

数值预报模式动力框架发展的若干问题综述

纪立人^{1,2} 陈嘉滨¹ 张道民¹ 汪厚君³

¹ 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029

² 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

³ University of Maryland, Maryland, USA

摘 要 作者就大气数值模式动力框架发展的几个问题做了回顾和展望。关于模式地形的处理, 讨论了“地形追随”(terrain-following)坐标和“台阶地形”(step-mountain) η 坐标的优点、问题和对策。关于物理量守恒格式的构造, 回顾了从“瞬时”守恒到隐式、显示和半隐式完全(包括时间离散)守恒格式的发展和近况, 介绍了加速非线性全隐式问题迭代收敛的途径。还讨论了半拉格朗日守恒格式的构造问题。最后, 对目前广泛使用的全球谱模式, 讨论了其长处、局限和发展前景, 并简单介绍了谱元方法。

关键词 模式地形处理 守恒格式 谱模式

文章编号 1006-9895 (2005) 01-0120-11

中图分类号 P435

文献标识码 A

Review of Some Numerical Aspects of the Dynamic Framework of NWP Model

JI Li-Ren^{1,2}, CHEN Jia-Bin¹, ZHANG Dao-Min¹, and WANG Hou-Jun³

¹ Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

² State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

³ University of Maryland, Maryland, USA

Abstract An overview of some numerical aspects of the dynamic framework for NWP model is presented. On modeling orography, the merits, problems and remedies of terrain-following coordinate and “step mountain” (η) coordinate are discussed. The development of conservative schemes from “transient” schemes to full (including temporal discretization) conservation for implicit, explicit and semi-implicit schemes is reviewed and that for semi-Lagrangian schemes is also discussed. Some recent progress of accelerating the iteration for non-linear implicit problem is introduced. Finally, the present status and outlook for the widely used global spectral model is addressed and a brief introduction to spectral-element method is given.

Key words model orographic treatment, conservative scheme, spectral model

1 引言

作为气象科学直接应用于实际天气预报, 服务于我国国民经济建设和国防建设的重要学科分支——数值天气预报, 其科研和业务发展, 在近半个世纪取得了巨大的进步。多年以来, 叶笃正先生一直以极大的

热情, 关注、支持并指导它的发展, 他大力倡导业务、科研和教育部门的联合攻关, 引导中国科学院大气物理研究所的科研人员直接投身于数值预报业务系统的研发和建设; 他强调为了加速赶上国际先进水平, 要学习、吸收国外在该领域的最新成就, 先是“拿来主义”, 进而创新、发展成有我国特色的业务系

统。为此,叶笃正先生曾广泛推荐各单位的数值预报工作者,去 ECMWF 和 GFDL 等国际一流的学术和业务机构,实地考察和合作研究。特别值得一提的是,叶笃正先生的不少研究直接或间接地指导数值预报发展,例如,关于青藏高原的动力、热力作用^[1,2],适应理论和大气频散理论(如整层辐散对超长波的作用),关于风场和气压场的平衡关系^[3]及其中、小尺度和低纬度运动中的应用等。还应指出,在 1972 年我国数值预报工作还处于低谷时期,叶笃正先生曾撰写论文^[4],全面介绍了国内外数值模式的进展,内容几乎涉及有关的所有方面,并对一系列问题,发表了前瞻性的意见,例如,各种物理因子影响大气的时间尺度,运动和加热因子的相互作用,差分格式的物理意义,垂直分层的动力学依据,海气相互作用等,尤其是强调提出顾震潮先生开拓的历史资料^[5]在改进资料分析中的重要性。这些,在今天读来仍很受启发。

为了祝贺叶先生的九十华诞,我们撰此小文表示敬意。数值预报是边缘学科,涉及面很广,这里仅回顾其中一、二问题,着重叙述中国科学院大气物理研究所开展较多的工作,希望“温故”而有所“知新”。

2 数值模式中地形处理问题

数值模式中考虑地形的动力和热力作用是很重要的。青藏高原对我国天气气候有重大影响,在模式中处理好地形作用,更有其特殊意义。不论把山脉看成阻滞气流的巨大障碍物,或者看成是矗立在对流层中的热岛或水汽供应地,首先遇到的问题,是如何描写起伏的地形和不规则的计算区域。与此联系的是垂直坐标的选择和边界条件问题。

高度 Z 是直观、自然的垂直坐标。设大气顶高度为 $Z = Z_1$,地形为 $Z = Z_*(x, y)$,则上下边界条件可取为

$$\begin{cases} w = 0, & Z = Z_1, \\ w = w_* = \mathbf{V}_* \cdot \nabla Z_*, & Z = Z_*, \end{cases} \quad (1)$$

上式即为“刚体”边界条件。

对于广泛应用的 p 坐标,(1)式相应的边界条件成为

$$\begin{cases} \omega = 0, & p = p_1, \\ \omega = \frac{\partial p_*}{\partial t} + \mathbf{V}_* \cdot \nabla p_*, & p = p_*, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\omega = dp/dt$, $p_* = p_*(x, y, Z_*, t)$ 为地面气压。

(1) 和 (2) 式应是在地面 Z_* 上计算的。此外,

在大气低层,坐标面不连续,这当然很复杂。

2.1 归一化(“地形追随”)坐标

1957 年,Phillips^[6]提出 σ 坐标,即归一化 (p/p_*) 的坐标。地形与最低的坐标面相重合,且具有 $\sigma = 0$ (当 $\sigma = 1$) 的齐次边界条件。上述问题迎刃而解。此后, σ 坐标及其变形在各类大气数值模式中广泛应用。类似地,“归一化”的思路可用于高度 Z ^[7]或位温 θ ^[8]。近年来,这类坐标常统称为“地形追随坐标”(terrain-following,下文简称 T-F 坐标)。

在实践中,人们很快发现 T-F 坐标产生的问题。最早提出和研究最多的是地形区气压梯度力的计算问题^[9~11]。

当由 p 坐标变为地形 σ 坐标时,相应 x 方向的气压梯度力项则由 $(\partial\phi/\partial x)_p$ 变为两项,即 $(\partial\phi/\partial x)_\sigma + (RT\partial\ln p_*/\partial x)_\sigma$,其中 p_* 为地面气压,在有地形时,当 $1/f(\partial\phi/\partial x)_p$ 大小相当 $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的地转风,而地形坡度为 10^{-3} 时, $1/f(\partial\phi/\partial x)_\sigma \approx 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,要大一个量级, $(RT\partial\ln p_*/\partial x)_\sigma$ 项也如此。该两项的符号相反,大小相近,这就是通常所说的大量小差,计算误差较大。为此,在 σ 坐标中对该项的计算方案给予特别的关注,其处理方法大体有如下三种。

(1) 设计协调的差分格式:例如,Corby^[12]给出的差分格式为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + RT \frac{\partial\ln p_*}{\partial x} = \bar{\phi}_x^* + R \overline{T^x(\ln p_*)}_x. \quad (3)$$

对温度廓线为 $T(p) = A\ln p + B$ 的理想大气(A, B 为常数),引入静力关系有

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \phi_0 + \frac{1}{2} RA[(\ln p_0)^2 - (\ln p)^2] + \\ &RB(\ln p_0 - \ln p), \end{aligned} \quad (4)$$

