

β 中尺度暴雨系统发生发展的一种可能物理机制

I. 涡旋 Rossby 波的相速度

沈新勇¹ 倪允琪² 张 铭³ 赵 南² 彭丽霞¹

1 南京信息工程大学大气科学系, 南京 210044

2 中国气象科学研究院, 北京 100081

3 解放军理工大学气象学院, 南京 211101

摘 要 使用纬向基流下横波型扰动的 Boussinesq 近似方程组, 分析了这种沿着基本气流方向传播的中尺度扰动发生不稳定时, 大尺度背景流场在垂直方向上的各种分布特征。在大气层结比较稳定的情况下, 如果基本气流在低层和高层较大(有可能存在低空急流和高空急流), 此时产生的 β 中尺度不稳定扰动相对于基流向东传播, 甚至于快速向东传播。基本气流在垂直方向上的风速切变对于中尺度横波型的扰动起着不稳定的作用。如果考虑基流的二次切变, 可以得到涡旋 Rossby 波的相速度表达式, 涡旋 Rossby 波相对于基本气流是单向传播的。涡旋 Rossby 波产生的物理根源是基本流场的风速二次切变, 亦即基本流场 y 方向的平均涡度在空间 z 方向上的不均匀所致。涡旋 Rossby 波的相速度与纬向波数也有关, 它的能量是频散的, 其在纬向 x 方向也存在群速度。在基本流场的风速存在二次切变时, 横波型不稳定可能是混合的涡旋 Rossby 重力波的不稳定; 而在基本流场的风速仅仅存在线性切变, 不存在二次切变时, 横波型扰动的不稳定则是重力惯性波的不稳定。

关键词 β 中尺度暴雨系统 横波不稳定 涡旋 Rossby 波 基流二次切变

文章编号 1006-9895(2005)05-0727-07

中图分类号 P458

文献标识码 A

A Possible Mechanism of the Genesis and Development of Meso- β Rainstorm System

Part I. Phase Velocity of Vortex Rossby Waves

SHEN Xin-Yong¹, NI Yun-Qi², ZHANG Ming³, ZHAO Nan², and PENG Li-Xia¹

1 Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044

2 Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081

3 Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101

Abstract In the context of the Boussinesq approximation equations for transversal wave-type (TWT) disturbances in zonal basic flow, it is analysed that the various features in vertical distribution of a large-scale atmospheric background flow field when a meso-scale disturbance propagating along basic flow becomes unstable. Evidence suggests that 1) under more stable stratification, the basic flow, if moving faster at low and high levels (particularly in the presence of jets there), allows a resulting meso- β unsteady wave to propagate eastward with respect to basic flow and even at greater velocity compared with it; 2) vertical windspeed shear of basic flow causes instabilities of the TWT perturbation; 3) considering the second derivative of basic-flow wind with respect to z (denoted by $\bar{U}_{zz} \neq 0$ which is simply given as β_* hereafter) the expression for the phase velocity of vortex Rossby wave (VRoW) is obtained, which is unidirectional in propagation with respect to basic flow; 4) VRoW has its physical origin from β_* ,

收稿日期 2004-06-07, 2004-10-27 收修定稿

资助项目 国家重点基础研究发展规划项目 2004CB418301, 国家自然科学基金资助项目 40433007、40075023, 上海台风研究基金课题

作者简介 沈新勇, 男, 1964 年出生, 博士后, 副教授, 目前主要从事季风动力学、中尺度动力学及其数值模拟研究。E-mail: shenxy@nuist.edu.cn

i. e. , from z -varying heterogeneities of y -direction averaged vorticity of the basic flow field; 5) VRoW phase velocity is associated with zonal wave number k , its energy is dispersive and the group velocity exists in the x direction; 6) when windspeed meets the condition of β_* , TWT disturbance instability may be that of mixed VRoW and gravity wave; 7) if basic flow is subject to linear shear but does not meet the condition of β_* , the TWT instability is that of inertia-gravity wave.

