z)=\frac{1}{\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int\Omega'(x'',z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x''.$$

条件为

$$z=0,\qquad\frac{\partial\tilde{T}'}{\partial z}+A^{\cdot}\tilde{T}'=0, \tag{A15}$$

$$z\to\infty,\qquad\frac{\partial\tilde{T}'}{\partial z}=0. \tag{A16}$$

应用格林函数求解，格林函数为

$$0\leqslant z\leqslant\xi,\qquad G(z,\xi)=-\frac{1}{2K}\left[\mathrm{e}^{-K(\xi-z)}+\left(\frac{K+A^{\cdot}}{K-A^{\cdot}}\right)\mathrm{e}^{-K(z+\xi)}\right], \tag{A17a}$$

$$\xi<z\leqslant\infty,\qquad G(z,\xi)=-\frac{1}{2K}\left[\mathrm{e}^{-K(z-\xi)}+\left(\frac{K+A^{\cdot}}{K-A^{\cdot}}\right)\mathrm{e}^{-K(z+\xi)}\right]. \tag{A17b}$$

由此，得到这一部分的解为（标以下标 2）

$$\begin{aligned}T_2'(x,z)=&\frac{1}{2\pi\hat{a}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\Omega'(x'',\xi)G(z,\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x'')}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}k\mathrm{d}x''=\\&-\frac{1}{4\pi\hat{a}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{z}\Omega'(x'',\xi)\mathrm{e}^{-K(z-\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\frac{1}{K}e^{ik(x-x'')}\mathrm{d}k\mathrm{d}x''-\\&\frac{1}{4\pi\hat{a}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{z}^{\infty}\Omega'(x'',\xi)\mathrm{e}^{-K(\xi-z)}\mathrm{d}\xi\right]\frac{1}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x'')}\mathrm{d}k\mathrm{d}x''-\\&\frac{1}{4\pi\hat{a}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}\Omega'(x'',\xi)\mathrm{e}^{-K(z+\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\left(\frac{2}{K-A^{\cdot}}-\frac{1}{K}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x'')}\mathrm{d}k\mathrm{d}x''.\end{aligned} \tag{A18}$$

应用与问题 A 相同的方法，令 $t=x-x''$，容易求得：

$$\begin{aligned}T_2'(x,z)=&-\frac{1}{2\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{z}\int_{z-\xi}^{\infty}I\mathrm{d}z''\Omega'(x'',\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x''-\frac{1}{2\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{z}^{\infty}\int_{\xi-z}^{\infty}I\mathrm{d}z''\Omega'(x'',\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x''-\\&\frac{1}{\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{\xi+z}^{\infty}\mathrm{e}^{Az''}I\mathrm{d}z''\Omega'(x'',\xi)\mathrm{e}^{-A^{\cdot}(\xi+z)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x''+\frac{1}{2\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{\xi+z}^{\infty}I\mathrm{d}z''\Omega'(x'',\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x''=\\&-\frac{1}{2\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{z}\int_{z-\xi}^{z+\xi}I\mathrm{d}z''\Omega'(x'',\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x''-\frac{1}{2\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{z}^{\infty}\int_{\xi-z}^{\xi+z}I\mathrm{d}z''\Omega'(x'',\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x''-\\&\frac{1}{\hat{a}^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}J(\xi+z,t)\Omega'(x'',\xi)\mathrm{e}^{-A^{\cdot}(\xi+z)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x''.\end{aligned} \tag{A19}$$

把（A11)、（A12）中式 I，J 的值带入，可求得总的表达式为

$$
\begin{aligned}
T'(x,z) = & \frac{\hat{d}^2}{\hat{a}\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S'(x'')\mathrm{e}^{-A^{\cdot} z}\mathrm{d}x''\int_{z}^{\infty}\frac{\hat{a}z''\mathrm{e}^{A^{\cdot} z''}}{\hat{d}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}^2}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'' - \\
& \frac{\hat{d}^2}{2\hat{a}^3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x''\int_{0}^{z}\Omega'(x'',\xi)\mathrm{d}\xi\int_{z-\xi}^{\xi+z}\frac{\hat{a}z''}{\hat{d}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'' - \\
& \frac{\hat{d}^2}{2\hat{a}^3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x''\int_{z}^{\infty}\Omega'(x'',\xi)\mathrm{d}\xi\int_{\xi-z}^{\xi+z}\frac{\hat{a}z''}{\hat{d}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'' - \\
& \frac{\hat{d}^2}{\hat{a}^3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x''\int_{0}^{\infty}\Omega'(x'',\xi)\mathrm{e}^{A^{\cdot}(\xi+z)}\mathrm{d}\xi\int_{\xi+z}^{\infty}\frac{\hat{a}\mathrm{e}^{A^{\cdot} z''}z''}{\hat{d}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z''.
\end{aligned}
\tag{A20}
$$

考虑到

$$
\int_{z}^{\infty}\frac{\hat{a}z''}{\hat{d}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'' = \frac{\hat{a}^2}{\hat{d}^2}K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right), \tag{A21}
$$

$$
\begin{aligned}
& \int_{z}^{\infty}\frac{\hat{a}\mathrm{e}^{A^{\cdot} z''}z''}{\hat{d}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}}K_1\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'' = \\
& \quad \frac{\hat{a}^2\mathrm{e}^{A^{\cdot} z}}{\hat{d}^2}K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z^2}\right) + \frac{\hat{a}^2A^{\cdot}}{\hat{d}^2}\int_{z}^{\infty}\mathrm{e}^{A^{\cdot} z''}K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2t^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'',
\end{aligned}
\tag{A22}
$$

式中 $K_0(r)$ 为第二类修正贝赛尔函数。

（A20）式可进一步简化为

$$
\begin{aligned}
T'(x,z) = & \frac{\hat{a}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S'(x'')K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2(x''-x)^2+z^2}\right)\mathrm{d}x'' + \\
& \frac{A^{\cdot}\hat{a}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x''\int_{z}^{\infty}\left[S'(x'') - \int_{0}^{z''-z}\Omega'(x'',\xi)\mathrm{e}^{-A^{\cdot}\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{A^{\cdot}(z''-z)}K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}(x''-x)^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'' - \\
& \frac{1}{2\pi\hat{a}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x''\int_{-z}^{\infty}\Omega'(x'',z''+z)K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2(x''-x)^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z'' - \\
& \frac{1}{2\pi\hat{a}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x''\int_{z}^{\infty}\Omega'(x'',z''-z)K_0\left(\frac{\hat{d}}{\hat{a}}\sqrt{\hat{a}^2(x''-x)^2+z''^2}\right)\mathrm{d}z''.
\end{aligned}
\tag{A23}
$$