容易证明,将 (4) 式代入 (3) 式,左端的微分和右端的差分都为零,这表明 (3) 式右端两项的差分格式是协调的。

(2) 插值(反插到 p 面)法^[13]:插值法就是在用差分方法计算气压梯度力项时,由计算点周围四点及其上下层的位势高度,用某种插值(如拉格朗日气压对数二次插值)分别插到计算点所在的同一 p 面上(又回到 p 坐标),得出周围四点的位势高度,再用中央差分计算出 $\partial\phi/\partial x$ (或 $\partial\phi/\partial y$),这种方法效果不错,但比较费时。

(3) 扣除法:假定模式大气的变量 ϕ, T 可以表示为

$$\begin{aligned} \phi(x, y, p, t) &= \bar{\phi}(p) + \phi'(x, y, p, t), \\ T(x, y, p, t) &= \bar{T}(p) + T'(x, y, p, t), \end{aligned}$$

其中, $\bar{\phi}$, $\bar{T}$ 是仅为气压函数的基本量 (参考大气, 大量), ϕ' , T' 为扰动量 (小量), 这时气压梯度力项可以表示为两部分:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + RT \frac{\partial \ln p_*}{\partial x} = \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + R\bar{T} \frac{\partial \ln p_*}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} + RT' \frac{\partial \ln p_*}{\partial x} \right), \quad (5)$$

如果能给出 $\bar{\phi}$, $\bar{T}$ 的表达式, 使其满足 $(\partial \bar{\phi} / \partial x + R\bar{T} \partial \ln p_* / \partial x = 0)$, 则 (5) 式变为

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + RT \frac{\partial \ln p_*}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial x} + RT' \frac{\partial \ln p_*}{\partial x}. \quad (6)$$

这时, 气压梯度力项中不再出现 (扣除了) 基本量的计算误差, 也避免了大量小差的问题, 从而提高了精度。这种静力扣除 (或标准层结扣除) 方案, 首先由曾庆存^[14, 15]提出, 他引入了一个表征大气层结状态的参数 C_0 , 其定义为 $C_0^2 = R(\bar{T}/c_p - \partial \bar{T} / \partial \ln p)$, 若 C_0 给定, 并假定参考大气满足静力关系, 则可以得到 $\bar{\phi}$, $\bar{T}$ 的表达式, 并使其微分形式的气压梯度力为零。这种扣除方法在差分模式^[16]得到应用, 陈嘉滨等^[17]、纪立人等^[18]和 Simmons 等^[19]又将其引入谱模式中, 都得到很好的结果。特别是谱模式, 前述第 (1) (2) 两种方法难以应用, 只是在引入扣除法后气压梯度力的计算得以改善。谱展开中常见的“负地形”现象也大为缓解。 C_0 可以取为常数, 也可以根据标准大气资料确定一个随高度变化的 $C_0(p)$ ^[20], 或由初始场资料确定 $C_0(p)$ ^[21], 还可以将 C_0 推广为 $C_0(p, \phi)$, 即高度和纬度的函数, 进一步提高扣除效果。此外, 钱永甫等^[22]对这个问题也进行了一系列研究, 特别是根据差分变换原理, 提出了“差微差” (DDD) 法进行计算。

实际上, 由坐标转换带来的计算问题不仅表现在气压梯度力, 又如, 温度水平扩散

$$A(\nabla^2 T)_p = A(\nabla^2 T)_\sigma - A \frac{\partial T}{\partial \ln \sigma} \nabla^2 \ln p_* + \dots, \quad (7)$$

如仅计算上式等号右端第一项, 则在山顶地区会产生持续的增温, 且低层大于高层, 使大气层结趋于不稳定, 往往出现虚假的降水。因而在 σ 面上计算水平扩散时, 要考虑 (7) 式等号右端其他项, 至少是第二项。

还有水平平流项, 例如, 在二维绝热场合, 笛卡坐标中位温 θ 的个别变化为

$$\frac{d\theta}{dt} = u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (8)$$

而在 $(x, y, \hat{z})$ 坐标中, 则有

$$\frac{d\theta}{dt} = u \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{\hat{z}} + \hat{w} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{z}}, \quad (9-1)$$

或

$$\frac{d\theta}{dt} = \left[u \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_z + u \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\hat{z}} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \left[w \frac{\partial \theta}{\partial z} - u \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\hat{z}} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right], \quad (9-2)$$

这里, $\hat{z}$ 是高度 z 的 T-F 坐标, $\hat{w} = d\hat{z}/dt$ 。由 (9-2) 可以看出, (9-1) 式等号右端两项中实际包含相同但符号相反的项。若要求按 (9-1) 计算 $d\theta/dt$ 结果与笛卡坐标的 (8) 式一致, (9-1) 两项的计算应有相同的截断误差。例如, 计算 $\hat{w}$ (大气低层 $\hat{w} \approx w - uZ_{*x}$) 时, 其水平差分的格式和精度应与 (9-1) 等号右边第一项相同。Klemp 等^[23]用标准钟形地形背风重力波的解析解和数值解, 证明气压梯度力项和平流项, 若对坐标变换的两项, 采取不同精度差分, 会导致虚假的源, 并破坏计算结果的合理性。

地形追随坐标是非正交坐标系, 它对计算的影响研究不多。首先, 是坐标轴转动而带来的曲率项 (metric)。例如, 对于二维钟形地形 $h(x) = H(1 + x^2/a^2)^{-1}$ (图 1), x 轴方向是不变的, 而 $\hat{z}$ 轴是变动的, 因为 dk/dt (k 为 $\hat{z}$ 方向的单位矢量), u 预报方程应有曲率项。对于小尺度地形^[24], 取 $H = 400$ m, $a = 1000$ m, 则在山顶处, 曲率半径 $r = 1.25 \times 10^3$ m [$r = 1/(1 + h')^2/h''$], 若 $O(u) = 10$ m·s⁻¹, 则曲率项 $u^2/r = 10^{-1}$ m·s⁻²。在半拉格朗日模式中, 当地形陡峭, 按 u , $\hat{w}$ 找上游点也会有一定误差。此外, 对于 $\sigma (= p/p_*)$ 类坐标, 因为 $p_*(x, y, t)$ 本身也是预报量, 其误差也会影响计算结果。陈德辉等^①研究了这个问题的, 比较了同一模式不同坐标 (σ 和 $\hat{z}$) 并

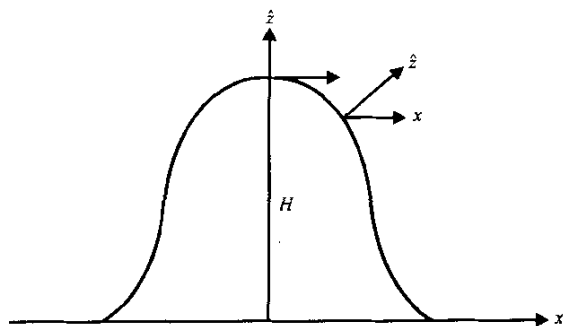


图 1 钟形地形示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a bell-shaped orography