Key words meso- β , rainstorm system, transversal-wave-type instability, vortex Rossby wave, the second derivative of basic flow with respect to z

1 引言

采用高空、地面的常规资料以及卫星雷达资料的观测事实分析表明,在梅雨锋暴雨的 α 中尺度系统中经常存在一些 β 中尺度对流云核(暴雨)的串状排列,它们快速向东传播,使得气象台站的天气预报较为困难^[1],因此,研究这一类 β 中尺度暴雨系统发生发展的可能物理机制显得特别重要。

有关这种扰动等位面垂直于基本气流,即传播方向沿着基本气流方向的横波型扰动方面的研究,过去的工作主要集中在天气尺度和对流尺度波段上。Charney^[2]和 Eady^[3]最早发现斜压气流对准地转天气尺度扰动的不稳定性(即斜压不稳定)。Kuo 和 Seitter^[4]在研究中性和部分不稳定层结大气中也曾简单地讨论过横波不稳定问题。张可苏^[5]将 Eady 模型推广到非地转解域,在稳定层结下利用数值方法求得扰动相速、发展率和特征流型,发现除了天气尺度和次天气尺度上的 Eady 模态之外,在几十至几百公里的中尺度上出现非地转斜压中尺度模态。而且中尺度模态的增长率约为 Eady 模态的 4 倍,并指出这可能是启动和组织深厚对流云团的一种动力学机制。王东海和周晓平^[6]利用准动量无辐散二维模式讨论了斜压切变基流上中尺度横波扰动的发展问题。张铭和张立凤^[7]对横波型不稳定扰动的谱点分布作了分析,得到了该不稳定扰动谱点分布的半圆定理。

由于变系数常微分方程理论上的求解较为困难,过去关于中尺度横波型扰动的不稳定问题,大都采用数值差分求解的方法。本文试图从数学上证明中尺度横波型扰动发生不稳定时,大尺度背景流场在垂直方向上的各种分布特征,并且分析求解得到涡旋 Rossby 波的相速度表达式,讨论涡旋 Rossby 波产生的物理根源以及一些物理性质,从而说明横波型不稳定的波动性质。

2 数学模型

在不考虑外界强迫,即不考虑地表摩擦、地形、外界热量的传输以及潜热的影响,此时大气运动方程组为

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu, \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (5)$$

在上述方程组中,近似考虑锋面方向为东西方向,故可假定南北方向的基本气流为零,只考虑纬向的基本气流 \bar{U} ,假定基本气流 \bar{U} 仅仅是 z 的函数。将所有的物理量进行分解, $u = \bar{U}(z) + u'$, $v = v'$, $w = w'$, $p = \bar{P}(y, z) + p'$, $\rho = \bar{\rho}(y, z) + \rho'$, $\theta = \bar{\theta}(y, z) + \theta'$,对上述方程组进行线性化处理,并且使用 Boussinesq 近似。由于主要讨论的是东西方向排列的 β 中尺度的暴雨问题,可以近似假定所有扰动量都与 y 无关,亦即主要讨论沿着基本气流方向传播的中尺度扰动不稳定,就可以得到如下的中尺度二维运动方程组:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + f v' - w' \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) v' = -f u', \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) w' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\theta} g, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) \theta' = -v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (10)$$

有关该方程组及其边界条件的详细处理过程,

参见文献[8]。由于在 (x, z) 平面内, 扰动速度是无辐散的, 可以引进扰动流函数, $u' = \partial\psi/\partial z$, $w' = -\partial\psi/\partial x$ 。假定基本场满足热成风平衡关系, 设定层结稳定度参数 $N^2 = (g/\bar{\theta})(\partial\bar{\theta}/\partial z)$, 斜压稳定度参数 $S^2 = f(\partial\bar{U}/\partial z) = -(g/\bar{\theta})(\partial\bar{\theta}/\partial y)$, 则从方程(6)和方程(8)消去气压扰动 p' , 得到:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi = \bar{U}_z\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}}g\right) + f\frac{\partial v'}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)v' = -f\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}}g\right) = S^2v' + N^2\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (13)$$

从方程组(11)~(13)消去 v' 以及 $(\theta'/\bar{\theta})g$, 可以得到只含有扰动流函数变量 ψ 的微分方程,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)^3\nabla^2\psi + f^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \\ &2fS^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} + N^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \\ &\bar{U}_z\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

