

基于螺旋度的中尺度平衡方程及非平衡流诊断方法

高守亭¹ 周非凡^{1,2}

1 中国科学院大气物理研究所云降水物理和强风暴实验室, 北京 100029

2 中国科学院研究生院, 北京 100049

摘 要 在回顾大尺度准地转平衡理论、各种平衡方程、平衡模式及非平衡流诊断工具的基础上, 对平衡方程、非平衡方程给出了具体的定义。并在此基础上, 进一步考虑中尺度强对流天气系统的特征, 指出中尺度也有平衡运动的存在。但是由于中尺度对流系统中强烈的辐散风效应以及不可忽略的垂直运动的作用, 以散度方程为基础的各种近似平衡方程不足以描述中尺度强对流天气系统的平衡运动, 进而提出了从能够同时考虑旋转、辐散及垂直运动作用的螺旋度方程出发, 寻找中尺度的平衡方程。在所得的平衡方程基础上, 给出了相应的平衡模式和非平衡方程。并进一步将非平衡方程分解, 用来诊断非平衡过程的平衡破坏和平衡恢复两个阶段, 同时将它们与水平螺旋度和垂直螺旋度联系起来。

关键词 螺旋度 平衡方程 平衡模式 非平衡方程 诊断

文章编号 1006-9895(2006)05-0854-09

中图分类号 P433

文献标识码 A

Mesoscale Balance Equation and the Diagnostic Method of Unbalanced Flow Based on Helicity

GAO Shou-Ting¹ and ZHOU Fei-Fan^{1,2}

1 *Laboratory of Cloud-Precipitation Physics and Severe Storms, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*

2 *Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049*

Abstract By retrospectively large-scale quasi-geostrophy theory and many kinds of balance equations and models, including some methods of the diagnosis of unbalanced flow, the authors make the concrete mathematics definitions for balance equations and imbalance equations as well as point out their physical meanings. Furthermore, the authors analyze many mesoscale strong-convective systems and conclude that there also exist balanced motions in the mesoscale convective system. But in the mesoscale strong-convective system the divergent wind is strong and the vertical motion cannot be neglected, so all those balance equations based on divergent equation are not adapt to be used in the analysis of mesoscale balanced or unbalanced motion. Thus it is presented to construct a kind of new balance equation which includes the divergence, vorticity and vertical motion simultaneously. After the scale-analysis of helicity equation, the authors find a balance equation which meets well that condition. On the basis of this, the authors infer horizontal divergence equation, vertical vorticity equation, continuity equation and thermal dynamic equation under the same approximations. All these equations form a set of new balance model. As to the new balance equation, the imbalance equation is to retain all other relative small terms in the primitive equation, thus it is equal to the helicity equation. If the unbalanced process is divided into two periods, the imbalance equation can be decomposed

into two equations. Furthermore, it is found that the two periods of the unbalanced flow can separately be connected to the horizontal helicity and vertical helicity, that is, the horizontal helicity and vertical helicity can be taken as the tools of diagnosing unbalanced flow.

Key words helicity, balance equation, balance model, imbalance equation, diagnosis

1 引言

在气象中, 所谓平衡最简单的是指风场和质量场之间的一种诊断关系。值得注意的是, 一般这种关系不随时间发生变化, 然而对于场变量本身是可以随时间变化的, 或者说是一种动态平衡。非平衡一般指的是物理量场偏离平衡状态的程度。在气象上, 最经常使用的平衡是静力平衡和地转平衡。对于地转平衡, 虽然大气中实际上并不可能满足, 但是基于它的准地转近似、半地转近似以及地转动量近似已经成为人们研究大尺度大气运动、锋面、急流的最常用近似^[1~4]。然而对于中尺度系统, 由于强烈的对流而呈现出明显的非静力平衡特征, 同时, 由于其强的非地转性, 准地转近似是行不通的。半地转近似、地转动量近似虽然可以用于部分中尺度系统(锋面、急流), 但是对其他非带状结构的、具有强辐合辐散的中尺度系统(如中尺度强对流风暴)则不适用了。与准地转近似、半地转近似、地转动量近似同时发展的还有非线性平衡方程以及建立在它们之上的平衡模式。这些平衡方程或者平衡模式根据其假设条件不同也可以用来解释不同情况下的天气系统。Charney^[5, 6]最早给出非线性平衡方程形式:

$$\nabla^2 \Phi - \nabla \cdot (f \nabla \Psi) - 2 \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad (1)$$

这里 Φ 是位势, Ψ 是流函数, f 为科里奥利参数, 采用的是 p 坐标系, 且有 $u = -\partial \Psi / \partial y$, $v = \partial \Psi / \partial x$ 。该方程是由散度方程简化得来的, 其适用性在于当重力波活动很不明显, 且 Froude 数 (Fr) 和 Rossby 数 (Ro) 均满足 $Fr \ll 1$, $Ro \ll 1$ 的情况下, 则通常存在水平散度的局地变化项 $\partial \delta / \partial t$ 趋于和 $\min(Fr^2, Ro^2)$ 同量级而可以忽略时, 这种运动可用 (1) 式来较好的表示。若考虑辐散风成分, 取

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

其中, χ 为势函数。以 Rossby 数为小参数 ($Ro = \epsilon$), Allen 等^[1]得到如下的非线性平衡方程:

$$\nabla^2 \Phi - \nabla^2 \Psi - 2\epsilon \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0. \quad (2)$$

进一步保留了部分 $O(\epsilon^2)$ 的项, 得非线性平衡方程:

$$\nabla^2 \Phi - \nabla^2 \Psi - 2\epsilon \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \epsilon^2 \left(\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) = 0. \quad (3)$$