作了个例模拟, 结果表明, z 坐标在某些方面要明显优于 σ 坐标。上述这些问题, 对于中、小尺度地形, 特别是陡峭地形, 可能应该予以考虑。

2.2 η 坐标

针对地形追随坐标 (σ) 中计算气压梯度力的困难, Mesinger^[25] 提出另一类地形处理方法, 即所谓“台阶地形”(step-mountain), 或 η 坐标:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{p - p_t}{p_s - p_t} \eta_s, \\ \eta_s = \frac{p_{rf}(Z_s) - p_t}{p_{rf}(0) - p_t}, \end{array} \right. \quad (10)$$

其中, 下标 s 、 t 分别表示地面和模式大气顶, “ rf ”表示参考大气。需要指出, 曾庆存^①在 1982 年提出过一种修正的 σ , 与 η 坐标基本一致。

(10) 式中, 当 $\eta_s = 1$, η 即为 σ 坐标。 η 坐标面是准水面的。由 (10) 式不难看出, 如果实际大气层结与参考大气相同 $p = p_{rf}$, 因而 $p_s = p_{rf}(Z_s)$, η 退化为 p 坐标。当然不论地形多陡峭, 不存在 $\nabla \phi$ 计算的“大量小差”问题。在一般情形下, 大气 p 场并非 p_{rf} , 此时, $\nabla_p \phi = \nabla_{\eta} \phi + (RT/p) \nabla_{\eta} p$ 也分为两项, 但 η 面仍然准水平, 因而, $\nabla_{\eta} \phi$ 不会因为地形陡峭而变得很大。 $\nabla_p \phi$ 也不会成为两个大项的差。这是 η 坐标的特点和优点。

显然, 准水平的坐标面会与地形相割, 因而要给定内(侧)边界, 为计算方便还要修改模式地形, 使网格与地形重合。由于地形不再与坐标面重合, 大气下边界一般不再有 $\eta = 0$ 。如将模式地形修改成台阶, 大气下界地形成为 $Z = Z_s$ 常数的平台, 平台上有 $\eta = \eta_s$ 常数, 即为坐标面, 因而有 $\eta = \eta_s$, $\eta_s = 0$ 。

综上所述, 同 σ 类坐标相比, η 坐标克服了 $\nabla \phi$ 的计算困难, 同 Z 、 p 坐标相比, 它有简单的下边界条件。但它带来了内边界的处理问题, 在模式分辨率不高时, 对地形要作较大的修改。此外, 大气低层坐标面有“空洞”, 变量无法用谱展开, 因而, η 坐标不能用于谱模式。应该指出, Egger^[26]在模拟 Genoa 背风气旋时, 就提出“阻塞”地形, 即用垂直的墙来刻划陡峭地形, 并取得成功的模拟结果。纪立人^[27]在模拟江淮切变线的形成过程时, 已有类似的做法, 将地形处理成始终保持静止的大气, 地形区 $V = 0$, 因而涡度、散度也为零, 可以看成是要素场向地形区的延拓。因为要素场是连续的, 所以韩卫清和纪立人^[28]又推广到正压原始方程谱模式, 也取得较好结

果。

η 坐标适于描写陡峭地形, 用它建立的模式, 很快就显示其潜力。它成功地模拟了几个困难的背风气旋生成个例, 较之当时美国 NMC 已有区域模式有明显改进。因此, 成为 NCEP 业务模式之一。针对我国的复杂地形和暴雨预报问题, 宇如聪等^[29]于 1986 年开始发展一个能考虑陡峭地形的预报模式。该模式引入 η 坐标, 设计了能较好地保证水汽输送真实性的保形正定方案(简称 REM)。很快, REM 以成功地模拟了受地形影响最为典型的暴雨现象“雅安天漏”^[29]而著称。经过十几年的更新、完善, REM 已发展为新一代的 AREM, 在国内外气象、水文、环境和军事等的科研和业务中广泛使用(详见文献[30])。

对陡峭地形, η 坐标有上述优点。但也有研究^[24]表明, 由于人工修改地形, 在台阶地形的转角处, 会造成虚假的涡度, 进而影响中小尺度地形背风波的模拟效果。对于水平尺度较宽的山, 而模式垂直分辨率不够细时, σ 类坐标可能优于 η 坐标。但其结果基于二维问题, 限于气流爬越, 而未能比较绕流的效果。对于上述两类地形(坐标)处理方法, 还未见系统性的比较。看来, 这应随地形的尺度和坡度, 研究对象的尺度而有不同选择。随着非静力模式的广泛使用, 又提出一些新的坐标, 例如 Laprise^[31]的基于静力平衡气压的 σ 坐标。Schär 等^[32]提出新的高度 T-F 坐标, 使地形小尺度特征随高度迅速减少, 因而在中高层有更为平滑的坐标面。但它们都仍然不同程度的存在 T-F 坐标问题。因此, 已有一些模式(如英国)又尝试回归高度 Z 坐标。

3 守恒格式的构造

流体力学方程组控制着大气运动。这方程组是非线性的, 十分复杂, 很难作出解析解, 一般只能用数值求解。人们设计出多种计算格式, 数值求解。这些计算格式应满足这组方程的物理特性(或积分约束), 如总能量守恒, 总质量守恒、总拟能(位涡平方)守恒等。否则, 由于引入虚假的源汇, 长期数值积分后, 预报就会与观测偏离甚大。另外, 设计出的计算格式满足这些物理守恒, 有助于克服计算不稳定。

3.1 非线性计算不稳定和瞬时守恒差分格式

当模式的控制方程用一定的长度格距 Δx 将空间离散化, 就不能正确地表示小于 2 倍格距尺度的波动。例如, 对波长为 $4\Delta x/3$ 的波动, 却错误地用了

① 个人通讯, 1982。

$4\Delta x$ 波长的波来描写, 这就出现了混淆误差。这种误差的出现, 积分非线性方程时, 随着时间推移, 系统的能量向短波方向移动, 若不采取预防措施, 数值积分将出现灾难性的后果——计算溢出。这种现象是由于方程的非线性项引起, Phillips^[33]称之为非线性计算不稳定, 并提出将波数大于最大可分解波数一半的分量滤去, 就可消除这种非线性计算不稳定。而 Orszag^[34]提出了三分之一定律, 即将波数大于最大可分解波数的三分之一分量滤去就行了。这就是现代大气谱模式常用的方法。对这种非线性不稳定的解释, 陈雄山^[35-37]却提出质疑, 认为造成非线性计算不稳定的混淆现象是由于使用了富氏谐波分析引起的, 如改用 Walsh 变换作分析, 就不会出现这种混淆现象。这种想法在谱模式中作了试验, 得到了较好的试验结果。

对于正压无辐散的涡度方程, 它具有平均动能和平均拟能 (位涡平方) 守恒特性, 和能量加权平均波数守恒特性。因此, 系统能量就不能单方向向短波转移。Arakawa 等^[38-40]对非线性平流项构造出一种差分格式, 在正压无辐散情况下, 具有平均拟能和平均动能守恒特性。因此, 在积分过程中, 可防止系统能量单方向向短波转移, 亦即防止了非线性计算不稳定出现。这种差分格式是假定时间连续情况下成立, 称之为瞬时守恒格式。另外, 还有如 Lilly^[41]也提出瞬时总能量守恒格式, 加适当的耗散仍可防止非线性计算不稳定出现。