3 横波不稳定的基流分布特征

对方程(14)中的流函数求特征波解, 令 $\psi = \Psi(z)e^{ik(x-ct)}$, 则可以得到 $\Psi(z)$ 关于 z 的常微分方程:

$$\begin{aligned} &[f^2 - k^2(c - \bar{U})^2]\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \frac{2fS^2}{c - \bar{U}}\frac{d\Psi}{dz} + \\ &k^2[k^2(c - \bar{U})^2 - \bar{U}_z(c - \bar{U}) - N^2]\Psi = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

对方程进行函数变换, 令

$$\Psi = \tilde{\Psi}e^{-\alpha z}, \quad \alpha = -\frac{fS^2}{(c - \bar{U})[f^2 - k^2(c - \bar{U})^2]},$$

则式(15)变换为

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dz^2} + \beta\tilde{\Psi} = 0, \quad (16) \\ &\beta = \frac{k^2[k^2(c - \bar{U})^2 - \bar{U}_z(c - \bar{U}) - N^2]}{f^2 - k^2(c - \bar{U})^2} - \\ &\frac{f^2S^4}{(c - \bar{U})^2[f^2 - k^2(c - \bar{U})^2]^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

如果扰动是不稳定的, 扰动流函数的振幅将随时间增长, 则 c 必须为复数。设 $c = c_r + ic_i$, $\beta = \beta_r + i\beta_i$, $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_r + i\tilde{\Psi}_i$, 代入到(16)式, 并且将其按照实部和虚部分别写出:

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}_r}{dz^2} + \beta_r\tilde{\Psi}_r - \beta_i\tilde{\Psi}_i = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}_i}{dz^2} + \beta_r\tilde{\Psi}_i + \beta_i\tilde{\Psi}_r = 0, \quad (19)$$

用 $\tilde{\Psi}_i$ 乘以(18)式, $\tilde{\Psi}_r$ 乘以(19)式, 然后两式相减:

$$\tilde{\Psi}_i\frac{d^2\tilde{\Psi}_r}{dz^2} - \tilde{\Psi}_r\frac{d^2\tilde{\Psi}_i}{dz^2} - \beta_i(\tilde{\Psi}_r^2 + \tilde{\Psi}_i^2) = 0, \quad (20)$$

或者改写为

$$\frac{d}{dz}\left(\tilde{\Psi}_i\frac{d\tilde{\Psi}_r}{dz} - \tilde{\Psi}_r\frac{d\tilde{\Psi}_i}{dz}\right) - \beta_i|\tilde{\Psi}|^2 = 0. \quad (21)$$

考虑到垂直方向上的边界条件 $\tilde{\Psi}|_{z=0, H} = 0$, 将上式从 0 到 H 对 z 积分, 则上式左端第一项积分为零, 于是得到:

$$\int_0^H \beta_i|\tilde{\Psi}|^2 dz = 0. \quad (22)$$

由于 $|\tilde{\Psi}|^2 > 0$, 要使上式成立, 则 β_i 必须在区间 $(0, H)$ 内变号, 即要求在区间 $(0, H)$ 内某一点 $z = z_k$ 处, 有

$$\beta_i|_{z=z_k} = 0. \quad (23)$$

将(17)式代入(23)式, 并且注意到 $c_i \neq 0$, 则在 $z = z_k$ 处, 下式成立:

$$\begin{aligned} &\left|(c - \bar{U})^2[f^2 - k^2(c - \bar{U})^2]\right|^2 \left\{2k^4(f^2 - N^2) + \right. \\ &k^2[f^2 + k^2(c_r - \bar{U})^2 + k^2c_i^2] \frac{\bar{U}_z}{(c_r - \bar{U})} \left. + \right. \\ &2f^2S^4 \left|f^2 - k^2(c - \bar{U})^2\right|^2 [f^2 - k^2(c_r - \bar{U})^2 + \\ &3k^2c_i^2][f^2 - 3k^2(c_r - \bar{U})^2 + k^2c_i^2] = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

上式中 $|*|$ 表示复向量的模, 以下分三种情况对该式进行讨论:

(1) 考虑无旋、中性层结的情况, 即 $f=0$, $N^2=0$, 此时(24)式退化为

$$\bar{U}_z|_{z=z_k} = 0, \quad (25)$$

即在无旋、中性层结的情况下, 要使得沿着基本气流方向传播的中尺度扰动不稳定发展, 基本气流在垂直方向上的分布必须具有拐点, 此时的分布特征大致如图 1 所示。

(2) 考虑无旋、稳定层结 ($N^2 > 0$) 的情况, 通过(24)式可以看到, 相对于基流向东传播的扰动 ($c_r > \bar{U}$), 其不稳定的必要条件是 $\bar{U}_z|_{z=z_k} > 0$; 而相对于基流向西传播的扰动 ($c_r < \bar{U}$), 其不稳定的必要条件则是 $\bar{U}_z|_{z=z_k} < 0$ 。此时基本气流在垂直方向的分布特征如图 2 和图 3 所示。但是对于无旋、不稳定层结的情形, 所得到的结论刚好与之相反。

(3) 对于有旋的情况而言, 不论是较弱的稳定

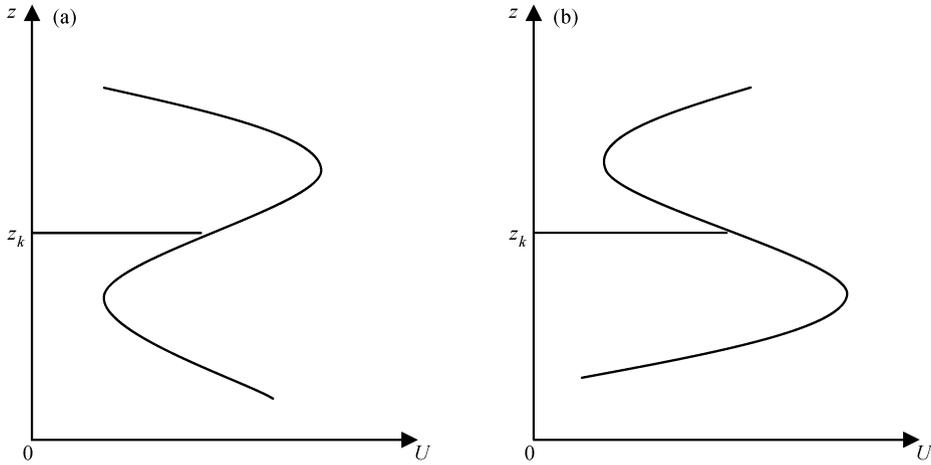


图1 无旋和中性层结情况下沿着基本气流方向传播的 β 中尺度扰动发展时的基流垂直分布:(a)存在高空急流的情况;(b)存在低空急流的情况
Fig. 1 Vertical distribution of basic flow as meso- β disturbance propagating along it develops in the situation of neutral stratification and non-rotation; (a) high-level jet; (b) low-level jet

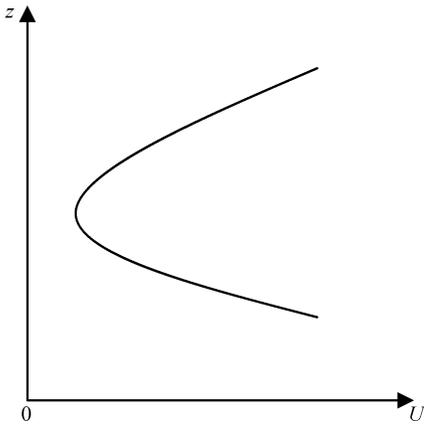


图2 无旋稳定层结情况下相对于基流向东传播的扰动($c_r > \bar{U}$)不稳定发展时基本气流在垂直方向的分布特征
Fig. 2 Vertical distribution of basic flow when the eastward propagating disturbance ($c_r > \bar{U}$) experiences unstable development at $f=0$ and $N^2 > 0$

层结 $0 < N^2 < f^2$, 还是不稳定层结 $N^2 < 0$, 通过分析(24)式可以看到, 一般情况下, 相对于基流向东传播的扰动 ($c_r > \bar{U}$), 其不稳定的必要条件是 $\bar{U}_\infty|_{z=z_k} < 0$; 而相对于基流向西传播的扰动 ($c_r < \bar{U}$), 其不稳定的必要条件则是 $\bar{U}_\infty|_{z=z_k} > 0$, 在这两种情况下基本气流在垂直方向的分布特征类似于如图3和图2所示。