以上各种平衡方程都是假设 Ro (或 ϵ) $\ll 1$, 即假定科里奥利力远远比惯性力重要。而我们知道, 中尺度系统中科里奥利力、惯性力、气压梯度力都很重要, 是这三个力共同决定系统的发生发展状况的, 因此平衡方程 (1)、(2)、(3) 也只适用于大尺度分析。Raymond^[7]推导出大 Rossby 数下的非线性平衡方程, 但是推导过程中假定了速度势、散度以及垂直速度的量级都远小于 1, 最后得到的非线性平衡方程形如 (1) 式, 只是气压梯度力采用了含无量纲数 π 的形式。同样, 它对于具有强烈辐合辐散和激烈垂直运动的中尺度系统来说也是不适用的。类似于非线性平衡方程, 人们又提出了准平衡方程、线性平衡方程、双线性平衡方程、半平衡方程、近平衡方程、混合平衡方程等等^[1, 2, 8], 所有这些都是由散度方程通过各种近似简化得到的, 它们或者采用了 $Ro \ll 1$, 或者人为的假设一些量(如辐合辐散、垂直速度、速度势等等)为小量。以上各种平衡方程可以分情况用于大尺度天气系统或者中尺度浅薄系统。但是对于具有明显辐散风效应的强烈发生发展的中尺度系统是不适用的。另一种平衡方程是慢流型^[9], 它是由涡度方程结合连续方程, 忽略了方程中的时间倾向项而得到的, 虽然该方程中出现了散度效应, 但是它是基于正压浅水模式得到的, 考虑的是大尺度涡旋波的缓慢移动, 也是属于地转平衡的范畴, 对于明显非地转的中尺度系统也是不可用的。因此有学者认为^[10], 中尺度就是

缺乏大尺度平衡。但是对中尺度对流系统 (MCSs) 和中尺度对流复合体 (MCC) 的观测和模拟均发现^[11~17], 它们的突出特征之一是均存在中尺度对流涡 (MCV), 该涡为暖心结构类似于热带气旋, 起着加强惯性稳定性的作用, 即使得非绝热加热在产生平衡旋转流作用方面更加有效。有关研究^[18~20]表明这些气流在很大程式度上是处于平衡的, 即指它们的热力结构同中尺度环流是近乎平衡条件进行演变的。因此, 我们认为中尺度天气系统中也是有平衡运动存在的, 也有相应的描述方程。涡旋在中尺度平衡中仍起着重要的作用, 但是辐散的作用却是不可忽略的。在中尺度系统中, 辐散风和旋转风的作用都很重要, 因此其平衡方程除了要有旋转风成分外, 也应该包含有辐散风成分。另外, 中尺度垂直运动作用也很重要, 在平衡方程中也不可忽略。可见, 以上提到的一系列大尺度平衡方程对于描述中尺度的平衡运动是不够的。基于此, 我们考虑不从散度、涡度方程出发, 而从能同时包含辐散风和旋转风效应的螺旋度方程出发。因此, 本文将对螺旋度方程进行分析, 寻求适合描述中尺度特征的平衡方程。

从平衡方程出发, 可以构建平衡模式, 具体地说, 平衡模式是由一组方程组构成的。该方程组中除了平衡方程外, 至少还包含一个慢时间倾向的方程, 当然还可以有静力方程、热力学方程、涡度方程、连续方程等等。前面提到的准地转近似、半地转近似以及地转动量近似也是一种平衡模式 (它们含有地转平衡方程), 与基于非线性平衡方程、准平衡方程、半平衡方程等的平衡模式一起, 是从原始方程组到地转平衡的一系列中间模式的两个平行的分支^[2]。本文在得出平衡方程后也将相应给出平衡模式。

与平衡相对应的是非平衡。非平衡指的是不满足地转平衡关系、热成风平衡关系, 或者不满足准平衡方程、线性平衡方程、双线性平衡方程、半平衡方程、近平衡方程、混合平衡方程等等。平衡运动可以用平衡方程、平衡模式来描述。对于非平衡运动, 相应地也有诊断的工具。最常用的是直接将非线性平衡方程及其他各类平衡方程进行诊断。方法是计算平衡方程中各项的和, 由其值的大小来判断非平衡的程度 (强弱情况), 然后计算风场, 散度场以及垂直速度场, 对该非平衡运动进行检验^[21]。

非平衡流的诊断还有:

(1) Lagrangian Rossby 数及其各种简化形式, 如对流 Ro 、完全拉格朗日 Ro 和拉格朗日 Ro 的横截流体面上的分量等等^[22], 这些 Ro 被用来衡量非平衡流 (主要是非地转程度), 并且被用于急流、锋生、重力波、中尺度对流系统、气旋的形成以及地转演变过程等。

(2) Ψ 矢量 (定义为 $\mathbf{V}_{\text{agir}} = -\partial \Psi / \partial p$, $\omega = \nabla_p \cdot \Psi$, 其中, $\mathbf{V}_{\text{agir}}$ 是非地转风的无旋部分, ω 是 p 坐标系中的垂直速度), 该矢量由特定的边条件所惟一确定, 能够用来描述垂直速度和水平非旋衡流, 它的一个重要性质是在任意两个垂直的平面内的投影能够生成两个独立的垂直环流圈, 从而可将一个三维垂直环流圈分解成沿锋面和垂直锋面的两个分量^[23], 但是关于 Ψ 矢量的技术完全是建立在垂直运动的基础上, 而垂直运动又是不好进行精确估计或预测, 因此该方法有较大的局限性。