季仲贞^[42, 43]研究后指出, 这些瞬时守恒格式, 在某些特定的初值条件下, 仍存在有计算不稳定, 但只要略加入一些耗散即可防止。

3.2 隐式总能量守恒格式和非线性方程隐式求解的 JFNK 方法

曾庆存等^[44]提出了总能量守恒隐式平流项的差分格式, 在时间离散和任何初值情况下均计算稳定。以一维为例说明如下:

一维发展方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

作时空离散化,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + A_\alpha(u^*) \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0, \quad (12)$$

其中, 平流项差分为

$$[A_\alpha(u^*)u]_m = (1 - \alpha)u_m^* \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta x} + \frac{\alpha}{2} \frac{u_{m+1}^* u_{m+1} - u_{m-1}^* u_{m-1}}{2\Delta x}, \quad (13)$$

u_m^* 是参数, 它可取作时空的某种平均。若取 $\alpha = 2/3$ 差分格式 (12) 和 (13) 具有能量守恒, 广义能量守恒和平均尺度守恒。因此, 是计算稳定的。

当平流项 (13) 式等号左端项目中的 u 取隐式, 求解时, 采用迭代, 十分费时, 且难以收敛。往往设定迭代次数, 作为近似解, 致使格式仅为守恒。最近, 为加快收敛, 曾庆存还提出迭代次数设定为 3 的改进非线性迭代法, 有效地抑制短波, 且时间步长取得较大 (尚未发表, 可参见文献 [45])。

最近新发展的 JFNF (Jacobian-Free Newton-Krylov) 方法^[46], 就是对这种非线性隐式方程的一种有效求解方法。简述如下:

Newton 方法求解如下形式的非线性方程

$$F(x) = 0, \quad (14)$$

F 是所研究模式方程时空离散化得到的非线性余差, x 是离散变量向量。用 Newton 方法迭代求解 (14) 为

$$J(x^k) \delta x^k = -F(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

这里,

$$J_{ij}(x^k) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j^k}, \quad x^{k+1} = x^k + \delta x^k, \quad (16)$$

方程组 (15) 采用 Krylov 子空间方法 (GMRES) 求解。这是求解大型线性方程组一类最有效的方法。第 m 次 Krylov 迭代为如下形式,

$$\delta x_m^k = a_0 r_0 + a_1 J r_0 + a_2 J^2 r_0 + \dots + a_m J^m r_0, \quad (17)$$

其中

$$r_0 = J \delta x_0^k - F(x^k), \quad (18)$$

δx_0^k 是初值。Jacobian 矩阵的形成和储存是巨大的工作。然而, 注意观察方程 (17), 可发现在 Krylov 求解过程中, 仅形式上要求 Jacobian 矩阵的作用, 而不是实际上的 Jacobian 矩阵。这种 Jacobian 矩阵作用可近似为

$$Jv \approx \frac{F(x + \epsilon v) - F(x)}{\epsilon}, \quad (19)$$

这里, ϵ 是小扰动参数, 文献 [47] 中讨论了它的几种选择方案。

方程 (19) 容许求解方程 (17), 而不需形成或储存 Jacobian 矩阵。

使 Krylov 迭代次数很少的关键, 是对方程 (15) 预处理, 其中一种方案为

$$J(x^k) p^{-1} p \delta x^k = -F(x^k), \quad (20)$$

这里, p 是预处理器或称预条件子 (preconditioner)。以上各步可作如下替代, 定义新矩阵

$$J' = J p^{-1}, \quad (21)$$

新的解为

$$\delta x' = p \delta x. \quad (22)$$

计算出 Krylov 解的初估值为

$$\delta x_0^k = p^{-1} F(x^k), \quad (23)$$

再按 (17) 式求解。最后返求原来 (15) 式的更新值,

$$\delta x = p^{-1} \delta x'. \quad (24)$$

这里, 预处理器 p 是所研究的方程作线性化处理求解得到的一个系数矩阵。牛顿方法是求解非线性方程组的经典方法, JFNK 方法采用上述几项关键技术, 有效地改进了牛顿方法的收敛速度。

3.3 显式完全平方守恒格式

上节的隐式完全能量守恒格式是计算稳定的, 但实际求解困难, 需费较大的工作量。显式完全平方守恒格式^[48, 49]克服了这个困难, 在守恒差分格式构造上是一大突破。

对于发展方程,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\tilde{A}F, \quad (25)$$

可构造如下差分格式,

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} + (AF)^i_n + \epsilon^n \Delta t (BF)^i_n = 0, \quad (26)$$

其中, A^n 是平流算子 $\tilde{A}$ 的某种空间差分算子, 它必须满足内积 $(AF, F) = 0$ 的条件; B_n 是耗散算子; ϵ_n 是耗散系数, 它是在差分格式 (26) 满足平方守恒条件下, 求解一个关于 ϵ_n 的二次方程得到的。它是平流算子 A_n , 耗散算子和变量 F 的函数。该格式应用到二维浅水波方程, 积分 Rossby-Haurwitz 波到 50 天不变形, 总质量和能量维持有效数字 14 位不变化。

3.4 半隐式完全平方守恒格式和三阶守恒格式

上节显式平方守恒格式有两个不足, 一是显式格式, 时间步长仍受到类似柯朗条件的约束; 二是控制方程必须写成某种特定的形式, 限制了它的某些应用, 如在谱方法上的应用。本节叙述的完全平方和三阶守恒格式^[50, 51], 是在前述显式平方守恒格式研究基础上发展, 提出了半隐式二次守恒格式和三阶守恒格式, 克服了这些缺点, 并成功应用到大气谱模式中, 解决大气谱模式计算格式长期尚未解决的能量守恒问题。对发展方程 (25), 半隐式平方守恒格式为

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (A^n - A_L^n) + A_L^n u^{n+1} + \Delta t \epsilon^n B^n u^n = 0, \quad (27)$$

其中, A_L^n 是算子 A 的线性空间算子, 其他符号同第 3.3 节。若耗散系数满足

$$\epsilon^n = \frac{2c_1}{1 + \sqrt{1 - 4\Delta t^2 c_1 c_2}}, \quad (28)$$

则差分格式 (27) 与 (25) 相容, 且满足二次守恒, 其中系数 c_1 , c_2 和 c_3 是算子 A^n , A_L^n , B^n 和 F^n 的函数, 每步都可计算出来。耗散算子为

$$B^n u^n = - \sum_{j=1}^J \Delta t^{j-1} \left[\frac{1}{(j+1)!} \frac{\partial^{j+1} u^n}{\partial t^{j+1}} + \epsilon_0 \frac{A_L^n}{j!} \frac{\partial^j u^n}{\partial t^j} \right], \quad (29)$$

ϵ_0 是可取为 0 或 1 的开关常数。

若耗散系数满足关系

$$\Delta t^4 r_1 (\epsilon^n)^3 + \Delta t^2 r_2 (\epsilon^n)^2 + r_3 \epsilon^n + r_4 = 0, \quad (30)$$

则差分格式 (27) 与 (25) 相容, 且满足三次守恒的差分格式。其中系数 r_1 , r_2 和 r_3 仅是差分算子 A^n , A_L^n , B^n 和变量 F^n 的函数。