但是, 在大气层结比较稳定 ($N^2 > f^2$) 的情况下, 如果基本气流在垂直方向的分布特征类似于图2所示, 基流在低层和高层较大(有可能存在低空

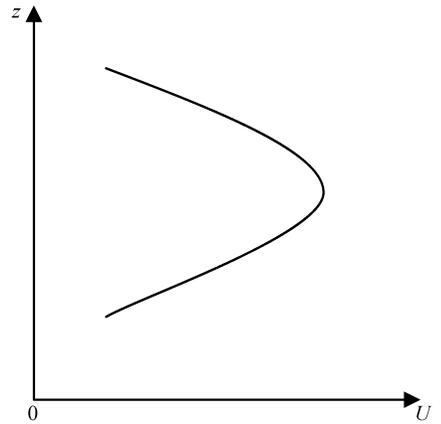


图3 同图2, 但为相对于基流向西传播的情况
Fig. 3 Same as Fig. 2, but for the westward propagating perturbation

急流和高空急流), 此时产生的 β 中尺度不稳定扰动相对于基流向东传播 ($c_r > \bar{U}$), 甚至于快速向东传播, 这与梅雨锋暴雨中一些对流云核的天气观测事实是相一致的^[1]; 如果基本气流在垂直方向的分布特征类似于图3所示, 基流在中层较大, 此时产生的不稳定扰动相对于基流向西传播 ($c_r < \bar{U}$)。事实上, 之所以如此, 其根本原因可能是涡旋 Rossby 波作用的结果, 这在下面给予证明。

4 涡旋 Rossby 波的相速度及其能量频散关系——横波不稳定的波动性质

假定, 地面 $z=0$ 处的基本气流为 \bar{U}_0 , 任意高

度 z 上的基本气流为 $\bar{U} = \bar{U}_0(1 + \epsilon z/H)$, $|\epsilon| \ll 1$, 这里 $\epsilon = (H/\bar{U}_0)(\partial\bar{U}/\partial z)$, 是一个常数, 该条件表示背景流场的风速垂直切变很小。在这样的假定条件下, 由于 $z/H \leq 1$, 方程(15)中含有 $(c - \bar{U})$ 的项可以近似表示为 $c - \bar{U}_0(1 + \epsilon z/H) \approx c - \bar{U}_0$, 而 $S^2 = f\partial\bar{U}/\partial z = \epsilon f\bar{U}_0/H$, 这时方程(15)式处理为

$$(c - \bar{U}_0)[f^2 - k^2(c - \bar{U}_0)^2] \frac{d^2\Psi}{dz^2} + 2\epsilon f^2 \frac{\bar{U}_0}{H} \frac{d\Psi}{dz} + k^2(c - \bar{U}_0)[k^2(c - \bar{U}_0)^2 - N^2]\Psi = 0, \quad (26)$$

定义

$$\delta = -\frac{\epsilon f^2 \bar{U}_0}{H(c - \bar{U}_0)[f^2 - k^2(c - \bar{U}_0)^2]},$$

$$\mu^2 = \frac{k^2[k^2(c - \bar{U}_0)^2 - N^2]}{f^2 - k^2(c - \bar{U}_0)^2} - \delta^2,$$

则式(26)的解是:

$$\Psi = e^{\delta z}(A \sin \mu z + B \cos \mu z), \quad (27)$$

将上面的 Ψ 解应用到边界条件 $\Psi|_{z=0, H} = 0$, 就会得到 $\mu H = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 即如下的本征值关系:

$$k^4 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right] c_*^2 - k^2 \left[2 \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 f^2 + k^2(f^2 + N^2) \right] c_* + f^2 \left[\left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 f^2 + k^2 N^2 \right] + \frac{\epsilon^2 f^4 \bar{U}_0^2}{H^2 c_*} = 0, \quad (28)$$

其中, $c_* = (c - \bar{U}_0)^2$ 。注意到上式是关于 c_* 的三次方程, 它有两类性质截然不同的解。

第一类解的波动频率的量级为 $O(f)$ 或者 $O(N)$, 对于这一类扰动, 所有含有 ϵ 的项可以忽略。精确到量级 $O(\epsilon^2)$, 将(28)式左端的最后一项略去, 得到两个解:

$$c_{*1} = \frac{f^2}{k^2} + O(\epsilon^2), \quad (29)$$

$$c_{*2} = \frac{\left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 f^2 + k^2 N^2}{k^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right]} + O(\epsilon^2). \quad (30)$$