(3) ω 方程, p 坐标系下绝热无摩擦准地转 ω 方程^[4]为

$$\sigma \nabla^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{V}_g \cdot \nabla (f_0 \nabla^2 \phi + f)] + \nabla^2 \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right], \quad (4)$$

其中, σ 为静力稳定度, ω 为垂直速度在 p 坐标中的表示, f_0 为天气系统所在纬度处的科里奥利数, $f = f_0 + \beta y$, $\beta = df/dy = \text{常数}$, $\mathbf{V}_g$ 为地转风, $\phi = gz$ 为位势高度。方程右边第一项表示绝对涡度平流随高度的变化对垂直运动的影响, 第二项表示温度平流对垂直运动的影响。例如, 当高空槽前对应地面为低压中心时, 涡度平流随高度增加, 由方程, $\omega < 0$, 则有上升运动; 相应的, 当高空槽后对应地面为高压中心时, 涡度平流随高度降低, 由方程, $\omega > 0$, 则有下沉运动; 当有冷平流时, 则有 $\omega > 0$, 出现下沉运动, 反之有上升运动。根据右边每一项的贡献, 垂直运动平衡的各种强迫机制就能被诊断。

(4) 位涡反演, 它常用来求解椭圆形方程或方程组, 是另一种有效的方法来诊断“非平衡”。Hoskins 等^[24]指出在特定的平衡条件下, 可以由已知的质量分布获得平衡态下的动量分布, 反之亦然。真实场 (观测得到的) 和反演的平衡场的区别在于真实场是非平衡的^[25]。因此, 位涡反演就是通过位涡反演出平衡状况下的场变量, 然后将它们

与实际场进行比较,从而诊断系统的非平衡度。位涡反演在气象应用中是一种十分重要的技术,我们将在以后的文章中详细介绍。

2 中尺度平衡方程和平衡模式

2.1 平衡方程与非平衡方程的定义

在对平衡方程和非平衡方程进行具体数学定义前,我们还得指出一个问题,就是垂直运动是归于平衡部分还是属于非平衡部分。关于这个问题,不同学者持有不同的看法。Zhang 等^[22]和 Krishnamurti 等^[26]认为,准地转 ω 方程是应用地转平衡和热成风平衡对准地转涡度方程和热力学方程进行分析后得到的。因此,它是大尺度恢复地转平衡必不可少的要素之一,应归为平衡系统的一部分。但陈秋士^[27]则认为垂直运动是由于非平衡引起的,是从非平衡到平衡的一个调整过程,因此垂直运动方程应属于非平衡的范畴。总之,任何天气系统(大、中、小尺度),运动可以分为两种情况:平衡运动和非平衡运动。如果按照 Krishnamurti 等^[26]的观点,垂直运动将被归于平衡模式中。而如果按照陈秋士的观点^[27],则非平衡运动可以进一步分为两个阶段:(1)平衡的破坏阶段,该阶段与水平环流的某些平流过程有关;(2)平衡的重建阶段,该阶段是通过垂直运动调整气压场、温度场、风场之间的关系而实现的。陈秋士^[27]又将这两个阶段分别称为平流变化和调整变化。我们认为,当垂直运动包含在平衡诊断方程中,作为构成平衡系统必不可少的要素时,此时的垂直运动应归于系统的平衡部分;而当垂直运动包含在非平衡方程中,处于非平衡状态向平衡状态调整过程时,此时的垂直运动就归于系统的非平衡部分。

综合分析各种平衡方程以及非平衡流诊断工具,我们对平衡方程与非平衡方程可以进行如下的定义:

首先,因为我们所研究的大气时刻都是在运动的,我们所说的平衡、非平衡指的是一种动态的平衡、非平衡,即指系统的运动是平衡运动或者非平衡运动。因此,这里我们所讨论的平衡方程、非平衡方程是建立在动量方程基础上的,是动量方程在某种具体物理意义指导下进行各种数学运算分析后得到的形式。另外,它们还应该满足:

(1) 平衡方程:方程中不含有时间偏导项,且

只保留了量级上相对大的项。同时,由于平衡系统一般是由涡旋来维持的,因此平衡方程中旋转风分量(流函数表示项)应该为主要成分,至于快时间振荡(如重力波)等频散项则应该略去。

(2) 非平衡方程:方程中必须有时间偏导项,其他量级相对较小的项也可以保留,甚至可以直接将未进行量纲分析简化的原始物理方程作为非平衡方程。另外,由于非平衡部分主要反映的是系统的调整变化过程,该过程中常伴有快波对能量的频散作用,相应的,非平衡方程也应该能反映该特征。

在此必须强调,我们说的平衡方程、非平衡方程并非惟一的。系统的平衡运动、非平衡运动可以根据其具体特征由多种物理量、物理方程来描述。但总的出发点是尽可能全面地考虑系统的运动特征。我们在引言中已经指出,由散度方程简化而得的各种平衡方程及其平衡模式,其作为中尺度的平衡方程是有一定局限性的,例如非线性平衡方程(1)、(2)、(3)假定了科里奥利力远远比惯性力重要;大 Rossby 数下的非线性平衡方程又忽略了散度、垂直速度的作用;Allen^[28]在辐散方程中保留了更多的项,代价是方程中出现了高频率的振荡模如重力波等等。因此,我们考虑能够同时包含辐散风和旋转风效应,反映涡旋和辐合辐散配置关系的,体现中尺度激烈垂直运动特征的螺旋度,从它的倾向方程出发,寻找适合描述中尺度特征的平衡方程及平衡模式,在此基础上再进一步讨论非平衡方程及非平衡流的诊断。