在正压或斜压大气初始方程模式中, 动能写为 $p_s(u^2 + v^2)/2$ (p_s 是地面气压)。由于提出了三阶守恒格式, 就不必像二阶守恒格式那样将动能写为 $[(\sqrt{p_s}u)^2 + (\sqrt{p_s}v)^2]/2$, 让 $\sqrt{p_s}u = U$ 为一变量, 这就限制了二阶守恒格式对常规初始方程的应用, 特别对大气谱模式的应用。这里三阶守恒格式的发展, 突破此限制, 可直接应用到常规初始方程和大气谱模式上。

3.5 大气谱模式质量守恒格式

现在世界上适用的大气谱模式都不能满足大气总质量守恒, 长时间数值积分, 平均地面气压上升, 影响计算精度和模拟结果。这是由于为了克服 σ 坐标气压梯度项第二项出现三阶引起的混淆误差, 将地面气压 p_s 改写为 $\ln p_s$, 作为一个展谱变量。由此, 却带来模式大气总质量不守恒问题。为克服这一问题, 发展出大气谱模式质量守恒格式^[52, 53], 它恢复 p_s 作为预报变量, 这就保证了大气总质量守恒, 同时为克服由气压梯度项引进的混淆误差, 引进仅为气压函数的参考大气, 减少了气压梯度项的截谱误差, 提高了计算精度。在中国气象局国家气象中心谱模式上 10 年数值积分计算表明, 引入这种质量守恒格式, 有效地消除了原模式 500 hPa 高度场的平均高度随时间上升趋势, 改进了模拟结果。

3.6 半拉格朗日守恒计算格式

自从 Robert^[54, 55]将半拉格朗日格式和半隐式格式结合起来应用到气象后, 半隐式半拉格朗日计算格式就得到广泛应用。它除了能加大时间步长 (是欧拉空间半隐式的 4~6 倍) 优点外, 还有较小的相速误差和计算耗散, 且能处理间断点。然而, 明显的问题是难于满足物理量的守恒, 如总质量、总能量等守恒性。

近年来, 有不少人提出了半拉格朗日的守恒格式, 现择主要的概述如下。

Machenhauer 等^[56, 57]提出了半拉格朗日守恒格式, 用连续方程、热力学方程和能量方程的半拉格朗日形式作为预报方程, 且书写为某种特殊形式, 并构造特别的数值格式, 满足物理量的守恒。对于一维的动量和连续方程, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (31)$$

引用散度的拉格朗日表示,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt}(\delta x),$$

δx 是一个无限小的格距 (相当于流体微元的大小), 则 (31) 式改写为

$$\frac{d}{dt}(E\delta x) + \delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} g h^2 u \right) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt}(h\delta x) = 0, \quad (33)$$

E 是能量。对连续方程 (33) 离散化为

$$h_j^{n+1} \Delta x = \bar{h}_j \delta x_j, \quad (34)$$

j 是到达点, $\bar{j}$ 是出发点, Δx 是标准网格距, 也是流体微元在到达点处的大小, 而 δx_j 是流体微元在出发点处的大小, 一般讲它不等于 Δx 。方程 (33) 和 (34) 表明流体微元在运动过程中质量是守恒的。问题的关键是如何计算出 (34) 式等号右端项, 即大小为 δx_j 在出发点的质量。简单作法是假定物理量, 例如, 这里的 h^{n-1} 在标准网格内是逐段常定 [也有作更复杂的假定, 如逐段线性、逐段抛物线 (PPM)、逐段立方曲线 (PCM) 等^[58~61], 出发点处流体微元的质量就是 δx_j 所包含标准网格上的空气质量之和。显然, 这时在计算范围内总质量为

$$\sum_j h_j^{n+1} \Delta x = \sum_j \bar{h}_j \delta x_j = \sum_j h_j^{n-1} \Delta x, \quad (35)$$

即系统的总质量守恒。

能量方程 (32) 的差分写为

$$E_j^{n+1} \Delta x = \bar{E}_j \delta x_j - g \Delta t \left[(h^2 u)_{j+\frac{1}{2}-\alpha(j)} - (h^2 u)_{j-\frac{1}{2}-\alpha(j-1)} \right], \quad (36)$$

式中 α 是出发点与到达点间距离 (以 Δx 为单位)。方程 (36) 式右端第一项计算同上。在计算范围内总能量为

$$\sum_j E_j^{n+1} \Delta x = \sum_j \bar{E}_j \delta x_j = \sum_j E_j^{n-1} \Delta x, \quad (37)$$

即总能量守恒。

每一步首先由 (34) 式计算出 h_j^{n+1} 。为得到 u_j^{n+1} , 需要用 (36) 式, 有

$$u_j^{n+1} = \pm \sqrt{2G_j/h_j^{n+1} - gh_j^{n+1}}, \quad (38)$$

其中, G_j 是 (36) 式右端项。现在要决定上式的正负号。在出发点上用类似计算 (34) 式等号右端项的办法, 计算 $(uh)_j \delta x_j$, 用其正负号来确定 (38) 式的正负号。

以上方法还可以推广到半隐式格式和二维或三维空间, 这时计算 (34) 和 (36) 右端第一项时要复杂得多, 其方法可在文献 [58~60] 中找到。陈嘉滨等^[62, 63]在构造半拉格朗日守恒格式上采用不同思路, 首先, 出发点和到达点间构造守恒计算格式, 称为守恒格式的构造, 这是在第 3 节叙述的显式完全平方守恒的基础上推广到半拉格朗日空间。其次, 是将标准等距格网上平方守恒量, 插值到由出发点组成的非等距格网上, 并满足平方守恒, 称为守恒插值构造。在一维浅水波方程上作了显式和半隐式守恒格式的实验, 都得到预期的效果。

4 谱模式和谱元模式

有限差分 (简称“差分”) 方法和谱方法是数值预报模式动力框架构建的两大类别, 在数值预报和大气环流数值模式近半个世纪的进展中, 它们曾先后成为发展的主流。大体上在 20 世纪 70 年代以前, 在实际应用中是清一色的差分模式。谱模式, 由于其计算复杂, 计算量大, 一直停留在文献和教科书中, 而未见实际应用。FFT 和“谱变换” (Spectral transform) 方法^[64]的提出, 谱方法在大气数值模式中的应用才大为改观, 20 世纪 80 年代初, ECMWF 经过大量实例的对比试验, 谱模式取代其原来引自 GFDL 的差分模式, 成为其中期数值预报的业务模式。很快在国际上的主要业务或研究中心绝大多数都转而采用全球谱模式, 一直延续至今。当然也有少数例外, 英国气象局在业务和研究中仍一直使用差分模式。在曾庆存领导下, 中国科学院大气物理研究所也坚持发展差分模式, 多年来一直将其应用在短期气候预测中。

近年来, 随着模式分辨率的大幅度提高和大规模并行计算机的应用, 谱模式显示出它的局限性。世界上一些国家 (德国、美国、加拿大等) 已经或正在重新转向发展差分模式。这里, 试图重新审视谱模式的优缺点, 讨论它的发展。

谱模式的优点: (1) 首先是它的计算精度和效率。差分方法的逼近程度受其差分格式的限制, 如常

用的二阶和四阶精度的格式不过用到计算点附近少数格点的信息, 而谱方法则用到整个计算区域网点的信息, 有高得多的精度, 这些是谱方法最吸引人之处。此外, 空间导数转为计算基函数的导数, 可以一次计算存场, 不需要反复计算。(2) 南北极区的计算一直是差分模式一个麻烦问题, 而在以球函数为基底的谱模式, 则不存在困难。(3) 半隐式时间差分格式广为各类模式所采用, 它涉及求解 Helmholtz 方程, 并归结如何高效求解大型 (超大型) 矩阵问题, 这也是一个困难问题, 而谱模式利用球函数是 ∇^2 算子的本征函数的性质, 问题大为简化。