可以证明 c_{*1} 是一个虚假的根, 而 c_{*2} 表示的是重力惯性波型。

对于三次方程(28)的第三个根, $c_{*3} = O(\epsilon^2)$, 此时(28)式中的前两项都可以忽略, 而第四项的量级为 $O(1)$, 于是可以导出如下的关系式:

$$c_{*3} = -\frac{f^2 \left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial z} \right)^2}{\left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 f^2 + k^2 N^2}, \quad (31)$$

即

$$c = \bar{U}_0 \pm \sqrt{-c_{*3}}i. \quad (32)$$

由此可见, 相速度出现了虚数, 横波型的波动出现了不稳定, 而不稳定的根源是由于平均流场在垂直方向上的线性风速切变。值得注意的是, 在此线性风速切变的情况下, 根本不可能存在稳定传播的涡旋 Rossby 波。事实上可以证明, 要使稳定的涡旋 Rossby 波存在, 基本气流在垂直方向上的切变必须是非线性的, 至少要求 $\bar{U}_z \neq 0$, 这在下面来给予讨论。

同样, 假定地面 $z=0$ 处的基本气流为 \bar{U}_0 , 任意高度 z 上的基本气流为

$$\bar{U} = \bar{U}_0 \left(1 + \epsilon \frac{z^2}{H^2} \right), \quad |\epsilon| \ll 1,$$

这里

$$\epsilon = \frac{H^2}{2\bar{U}_0} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2}$$

是一个常数, 该条件表示背景流场的二阶风速垂直切变很小。在这样的假定条件下, 由于 $z^2/H^2 \leq 1$, 方程(15)中含有 $(c - \bar{U})$ 的项可以近似表示为

$$c - \bar{U}_0 \left(1 + \epsilon \frac{z^2}{H^2} \right) \approx c - \bar{U}_0,$$

此外, 为了处理问题的方便, 讨论无旋流体的情况(即 $f=0$)时, 方程(15)式处理为

$$(c - \bar{U}_0)^2 \frac{d^2\Psi}{dz^2} - [k^2(c - \bar{U}_0)^2 - 2\epsilon \frac{\bar{U}_0}{H^2}(c - \bar{U}_0) - N^2]\Psi = 0. \quad (33)$$

设定 $\Psi = A \sin \frac{n\pi}{H} z$, 使其满足边界条件 $\Psi|_{z=0, H} = 0$, 则得到如下的频散关系:

$$\left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right] (c - \bar{U}_0)^2 - 2\epsilon \frac{\bar{U}_0}{H^2} (c - \bar{U}_0) - N^2 = 0, \quad (34)$$

亦即

$$c = \bar{U}_0 + \frac{\bar{U}_z}{2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right]} \pm \frac{1}{2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right]} \cdot \sqrt{(\bar{U}_z)^2 + 4N^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right]}. \quad (35)$$

下面分三种情况来讨论相速度表达式(35)的物理含义:

(1) 考虑 $\bar{U}_z = 0$, 但是 $N^2 \neq 0$ 时,

$$c_{1,2} = \bar{U}_0 \pm \frac{|N|}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}},$$

上式表示在没有基本流场二次切变的情况下, 扰动是相对于基流向东西方向双向传播的重力内波。

(2) 考虑 $N^2=0$, 但是 $\bar{U}_z \neq 0$ 时, 此时 $c_1 = \bar{U}_0$, 而更具有物理意义的是相速度 c_2 ,

$$c_2 = \bar{U}_0 + \frac{\beta_*}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2} = \bar{U}_0 + \frac{\bar{U}_z}{k^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}, \quad (36)$$