2.2 螺旋度方程

螺旋度是表征流体边旋转边沿旋转方向运动的动力特性的物理量,最早用来研究流体力学中的湍流问题,在等熵流体中具有守恒性质^[29, 30]。其严格定义为

$$H = \iiint \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) d\tau,$$

通常人们所说的螺旋度是局地螺旋度 h , 定义为

$$h = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}), \quad (5)$$

这里 $\mathbf{V}$ 为三维风速矢量, ∇ 为三维微分算子。若定义 $\mathbf{V}_h$ 为水平风速, w 为垂直运动速度, ζ 为涡度的垂直分量,则螺旋度可写为

$$\begin{aligned} h &= (\mathbf{V}_h + w\mathbf{k}) \cdot [\nabla \times (\mathbf{V}_h + w\mathbf{k})] = \\ &= \mathbf{V}_h \cdot \nabla \times (\mathbf{V}_h + w\mathbf{k}) + w\mathbf{k} \cdot \nabla \times (\mathbf{V}_h + w\mathbf{k}) = \\ &= \mathbf{V}_h \cdot \nabla \times w\mathbf{k} + w\zeta + \mathbf{V}_h \cdot \nabla \times \mathbf{V}_h. \end{aligned} \quad (6)$$

进一步定义 $\mathbf{V}_\chi$ 和 $\mathbf{V}_\Psi$ 分别表示水平风速 $\mathbf{V}_h$ 的辐散分量和旋转分量, χ 、 Ψ 分别为势函数和流函数, 则螺旋度可以进一步写为

$$h = (\mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\Psi) \cdot \nabla \times \omega \mathbf{k} + \omega \zeta + (\mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\Psi) \cdot [\nabla \times (\mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\Psi)] = (\mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\Psi) \cdot \nabla \times \omega \mathbf{k} + \omega \zeta + (-\nabla \chi + \mathbf{k} \times \nabla \Psi) \cdot [\nabla \times (\mathbf{k} \times \nabla \Psi)] = (\mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\Psi) \cdot \nabla \times \omega \mathbf{k} + \omega \zeta + (\mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\Psi) \cdot \nabla \times \mathbf{V}_\Psi. \quad (7)$$

可见, 螺旋度是涡旋在辐散风方向和旋转风方向以及垂直速度方向投影作用的共同结果, 对于强烈发生发展的中尺度系统, 辐散风分量较大, 垂直运动也很激烈。因此, 螺旋度重点表现了涡旋在辐散风方向以及垂直运动方向的投影作用。可见, 螺旋度的重要性在于它包含了辐散风效应, 强调了垂直运动场, 可以较好地反映涡旋、辐散以及垂直运动相互作用的典型中尺度系统的动力学特征。螺旋度值的正负情况反映了涡度和速度的配合程度。

Lilly^[31, 32]最早将螺旋度正式引入到强对流风暴的研究中。随后, 国外许多学者进一步将螺旋度用于强对流风暴的数值模拟和观测资料分析^[33~35]。国内, 伍荣生等^[36]较早推导出完全的螺旋度方程, 并指出若不计摩擦, 在准地转运动中, 大气的螺旋度具有守恒的性质。此外, 吴国雄等^[37]和刘式适等^[38]也讨论了螺旋度在强对流风暴的发展维持、强对流天气分析预报中的应用。

根据陆慧娟等^[39]的研究, 绝热、无摩擦、局地直角坐标系中, 含有无量纲数 π 的螺旋度方程为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h\mathbf{V}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\omega |\mathbf{V}|^2) + \mathbf{V} \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \bar{\theta}) - \omega \cdot c_p \bar{\theta} \nabla \pi' + b\zeta - f\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + f\mathbf{k} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot (\nabla b \times \mathbf{k}), \quad (8)$$

其中, $b = g\theta'/\bar{\theta}$, g 为重力加速度, θ' 为扰动位温, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(z)$ 为基本态位温, 相对涡度 $\omega = \nabla \times \mathbf{V} = (\omega_1, \omega_2, \zeta)$, 无量纲数

$$\pi = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} = \bar{\pi}(z) + \pi',$$

其中, $p_0 = 1000$ hPa, c_p 为定压比热, $p = \rho RT$, $R = R_d(1 + 0.61q)$, R_d 是干空气气体常数, q 是比湿。可见, 螺旋度的变化受到平流输送、大气的辐合辐散、气压梯度力与涡度共同作用、力管、浮力、地转偏向力以及位温扰动等影响。

2.3 中尺度平衡方程

经过尺度分析, 保留螺旋度方程右端中与浮力相当和大于浮力的相应项, 则简化的螺旋度方程^[39]可写为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c_p u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y} - c_p v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x} + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial z} \zeta + b\zeta, \quad (9)$$

或

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mathbf{V}_h \cdot (\nabla_3 \pi' \times \nabla_3 c_p \bar{\theta}) - \nabla_3 \times \mathbf{V}_h \cdot c_p \bar{\theta} \nabla_3 \pi' + b\zeta. \quad (10)$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{V}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{U^3}{LD} \\ &\quad \frac{\partial}{\partial t} \left[-u \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial w}{\partial x} + w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \end{aligned}$$

而

$$-\nabla \cdot (h\mathbf{V}) = - \left(\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} \right) - \frac{\partial w h}{\partial z}, \quad \frac{U^3}{LD} \quad \frac{WU^2}{D^2}$$