谱模式的问题也已为人们所熟知, 诸如, (1) 它要求变量定义在连续的坐标面上, 在考虑地形时, 不宜采用 Z, p, η 等坐标面和地形有切割的处理方式。又如海洋环流模式, 其周边是不规则的海岸, 也不适于应用谱方法。(2) 大气模式中的凝结加热、地形等可能是孤立的或不连续的, 用谱展开, 可能出现虚假的现象如平原和海上地区出现虚假地形 (Gibbs 现象)。(3) 谱变换方法实质上是“拟谱”或“假谱” (pseudo-spectral) 方法。为了避免“混淆”现象而采取的截波方案, 实际上降低了精度。反之, 如不作此处理, 又不一定能保证计算稳定;(4) 目前, 谱展开波数已很高, 再提高波数, 计算量增加与精度提高相比, 已不甚有效。特别是谱模式实现并行计算, 编程复杂, 效率也不如差分模式。

由于上述原因, 特别是第 (4) 点, 重新转向差分模式已成趋势。那么, 谱方法能否以及如何进一步发展? Temperton^[65]估计了随分辨率增加, 谱变换所耗时 (占总机时的百分率) 的增长, 得出至少在 T1000 (相当十多公里的分辨率), 仍然是可以接受的。对于球函数, 问题主要在勒让德函数的变换。分辨率再进一步提高, 他建议全球谱模式转向球面上的双富氏级数, 或者发展类似 FFT 的快速勒让德变换 (FLT)。

采取结合的方法可能是另一个发展方向。早在 20 世纪 80 年代, Canuto 等^[66]对定常 Navier-Stokes 方程, 建立了谱有限元方法。郭本瑜^[67]对斜压原始方程提出了谱—差分方法。实际上半拉格朗日方法引入谱模式, 也不妨看成是谱和格点方法的结合。下面简单介绍谱有限元方法。

谱 (有限) 元方法 (Spectral Element Methods) 具有将谱方法的高阶精度的有效性和有限元方法的网格灵活性等优点结合起来的特点。Deville 等^[68]对谱元方法提供了极好的描述。

以勒让德多项式为基础的谱元法运用 Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) 积分。对于一维问题, $N+1$ 个 GLL 积分节点 $\Xi_{N+1} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N\}$ 定义为如下方程的解,

$$(1 - \xi^2) L'_N(\xi) = 0,$$

$$(1 - \xi^2) L'_N(\xi) = 0, \quad \xi \in \hat{\Omega} (\xi - 1 \leq \xi \leq 1),$$

这里, $L'_N(\xi)$ 是 N 阶勒让德多项式的导数。GLL 积分节点 $\xi_k \in \Xi_{N+1}$ 上的任何正规函数 $u(\xi)$ 的 N 阶拉格朗日插值多项式可表示为

$$I_N u(\xi) = \sum_{k=0}^N u(\xi_k) \pi_k(\xi).$$

相应的 N 阶拉格朗日插值基函数可推导出,

$$\pi_k(\xi) = \frac{-1}{N(N+1)} \frac{(1 - \xi^2) L'_N(\xi)}{(\xi - \xi_k) L'_N(\xi_k)},$$

$$0 \leq k \leq N, \xi \in \hat{\Omega}.$$

显然,

$$I_N u(\xi_j) = u(\xi_j) = \sum_{k=0}^N u(\xi_k) \pi_k(\xi_j),$$

$$0 \leq j \leq N, \xi_j \in \Xi_{N+1},$$

即 GLL 积分节点也是配置 (collocation) 点。而 GLL 积分公式为

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{k=0}^N \rho_k f(\xi_k), \quad \forall f(x) \in P_{2N-1},$$

其中, P_{2N-1} 代表所有阶数不高于 $(2N-1)$ 的多项式, 而 GLL 积分权重则为

$$\rho_k = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[L'_N(\xi_k)]^2}, \quad 0 \leq k \leq N, \xi_k \in \Xi_{N+1}.$$

以上定义了基本的参考谱元上的插值和积分, 而将 Galerkin 方法实施于谱元则与通常的有限元法类似。谱元方法也可以看作是一种特殊的高阶、配置有限元法进一步的详细说明可参考文献 [68]。

将谱元方法应用于全球模式, 通常可以方便地先将球面投影到立方体面上^[69]。水平网格可以采用 (准) 均匀网格或局部加密网格, 因而提供了同时模拟全球和区域天气或气候的可能性。这样, 也在一定程度上避免了通常全球模式的极地问题。应用谱元方法还有利于大规模、高效的并行计算。

将谱元方法应用于大气原始方程, 一般只是在水平方向采用谱元方法, 而在垂直方向仍采用通常的 σ 坐标^[70]或混合坐标^[71]。有关谱元方法在大气气候模式中的应用的近期进展可参考文献 [71]。