它其实就是涡旋 Rossby 波的相速度表达式。从 (36) 式可以看出, 涡旋 Rossby 波相对于基本气流 \bar{U}_0 是单向传播的。当 $\beta_* = \bar{U}_z > 0$ 时, 涡旋 Rossby 波相对于基本气流 \bar{U}_0 是向东传播的; 而当 $\beta_* = \bar{U}_z < 0$ 时, 涡旋 Rossby 波相对于基本气流 \bar{U}_0 是向西传播的。因此, 如果基本气流在垂直方向的分布特征类似于图 2 所示 ($\bar{U}_z > 0$), 基流在低层和高层较大 (有可能存在低空急流和高空急流), 此时产生的涡旋 Rossby 波相对于基流向东传播 ($c > \bar{U}_0$), 甚至于快速向东传播; 如果基本气流在垂直方向的分布特征类似于图 3 所示 ($\bar{U}_z < 0$), 基流在中层较大, 此时产生的涡旋 Rossby 波相对于基流向西传播 ($c < \bar{U}_0$)。在此处要特别注意的是, 由于中尺度系统的垂直上升运动比较重要, 我们要特别着眼于 (x, z) 平面内中尺度环流, 亦即要考虑 y 方向的涡度, 而不是垂直 z 方向的涡度。通过分析可知, 涡旋 Rossby 波产生的物理根源是基本流场的风速 \bar{U} 二次切变 ($\beta_* = \bar{U}_z \neq 0$), 即基本流场 y 方向的平均涡度 $\bar{\zeta}_y = \partial \bar{U} / \partial z$ 在空间 z 方向上的不均匀 ($\beta_* = \partial \bar{\zeta}_y / \partial z \neq 0$) 所致, $\beta_* = \partial \bar{\zeta}_y / \partial z$ 起到中纬度大尺度行星 Rossby 波中 β 项相类似的作用, 只不过那里 β 项是地球旋转牵连行星涡度 f 在南北方向上的变化 ($\beta = \partial f / \partial y$) 而已。当 $\bar{\zeta}_y$ 沿着空间 z 方向上增大时, 涡旋 Rossby 波就是相对于基本气流 \bar{U}_0 向东传播的; 当 $\bar{\zeta}_y$ 沿着空间 z 方向上减少时, 涡旋 Rossby 波就是相对于基本气流 \bar{U}_0 向西传播的。此外, 由于涡旋 Rossby 波的相速度与波数 k 有关, 它的能量也是频散的, 其在 x 方向上的群速度为

$$c_{gr} = \bar{U}_0 - \bar{U}_z \frac{k^2 - \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}{\left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\right]^2}. \quad (37)$$

(3) 如果 $\bar{U}_z \neq 0, N^2 \neq 0$, 那么, 此时由于 $\bar{U}_z \rightarrow 0$ 时, (35) 式所表示的扰动相速度就趋向于重力内波的相速度表达式; 而 $N^2 \rightarrow 0$ 时, (35) 式所表示的扰动相速度则趋向于涡旋 Rossby 波的相速度表达式 (36)。同样在波谱图上, 当 k 较小时, 扰动就趋向于涡旋 Rossby 波; 而当 k 较大时, 扰动趋向于重力内波。因此, 由 (35) 式所表示的横波型扰动可能是混合的涡旋 Rossby 重力波。从这个意思上讲, 在基本流场的风速 \bar{U} 存在二次切变 ($\beta_* = \bar{U}_z \neq 0$) 时, 横波型不稳定可能是混合的涡旋 Rossby 重力波的不稳定; 而在基本流场的风速 \bar{U} 仅仅存在线性切变, 不存在二次切变 ($\beta_* = \bar{U}_z = 0$) 时, 横波型扰动的不稳定则是重力惯性波的不稳定。

5 结论

为了探讨梅雨锋暴雨中 β 中尺度暴雨系统发生发展的物理机制, 解释其快速向东传播的物理特征, 本文使用了纬向基流下横波型扰动的 Boussinesq 近似方程组, 采用 Rayleigh 方法分析了这种沿着基本气流方向传播的中尺度扰动发生不稳定时, 大尺度背景流场在垂直方向上的各种分布特征, 其主要结论如下:

(1) 在大气层结比较稳定 ($N^2 > f^2$) 的情况下, 如果基本气流在低层和高层较大 (有可能存在低空急流和高空急流), 此时产生的 β 中尺度不稳定扰动相对于基流向东传播 ($c_r > \bar{U}$), 甚至于快速向东传播; 相反, 如果基本气流在对流层中层较大, 此时产生的不稳定扰动相对于基流向西传播 ($c_r < \bar{U}$)。