其中, U 、 W 、 L 、 D 分别为水平速度、垂直速度、水平尺度、垂直尺度的量纲。可见, 螺旋度的局地变化项和平流项同量级, 因此它也是小项。又由陆慧娟等^[39]的分析, 方程(9)右端前五项的量级会比第六项即浮力效应项大一些。即 $\partial h / \partial t$ 、 $b\zeta$ 都为相对小项, 因此若保留方程的最大项, 可得平衡方程:

$$c_p u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y} - c_p v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x} + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial z} \zeta = 0, \quad (11)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{V}_h \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \bar{\theta}) - \nabla \times \mathbf{V}_h \cdot c_p \bar{\theta} \nabla \pi' = 0. \quad (12)$$

如果用三维风速矢 $\mathbf{V}$ 代替水平速度 $\mathbf{V}_h$, 则(12)式可以简写为

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \bar{\theta}) - \nabla \times \mathbf{V} \cdot c_p \bar{\theta} \nabla \pi' = 0. \quad (13)$$

不论是(12)式中的水平风速或者是(13)式中的三维风场, 都包含了辐散风效应。若进一步将

$\mathbf{V}$ 表示为 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_h + \omega \mathbf{k}$, $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi$ 。则 (13) 式可以表示为

$$(\mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \bar{\theta}) + \omega \mathbf{k} \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \bar{\theta}) = \nabla \times \mathbf{V}_\Psi \cdot c_p \bar{\theta} \nabla \pi' + \nabla \times \omega \mathbf{k} \cdot c_p \bar{\theta} \nabla \pi'. \quad (14)$$

可见, 由螺旋度得到的方程 (14) 中辐散风与旋转风场同时体现, 可以很好地反映涡旋和辐合辐散之间的相互作用。同时, 它还包含了垂直运动, 更能体现中尺度动态平衡系统辐散风、旋转风以及垂直运动相互作用的特点。另外, 该方程中旋转风占据着主要的地位, 这又体现了一般平衡的特性。因此我们将 (14) 式或 (13) 式称为中尺度的一种平衡方程。为了简单起见, 我们用 (13) 式作为平衡方程进行分析。

2.4 中尺度平衡模式

在 2.3 节, 我们得到了基于螺旋度、含无量纲数 π 的中尺度平衡方程。进一步, 我们寻找基于该平衡方程的平衡模式。由于在螺旋度方程 (8) 的推导过程中^[39], 假设了任一大气热力学变量 A 是满足静力平衡的基态 $\bar{A}$ 和中尺度扰动量 A' 之和, 即 $A = \bar{A}(z) + A'$ 。又因为一般中尺度强对流系统是近似不可压的^[40, 41], 因此, 我们采用假不可压近似, 推导局地直角坐标系中、绝热无摩擦假不可压近似下含无量纲数 π 的散度方程、涡度方程、连续方程以及热力学方程。同时, 因为在中尺度系统中维持平衡运动的涡旋仍是准水平的, 即垂直涡度的作用仍是主要的; 而辐合辐散也是以水平的为主^[11, 14], 因此我们考虑水平散度方程和垂直涡度方程。

根据 Durran^[40], 绝热无摩擦、假不可压近似下水平运动方程为

$$\frac{du}{dt} - fv + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

由 $\frac{\partial}{\partial x}(15) + \frac{\partial}{\partial y}(16)$, 得水平散度方程:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \mathbf{V}_h) + \nabla \cdot \left(\omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) - f\zeta + c_p \nabla_h \bar{\theta} \cdot \nabla_h \pi' + c_p \bar{\theta} \nabla_h^2 \pi' = 0, \quad (17)$$

这里, δ 为水平散度, ∇_h 为水平微分算子。注意到在中尺度系统的发生发展过程中, 虽然散度作用大, 但其随时间变化量却是比较小的, 因此, 可以忽略 $\partial \delta / \partial t$, 散度方程简化为

$$\nabla_h \cdot (\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \mathbf{V}_h) + \nabla \cdot \left(\omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) - f\zeta + c_p \nabla_h \bar{\theta} \cdot \nabla_h \pi' + c_p \bar{\theta} \nabla_h^2 \pi' = 0, \quad (18)$$

由 $\frac{\partial}{\partial x}(16) - \frac{\partial}{\partial y}(15)$, 得垂直涡度方程为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \zeta - (\zeta + f)\delta + c_p J_h(\pi', \bar{\theta}) - \beta v + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (19)$$

其中,

$$J_h(\pi', \bar{\theta}) = \frac{\partial \pi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \frac{\partial \pi'}{\partial y} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}.$$

Durran 推得的绝热无摩擦、假不可压近似下连续方程为

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\theta} \mathbf{V}) = 0, \quad (20)$$

又

$$\pi = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad (21)$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad (22)$$

再根据状态方程 $p = \rho R T$, 可以得到:

$$\pi = \left(\frac{R}{p_0} \rho \theta \right)^{\frac{R}{c_v}}. \quad (23)$$

基本态满足

$$\bar{\pi} = \left(\frac{R}{p_0} \bar{\rho} \bar{\theta} \right)^{\frac{R}{c_v}}. \quad (24)$$

因此, 连续方程用无量纲数 π 表示为

$$\frac{c_v \omega}{R \bar{\pi}} \frac{d\bar{\pi}}{dz} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (25)$$

其中, c_v 为定容比热。又由位温守恒, 可得基于螺旋度平衡方程的中尺度平衡模式如下:

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \bar{\theta}) - \nabla \times \mathbf{V} \cdot c_p \bar{\theta} \nabla \pi' = 0, \quad (26)$$

$$\nabla_h \cdot (\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \mathbf{V}_h) + \nabla \cdot \left(\omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) - f\zeta + c_p \nabla_h \bar{\theta} \cdot \nabla_h \pi' + c_p \bar{\theta} \nabla_h^2 \pi' = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \zeta - (\zeta + f)\delta + c_p J_h(\pi', \bar{\theta}) - \beta v + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (28)$$

$$\frac{c_v \omega}{R \bar{\pi}} \frac{d\bar{\pi}}{dz} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d\theta'}{dt} + \omega \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0. \quad (30)$$

这里, 垂直涡度 $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$, 水平散度 $\delta = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y$ 。未知变量为: $u, v, \omega, \pi', \theta'$ 。当

给定特定高度 z 后, 即给定 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{\pi}$, 方程(26)~(30)构成了闭合方程组, 组成了以螺旋度为基础的中尺度平衡模式。当该平衡模式给出特定的边界条件时, 就可以用来诊断中尺度的平衡运动。

3 中尺度非平衡方程及非平衡流诊断方法

由第2节, 我们得到了基于螺旋度的中尺度平衡方程。仿照大尺度准地转非平衡流的诊断, 我们也可以直接将实际资料场应用于平衡方程(13), 资料计算所得的偏差作为非平衡度。可见, 可以用螺旋度描述大气对非平衡作用的响应。因此对于中尺度强对流系统, 我们可以直接用螺旋度方程来诊断非平衡流。

3.1 非平衡方程

当为非平衡时,

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla \pi' \times \nabla c_p \bar{\theta}) - \nabla \times \mathbf{V} \cdot c_p \bar{\theta} \nabla \pi' = O(\epsilon), \quad (31)$$

其中, $O(\epsilon)$ 表示两大项的小差。则螺旋度方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & -\nabla \cdot (h\mathbf{V}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} |\mathbf{V}|^2) - \\ & f\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + f\mathbf{k} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \\ & \mathbf{V} \cdot (\nabla b \times \mathbf{k}) + b\zeta + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (32)$$

如果把非平衡过程分成两阶段: 平衡状态的破坏阶段和平衡态的恢复阶段。采用分解分析方法^[27]可得非平衡两个阶段的方程分别为

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} = & -(\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h)h - h\nabla_h \cdot \mathbf{V}_h + \mathbf{V}_h \cdot [(\boldsymbol{\omega} \cdot \\ & \nabla_h)\mathbf{V}_h] + \mathbf{V}_h \cdot (\nabla_h b \times \mathbf{k}) + b\zeta + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial t} = & -\mathbf{w} \frac{\partial h}{\partial z} - h \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} - f\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_h \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} + \\ & \mathbf{w}[(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{w}] - f\mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + f(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (34)$$

且有

$$h = h_1 + h_2. \quad (35)$$

方程(33)表示由水平平流及水平辐合辐散引起的平衡态的破坏对螺旋度局地变化的影响, 方程(34)表示平衡态受破坏后引起的垂直运动使得非平衡向平衡调整过程中螺旋度的发展变化。我们将方程(32)或者方程(33)、(34)称为中尺度强对流系统

的非平衡方程。这里我们再次强调, 根据非平衡方程的数学定义和物理内涵, 中尺度非平衡方程也非惟一的。如当考虑散度的局地变化项时, 散度方程也可以用来作为中尺度的非平衡方程。另外, 当垂直运动随时间变化明显时, 垂直运动方程也是用来描述非平衡的方程之一。

3.2 非平衡流诊断方法

我们可以直接用非平衡方程(32)诊断非平衡流, 或者用方程(33)、(34)分别诊断非平衡过程的两个阶段。然而我们注意到, 螺旋度是假标量(根据向量分析的定义^[42]), 局地螺旋度可以展开为

$$\begin{aligned} h = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = & u \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ & v \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

记(36)式右端三项分别为 x : 螺旋度 h_1 , y : 螺旋度 h_2 (合称为水平螺旋度), z : 螺旋度 h_3 , 则有

$$\begin{cases} h_1 = u \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ h_2 = v \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ h_3 = w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{cases} \quad (37)$$

可见, h_1 、 h_2 、 h_3 有着各自不同的意义, 它们分别与 x 、 y 、 z 方向的风速和涡度的分量联系在一起, 其值相同时也可能会有不同的运动形式。根据文献^[39], 三个方向上的螺旋度方程在量纲分析后可以简化为

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = c_p u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y} + c_p \bar{\theta} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = -c_p v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial x} - c_p \bar{\theta} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \pi'}{\partial y}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial t} = b\zeta - c_p \bar{\theta} \zeta \frac{\partial \pi'}{\partial z}. \quad (40)$$

可见, 影响水平螺旋度变化的两个主要因子分别与组成水平螺旋度的水平风和水平涡度有关; 而影响垂直螺旋度变化的两个主要因子都来源于垂直运动方程, 都与垂直涡度有关, 尽管它不直接与垂直速度相联系。由此可见, 由水平平流引起的平衡状态的破坏主要体现在水平螺旋度的变化上, 而由垂直运动引起的从非平衡状态向平衡状态的调整阶段则主要由垂直螺旋度的变化来表现。这与陆慧娟等^[39]所指出的“水平螺旋度更具预示性, 对预报强风暴有指示意义; 垂直螺旋度更倾向为能反映系统