有待研究的一些问题包括: 谱元方法在有大地形区域的应用, 特别是滤波和水平扩散, 以及水汽场的处理等 (大地形在数值模式中如何处理一直是模式开

发中需要注意的问题)。

致谢 薛纪善、宇如聪两位研究员提供有关资料,杨艳霞女士打印全稿,特此致谢。

参考文献

- [1] 叶笃正. 西藏高原对大气环流影响的季节变化. 气象学报, 1952, **22**: 33 ~ 47
Yeh Tu-Cheng. Impact of the Tibetan Plateau on the seasonal variation of the general circulation of the atmosphere. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1952, **22**: 33 ~ 47
- [2] 叶笃正, 罗四维, 朱抱真. 西藏高原及其附近的流场结构和对流层大气的热量平衡. 气象学报, 1957, **28**: 108 ~ 121
Yeh Tu-Cheng, Lo Szu-Wei, Chu Pao-Chen. The wind structure and heat balance in the lower troposphere over Tibetan Plateau and its surrounding. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1957, **28**: 108 ~ 121
- [3] 叶笃正, 李麦村. 中小尺度运动中风场和气压场的适应. 气象学报, 1964, **34**: 409 ~ 423
Yeh Tu-Cheng, Li Mai-Tsun. The adaptation between the pressure and the wind filed in the meso-and small-scale motion. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1964, **34**: 409 ~ 423
- [4] 数值预报研究组. 近年来大气环流数值试验的进展. 见: 中国科学院大气物理研究所编著. 近代气象学若干问题的进展. 北京: 科学出版社, 1975, 1 ~ 45
Numerical Weather Prediction Research Group. Recent advances in the numerical experiments of the general circulation of the atmosphere. In: *Advances in Some Problem of Modern Meteorology* (in Chinese). Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Eds. Science Press, 1975, 1 ~ 45
- [5] 顾震潮. 作为初值问题的天气形势数值预报与由地面天气历史演变作预报的等值性. 气象学报, 1958, **29**: 93 ~ 98
Koo Chen-Chao. On the equivalency of formulations of weather forecasting as an initial value problem and as an " evolution " problem. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1958, **29**: 93 ~ 98
- [6] Phillips N A. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteor.*, 1957, **14**: 184 ~ 185
- [7] Gal-Chen T, Somerville R. On the use of a coordinate transformation for the solution of the Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 1975, **17**: 209 ~ 228
- [8] Benjamin S G, Grell G A, Brown J M, et al. Mesoscale weather prediction with the RUC hybrid isentropic-terrain-following coordinate model. *Mon. Wea. Rev.*, 2004, **132**: 473 ~ 494
- [9] 张学洪, 许有丰, 骆美霞, 等. 初始方程模式引入地形后的初步试验. 第二次全国数值天气预报会议论文集. 北京: 科学出版社, 1980, 87 ~ 97
Zhang Xuehong, Xu Youfeng, Luo Meixia, et al. Preliminary experiment of the primitive equation model with topography. *Proceeding of the Second National Numerical Weather Prediction Congress* (in Chinese), Beijing: Science Press, 1980, 87 ~ 97
- [10] Janjic Z I. Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography. *Beitr. Phys. Atmos.*, 1977, **50**: 186 ~ 189
- [11] Mahrer Y. An improved numerical approximation of the horizontal gradients in a terrain-following coordinate system. *Mon. Wea. Rev.*, 1984, **112**: 918 ~ 922
- [12] Corby G A, Gilchrist A, Newson R L. A general circulation model of the atmosphere suitable for long period integrations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1972, **98**: 809 ~ 832
- [13] Smagorinsky J. Prediction experiments with a general circulation model. *Динамика Крупномасштабных Атмосферных Процессов*, Издательство «Наука», Москва. 1967, 70 ~ 134
- [14] 曾庆存. 大气运动的特征参数和动力学方程. 气象学报, 1963, **33**: 472 ~ 483
Zeng Qingcun. Characteristic parameters and dynamic equation of the atmospheric movement. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1963, **33**: 472 ~ 483
- [15] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理学方程. 第一卷. 北京: 科学出版社, 1979, 22 ~ 25
Zeng Qingcun. *Mathematical Physics Foundation of the Numerical Weather Prediction*, Vol. 1. Science Press, 1979, 22 ~ 25
- [16] 曾庆存, 袁重光, 张学洪, 等. 一个大气环流模式分解格式的试验. 气象学报, 1985, **43**: 441 ~ 449
Zeng Qingcun, Yuan Chongguang, Zhang Xuehong, et al. A test for the difference scheme of a general circulation model. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1985, **43**: 441 ~ 449
- [17] Chen Jiabin, Ji Liren, WuWanli. Design and test of an improved scheme for global spectral model with reduced truncation error. *Adv. Atmos. Sci.*, 1987, **4**: 156 ~ 168
- [18] Ji Liren, Chen Jiabin, Zhang Daomin, et al. A spectral model for medium weather forecasts and its performance. International Conference on East Asia and Western Pacific Meteorology and Climate, Hong Kong 1989, Sham P, Chang C P, Eds. World Scientific. 1989, 474 ~ 483
- [19] Simmons A J, Chen Jiabin. The calculation of geopotential and the pressure gradient in the ECMWF atmospheric model: Influence on the simulation of the polar atmosphere and on temperature analyses. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1991, **117**: 29 ~ 58
- [20] Zhang Xuehong. Dynamical framework of IAP nine-level atmospheric general circulation model. *Adv. Atmos. Sci.*, 1990, **7**: 67 ~ 77
- [21] Zhang Daomin, Li Jinlong, Ji Liren, et al. A global spectral model and test of its performance. *Adv. Atmos. Sci.*, 1995, **12**: 67 ~ 78
- [22] Qian Y F, Zhong Z. General forms of dynamic equations for atmosphere in numerical models with topography. *J. Meteor. Soc. Japan*, 1986, Special Volume: 743 ~ 756
- [23] Klemp J B, Skamrock W C, Fuhrer O. Numerical consistency of metric terms in terrain-following coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, 2003, **131**: 1229 ~ 1239
- [24] Gallus W A, Klemp J B. Behavior of flow over step orography. *Mon. Wea. Rev.*, 2000, **128**: 1153 ~ 1164
- [25] Mesinger F. A blocking technique for representation of mountains in atmospheric models. *Riv. Meteor. Aeronautica*, 1984, **44**: 195 ~ 202
- [26] Egger J. Numerical experiments on the cyclogenesis in the Gulf of Genoa. *Beitr. Phys. Atmos.*, 1972, **45**: 320 ~ 346
- [27] 纪立人. 江淮切变线形成过程的数值分析. 气象学报, 1965, **35**: 18 ~ 33