(2) 进一步的理论分析表明, 基本气流在垂直方向上的风速切变对于中尺度横波型的扰动起着不稳定的作用。如果考虑基流的二次切变, 可以得到涡旋 Rossby 波的相速度表达式 $c = \bar{U}_0 + \bar{U}_z / (k^2 + m^2)$ (其中 $m = n\pi/H$), 涡旋 Rossby 波相对于基本气流 \bar{U}_0 是单向传播的。当 $\beta_* = \bar{U}_z > 0$ 时, 涡旋 Rossby 波相对于基本气流 \bar{U}_0 是向东传播的; 而当 $\beta_* = \bar{U}_z < 0$ 时, 涡旋 Rossby 波相对于基本气流 \bar{U}_0 是向西传播的。

(3) 涡旋 Rossby 波产生的物理根源是基本流场的风速 \bar{U} 二次切变 ($\beta_* = \bar{U}_z \neq 0$), 即基本流场 y 方向的平均涡度 $\bar{\zeta}_y = \partial \bar{U} / \partial z$ 在空间 z 方向上的不均匀 ($\beta_* = \partial \bar{\zeta}_y / \partial z \neq 0$) 所致, $\beta_* = \partial \bar{\zeta}_y / \partial z$ 起到中纬度大尺度行星 Rossby 波中 β 项相类似的作用。当

$\bar{\xi}_y$ 沿着空间 z 方向上增大时, 涡旋 Rossby 波就是相对于基本气流 \bar{U}_0 向东传播的; 当 $\bar{\xi}_y$ 沿着空间 z 方向上减少时, 涡旋 Rossby 波就是相对于基本气流 \bar{U}_0 向西传播的。

(4) 涡旋 Rossby 波的相速度与纬向波数 k 也有关, 它的能量是频散的, 在纬向 x 方向也存在群速度。

(5) 在基本流场的风速 \bar{U} 存在二次切变 ($\beta_* = \bar{U}_\infty \neq 0$) 时, 横波型不稳定可能是混合的涡旋 Rossby 重力波的不稳定; 而在基本流场的风速 \bar{U} 仅仅存在线性切变, 不存在二次切变 ($\beta_* = \bar{U}_\infty = 0$) 时, 横波型扰动的不稳定则是重力惯性波的不稳定。

参考文献 (References)

- [1] 杨金锡, 冯志娟, 郑媛媛. 1991 年 6 月 12 日~16 日江淮特大暴雨中尺度天气过程分析. 气象学报, 1994, **52**(2): 187~193
Yang Jinxi, Feng Zhixian, Zheng Yuanyuan. A case analysis of mesoscale system during heavy rainfall period in Yangtze and Huaihe River basin on June 12-16, 1991. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1994, **52**(2): 187~193
- [2] Charney J G. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Atmos. Sci.*, 1947, **4**: 135~162
- [3] Eady E T. Long waves and cyclone waves. *Tellus*, 1949, **1**:

33~52

- [4] Kuo H L, Seitter K L. Instability of shearing geostrophic currents in neutral and partly unstable atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 1985, **42**: 331~345
- [5] 张可苏. 斜压气流的中尺度稳定性 II. 横波型不稳定. 气象学报, 1988, **46**(4): 385~392
Zhang Kesu. On mesoscale instability of a baroclinic flow 2. transversal instability. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1988, **46**(4): 385~392
- [6] 王东海, 周晓平. 斜压大气中尺度横波扰动的发展. 大气科学, 1994, **18**(1): 61~71
Wang Donghai, Zhou Xiaoping. The development of mesoscale transversal disturbances in the baroclinic atmosphere. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (Scientia Atmospherica Sinica)*(in Chinese), 1994, **18**(1): 61~71
- [7] 张铭, 张立凤. 不稳定横波型扰动谱点分布的半圆定理. 大气科学, 2002, **26**(1): 102~110
Zhang Ming, Zhang Lifeng. A semicircle theorem on the spectral distribution in transverse instability perturbation. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (Scientia Atmospherica Sinica)*(in Chinese), 2002, **26**(1): 102~110
- [8] 沈新勇. 对称不稳定与波-流相互作用理论研究. 北京大学博士学位论文, 1994, 19~23
Shen Xinyong. Theoretical study on symmetric instabilities and the interactions between wave and basic flow. Ph. D. dissertation (in Chinese), Peking University. 1994, 19~23