的维持状况和系统发展、天气现象的剧烈程度的一个参数”是相符合的。

因此, 我们可以直接用水平螺旋度的发展变化情况判断平衡状态受破坏的程度, 而用垂直螺旋度的发展变化情况说明平衡状态的恢复程度。简而言之, 即分别用水平螺旋度和垂直螺旋度诊断非平衡流的两个阶段。

当然, 如引言中所指出, 中尺度非平衡流的诊断还有垂直运动方程、里查森数 Ri 、位涡反演等方法, 这里我们就不再一一讨论。

4 总结

本文在回顾大尺度准地转平衡理论、各种平衡方程平衡模式及一系列非平衡流诊断工具的基础上, 对平衡方程和非平衡方程给出了具体的数学定义和物理内涵, 同时也给出了“平衡模式”的概念。文中我们本着中尺度天气系统也存在着平衡运动, 也有描述平衡运动的平衡方程、平衡模式, 也有相应的非平衡方程以及非平衡流诊断工具的观念, 从中尺度对流系统 (MCSs) 和中尺度对流复合体 (MCC) 的特征出发, 考虑了涡旋、辐散以及垂直运动在中尺度系统中同时占据着重要地位这一特性, 指出了大尺度一系列平衡方程用于描述中尺度平衡运动仍有其局限性, 进而提出了从同时包含旋转风作用和辐散风效应、且能够体现垂直运动作用的螺旋度方程出发, 寻找中尺度平衡方程的观点。在局地直角坐标系下, 对绝热无摩擦、含无量纲数 π 的螺旋度方程进行尺度分析后, 我们找到了可以较好地体现中尺度动态平衡系统辐散风、旋转风以及垂直运动相互作用特点的平衡方程 (13)。进一步, 我们将该平衡方程与假不可压近似下的涡度方程、散度方程、连续方程以及热力学方程结合, 构成了以基于螺旋度的平衡方程为核心的中尺度平衡模式 (26) ~ (30)。另外, 我们在该平衡方程的基础上, 给出了中尺度非平衡方程的一种表示 [(32) 式]。同时, 我们还将非平衡过程分为两个阶段, 对应于非平衡方程的两个分解形式 (33)、(34) 式, 分别用来诊断不同阶段的非平衡流。进一步, 我们根据螺旋度的假标量性, 分析了三个方向上的螺旋度倾向方程, 提出了可以直接用水平螺旋度的发展变化来判别平衡流的破坏程度而用垂直螺旋度的发展变化来诊断平衡的恢复状况的观点。然而, 以上

的各种观点和结论都还只是理论上的推导和推断, 有待于用实例进行数值模拟和诊断分析, 这也是我们下一步将要进行的工作。

参考文献 (References)

- [1] Allen J S, Barth J A, Newberger P A. On intermediate models for barotropic continental shelf and slope flow fields. Part I: Formulation and comparison of exact solutions. *J. Phys. Oceanogr.*, 1990, **20**: 1017~1042
- [2] Xu Qin. Semibalance model-connection between geostrophic-type and balanced-type intermediate models. *J. Atmos. Sci.*, 1994, **51**: 953~970
- [3] 刘式适, 孙峰. 热带大气半地转适应理论的尺度分析和物理机制. *大气科学*, 2000, **24** (1): 26~40
Liu Shikuo, Sun Feng. Scale analysis and physical mechanism of semi-geostrophic adaptation in the tropical atmosphere. *Chinese. J. Atmos. Sci.* (in Chinese), 2000, **24** (1): 26~40
- [4] 丁一汇. 高等天气学. 北京: 气象出版社, 2005. 80~94
Ding Yihui. *Advanced Synoptic Meteorology* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 2005. 80~94
- [5] Charney J G. The use of primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus*, 1955, **7**: 22~26
- [6] Charney J G. Intergration of the primitive and the balance equations. *Proc. Int. Symp. Numerical Weather Prediction*, Tokyo, Meteor. Soc. Japan., 1962, 131~152
- [7] Raymond D J. Nonlinear balance and potential vorticity thinking at large Rossby number. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1992, **118**: 987~1105
- [8] Barth J A, Allen J S, Newberger P A. On intermediate models for barotropic continental shelf and slope flow fields, Part II: Comparison of numerical model solutions in doubly periodic domains. *J. Phys. Oceanogr.*, 1990, **20**: 1044~1076
- [9] Lynch P. The slow equations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1988, **115**: 201~219
- [10] Doswell C A III. The distinction between large-scale and mesoscale contribution to severe convection: A case study example. *Wea. Forecasting*, 1987, **2**: 3~16
- [11] Leary C A, Rappaport E N. The life cycle and internal structure of a mesoscale convective complex. *Mon. Wea. Rev.*, 1987, **115**: 1503~1527
- [12] Zhang D L, Fritsch J M. A numerical investigation of a convectively generated, inertially stable, extratropical warm-core mesovortex over land. Part I: Structure and evolution. *Mon. Wea. Rev.*, 1988, **116**: 2660~2687
- [13] Brandes E A. Evolution and structure of the 6~7 May 1985 mesoscale convective system and associated vortex. *Mon. Wea. Rev.*, 1990, **118**: 109~127
- [14] Houez R A Jr, Smull B F, Dodge P. Mesoscale organization of springtime rainstorms in Oklahoma. *Mon. Wea. Rev.*, 1990, **118**: 613~654