- Chi Li-Ren. Numerical analysis of the process of a low level shear line formation over China. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1965, **35**: 18 ~ 33
- [28] 韩卫清, 纪立人. 正压原始方程有限区域谱模式的预报试验. *气象学报*, 1991, **49**: 469 ~ 481
- Han Weiqing, Ji Liren. Forecasting experiments with a barotropic primitive equation limited-area spectral model. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1991, **49**: 469 ~ 481
- [29] 宇如聪, 曾庆存, 彭贵康, 等. “ 雅安天漏 ” 研究, II. 数值预报试验, *大气科学*, 1994, **18**: 535 ~ 551
- Yu Rucong, Zeng Qingcun, Peng Guikang, et al. Research on “ Ya-An-Tian-Lou ” Part II: numerical trial-forecasting. *Scientia Atmospherica Sinica* (in Chinese), 1994, **18**: 535 ~ 551
- [30] 宇如聪, 徐幼平. AREM 及其对 2003 年汛期降水的模拟. *气象学报*, 2004 (待刊)
- Yu Rucong, Xu Youping. AREM and its simulation of the flood precipitation in 2003. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 2004
- [31] Laprise R. The Euler equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Mon. Wea. Rev.*, 1992, **120**: 197 ~ 207
- [32] Schär C, Leuenberger D, Fuhrer O, et al. A new terrain-following vertical coordinate fomulation for atmospheric prediction models. *Mon. Wea. Rev.*, 2002, **130**: 2459 ~ 2480
- [33] Phillips N A. The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1956, **82**: 123 ~ 164
- [34] Orszag S A. On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wave number components. *J. Atmos. Sci.*, 1971, **28**: 1074 ~ 1082
- [35] Chen Xionshan. A high accuracy numerical method for solving the nonlinear Korteweg-de Vries equation. *Scientia Sinica*, 1980, **3**(1): 75 ~ 87
- [36] Chen Xionshan. The aliased and the dealiased spectral models of the shallow-water equations. *Mon. Wea. Rev.*, 1993, **121**: 834 ~ 852
- [37] Chen Xionshan. Use of the aliased spectral model in numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, 1997, **125**: 2998 ~ 3007
- [38] Arakewa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two dimensional incompressible flow. Part I. *J. Comput. Phys.*, **1**: 119 ~ 143
- [39] Arakewa A. Numerical simulation of large-scale atmospheric motions. *Numerical Solution of Field Problem in Continuum Physics*. Proc. Symp. Math., Duham, N. C., 1968, SIAM-AMS Proc., 1970, **2**: 24 ~ 40
- [40] Arakewa A, Lamb V R. Computational design of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, 1977, **17**: 174 ~ 267
- [41] Lilly D K. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. *Mon. Wea. Rev.*, 1965, **93**: 11 ~ 26
- [42] 季仲贞. 二维 Lilly 格式中非线性计算不稳定的例子. *科学通报*, 1980, **25**(9): 890 ~ 893
- Ji Zhongzhen. A case of nonlinear computational instability in 2-d Lilly scheme. *Chinese Science Bulletin* (in Chinese), 1980, **25**(9): 890 ~ 893
- [43] 季仲贞. Arakawa 格式非线性计算不稳定的例子. *气象学报*, 1981, **39**(2): 237 ~ 239
- Ji Zhongzhen. A case of nonlinear computational instability in Arakawa scheme. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1981, **39**(2): 237 ~ 239
- [44] 曾庆存, 季仲贞. 发展方程的计算稳定性问题. *计算数学*, 1981, **1**: 79 ~ 86
- Zeng Qingcun, Ji Zhongzhen. On the computational stability of evolution equations. *Chinese Computational Mathematics* (in Chinese), 1981, **1**: 79 ~ 86
- [45] 左瑞亭, 张铭, 张东凌, 等. 21 层大气环流模式 IAP AGCM-III 的设计及气候数值模拟 I. 动力框架, *大气科学*, 2004, **28**(5): 659 ~ 674
- Zuo Ruiting, Zhang Ming, Zhang Dongling, et al. Designing and climatic numerical modeling of 21-level AGCM (IAP AGCM-III) Part I. dynamical framework. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2004, **28**(5): 659 ~ 674
- [46] Moussau V A, KNOLL D A, Reisher J M. An implicit nonlinearly consistent method for the two-dimensional shallow-water equations with Coriolis force. *Mon. Wea. Rev.*, 2002, **130**: 2611 ~ 2625
- [47] Knoll D A, Keges D E. Jacobean-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and application. *J. Comput. Phys.*, 2004, **193**: 357 ~ 397
- [48] 王斌, 季仲贞. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验. *科学通报*, 1990, **10**: 766 ~ 768
- Ji Zhongzhen, Wang Bin. On the construction and tests of explicit complete square-conservation scheme. *Chinese Science Bulletin* (in Chinese), 1990, **10**: 766 ~ 768
- [49] 季仲贞, 王斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用. *大气科学*, 1991, **15**(2): 1 ~ 9
- Ji Zhongzhen, Wang Bin. Further discussion on the construction and application of difference scheme of evolution equations. *Scientia Atmospherica Sinica* (in Chinese), 1991, **15**(2): 1 ~ 9
- [50] 钟青. 论发展问题保真计算格式的一般构造原理和若干应用. *计算物理*, 1992, **9**(4): 758 ~ 777
- Zhong Qing. A general inverse formulation principle of perfect conservative scheme and its applications. *Chinese Journal of Computational Physics* (in Chinese), 1992, **9**(4): 758 ~ 777
- [51] 钟青. 长效、经济的发展问题保真计算格式反演补偿. *科学通报*, 1993, **35**(12): 1101 ~ 1105
- Zhong Qing. On the inverse compensation of conservative scheme for evolution equation. *Chinese Science Bulletin* (in Chinese), 1993, **35**(12): 1101 ~ 1105
- [52] 陈嘉滨, 舒静君. 大气谱模式中质量守恒格式的研究. *大气科学*, 1996, **20**: 169 ~ 179
- Chen Jiabin, Shu Jingjun. Studies on mass-conservation in atmospheric spectral model. *Scientia Atmospherica Sinica* (in Chinese), 1996, **20**: 169 ~ 179
- [53] 陈嘉滨, 高学杰. 质量守恒律在国家气候中心气候谱模式中的应用. *大气科学*, 2000, **24**: 608 ~ 614
- Chen Jiabin, Gao Xuejie. An application of mass conservation law in the spectral model for national climate center. *Chinese Journal of*

- Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2000 , **24** : 608 ~ 614
- [54] Robert A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmos. Ocean* , 1981 , **19** : 35 ~ 46
- [55] Robert A. A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *J. Meteor. Soc. Japan* , 1982 , **60** : 319 ~ 325
- [56] Machenhauer B , Olk M. The implementation of the semi-implicit scheme in cell-integrated semi-Lagrangian models. *Max-Planck-Institut für Meteorologie* , 1995 , Rep. No. **156** : 1 ~ 32
- [57] Nair R , Machenhauer B. The mass-conservative cell-integrated semi-Lagrangian advection scheme on the sphere , *Mon. Wea. Rev.* , 2002 , **130** : 649 ~ 667
- [58] Colella P , Woodward P R. Piecewise parabolic method for gas dynamical simulations. *J. Comput. Phys.* , 1984 , **54** : 174 ~ 201
- [59] Carpenter R L , Droegemeier P , Woodward R , et al. Application of the piecewise parabolic method (PPM) to meteorological modeling. *Mon. Wea. Rev.* , 1990 , **118** : 586 ~ 612
- [60] Rancic M. Semi-Lagrangian piecewise biparabolic scheme for two-dimensional horizontal of a passive scalar. *Mon. Wea. Rev.* , 1992 , **120** : 1394 ~ 1406
- [61] Xiao F. A class of Single-cell high-order semi-Lagrangian advection schemes. *Mon. Wea. Rev.* , 2002 , **128** : 1165 ~ 1176
- [62] 陈嘉滨 季仲贞. 半拉格朗日平方守恒计算格式的研究. *大气科学* , 2001 , **25** (6) : 837 ~ 846
Chen Jiabin , Ji Zhongzhen. A study of energy-conserving semi-Lagrangian scheme. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese) , 2001 , **25** (6) : 837 ~ 846
- [63] 陈嘉滨 季仲贞. 半隐式半拉格朗日平方守恒计算格式的构造 , *大气科学* , 2004 , **28** (4) : 527 ~ 535
Chen Jiabin , Ji Zhongzhen. A study of complete square-conserving semi-implicit and semi-Lagrangian scheme. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese) , 2004 , **28** (4) : 527 ~ 535
- [64] Machenhauer B. The spectral methods. GARP publication series No. 17 , 1979 , Vol. II : 124 ~ 275
- [65] Temperton C. Can spectral methods on the sphere live forever ? Proceedings ECMWF Workshop on Developments in Numerical Methods for very High Resolution Global Methods. 2000 , 161 ~ 166
- [66] Canuto C , Maday Y , Quarteroni A. Combined finite element and spectral approximation of the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.* , 1984 , **44** : 201 ~ 217
- [67] Gao Benyu. Spectral-difference method for baroclinic primitive equation and its error estimation. *Scientia Sinica* , 1987 , **30A** : 697 ~ 713
- [68] Deville M O , Fischer P F , Mund E H. *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*. Cambridge University Press , 2002 , 499 pp
- [69] Taylor M , Tribbia J , Iskandarani M. The spectral element method for the shallow water equations on the sphere. *J. Comput. Phys.* , 1997 , **130** : 92 ~ 108
- [70] Giraldo F X , Rosmond T E. A scalable spectral element Eulerian atmospheric model (SEE-AM) for NWP : Dynamical core tests. *Mon. Wea. Rev.* , 2004 , **132** : 133 ~ 153
- [71] Wang H , Tribbia J , Baer F , et al. 2004 : Recent development and applications of a spectral element dynamical core. CCSM AMWG Meeting , 9 – 10 March 2004 , Boulder , Colorado , USA.