- [15] Bartels D L, Maddox R A. Midlevel cyclonic vortices generated by mesoscale convective systems. *Mon. Wea. Rev.*, 1991, **119**: 104~118
- [16] Rutledge S A. Middle latitude and tropical mesoscale convective systems. *Rev. Geophys.*, Supplement I; U. S. National Report to International Union of Geodesy and Geophysics 1987-1990, 1991
- [17] Fritsch J M, Murphy J D, Kain J S. Warm core vortex amplification over land. *J. Atmos. Sci.*, 1994, **51**: 1780~1807
- [18] Raymond D J. Nonlinear balance and potential vorticity thinking at large Rossby number. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1992, **118**: 987~1015
- [19] Davis C A, Weisman M L. Balanced dynamics of mesoscale vortices produced in simulated convective systems. *J. Atmos. Sci.*, 1994, **51**: 2005~2030
- [20] Jiang H, Raymond D J. Simulation of a mature mesoscale convective system using a nonlinear balance model. *J. Atmos. Sci.*, 1995, **52**: 161~175
- [21] Moore J T, Abeling W A. A diagnosis of unbalanced flow in upper levels during the AVE-SESAME I period. *Mon. Wea. Rev.*, 1988, **116**: 2425~2436
- [22] Zhang Fuqing, Koch S E, Davis C A, et al. A survey of unbalanced flow diagnostics and their application. *Adv. Atmos. Sci.*, 2000, **17**: 165~183
- [23] Lough A F, Lai C C, Keyser D. A technique for diagnosing three-dimensional ageostrophic circulations in baroclinic disturbances on limited-area domains. *Mon. Wea. Rev.*, 1995, **123**: 1476~1504
- [24] Hoskins B J, McIntyre M E, Robertson A W. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1985, **111**: 877~946
- [25] van Tuyl A H, Young J A. Numerical simulation of nonlinear jet streak adjustment. *Mon. Wea. Rev.*, 1982, **110**: 2038~2054
- [26] Krishnamurti T N. A diagnostic balance model for studies of weather systems of low and high latitudes, Rossby number less than 1. *Mon. Wea. Rev.*, 1968, **96**: 197~207
- [27] 陈秋士. 天气和次天气尺度系统的动力学. 北京: 科学出版社, 1987. 8~26
Chen Qiushi. *Dynamics of Synoptic Systems and Subsynoptic Systems* (in Chinese). Beijing: Science Press, 1987. 8~26
- [28] Allen J S. Balance equations based on momentum equations with global invariants of potential enstrophy and energy. *J. Phys. Oceanogr.*, 1991, **21**: 265~276
- [29] Moffat H K. On the knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.*, 1969, **35**: 117~128
- [30] Moffat H K. Some developments in the theory of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1981, **106**: 27~47
- [31] Lilly D K. The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part I: Energy exchange with the mean flow. *J. Atmos. Sci.*, 1986, **43**: 113~125
- [32] Lilly D K. The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part II: Helicity and storm stabilization. *J. Atmos. Sci.*, 1986, **43**: 126~140
- [33] Brooks H E, Doswell C A III, Davies-Jones R. Environmental helicity and the maintenance and evolution of low-level mesocyclones. *The Tornado: Its Structure, Dynamics, Prediction, and Hazards. Geophys. Monogr. Amer. Geophys. Union.*, 1993, **79**: 97~104
- [34] Davies J M, Johns R H. Some wind and instability parameters associated with strong and violent tornadoes. Part I: Wind shear and helicity. *The Tornado: Its structure, dynamics, prediction and hazards. Geophys. Monogr. Amer. Geophys. Union.*, 1993, **79**: 573~582
- [35] Johns R H, Davies J M, Leftwich P W. Some wind and instability parameters associated with strong and violent tornadoes. Part II: Variations in the combinations of wind and stability parameters. *The Tornado: Its structure, dynamics, prediction and hazards. Geophys. Monogr. Amer. Geophys. Union.*, 1993, **79**: 586~590
- [36] 伍荣生, 谈哲敏. 广义涡度与位势涡度守恒定律及其应用. *气象学报*, 1989, **47** (4): 436~442
Wu Rongsheng, Tan Zheming. Conservative laws on generalized vorticity and potential vorticity and its applications. *Acta Meteor. Sinica*. (in Chinese), 1989, **47** (4): 436~442
- [37] Wu W S, Lilly D K, Kerr R M. Helicity and thermal convection with shear. *J. Atmos. Sci.*, 1992, **49**: 1800~1809
- [38] 刘式适, 刘式达. 大气运动的螺-极分解和 Beltrami 流. *大气科学*, 1997, **21** (2): 151~160
Liu Shikuo, Liu Shida. Toroidal-poloidal decomposition and Beltrami flows in atmosphere motions. *Chinese. J. Atmos. Sci. (Scientia Atmospherica Sinica)* (in Chinese), 1997, **21** (2): 151~160
- [39] 陆慧娟, 高守亭. 螺旋度及螺旋度方程的讨论. *气象学报*, 2003, **61** (6): 684~691
Lu Huijuan, Gao Shouting. On the helicity and the helicity equation. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 2003, **61** (6): 684~691
- [40] Durran D R. Improving the anelastic approximation. *J. Atmos. Sci.*, 1989, **46**: 1453~1461
- [41] 寿绍文, 励申申, 姚秀萍. 中尺度气象学. 北京: 气象出版社, 2003. 8~17
Shou Shaowen, Li Shenshen, Yao Xiuping. *Mesoscale Meteorology* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 2003. 8~17
- [42] 柯青 H. E. 向量计算及张量计算初步. 史福培译. 北京: 商务印书馆, 1954. 54~56
Кочин H. E. *The Principium of Vector Computation and Tensor Computation* (in Chinese). Translated by Shi Fupei. Beijing: The Commercial Press, 1954. 54~56