

张铭, 安洁. 大气横波型扰动连续谱的结构. 大气科学, 2008, 32 (6): 1401~1410

Zhang Ming, An Jie. The structure of continuous spectrum of transversal perturbation wave in atmosphere. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2008, 32 (6): 1401~1410

大气横波型扰动连续谱的结构

张铭¹ 安洁^{1, 2}

1 解放军理工大学气象学院大气环流与短期气候预测实验室, 南京 211101

2 空军装备研究院航空气象防化研究所, 北京 100085

摘要 采用数值方法计算了当基本气流有垂直线性切变、层结参数为常值时横波型扰动的谱点和谱函数, 并将数值计算的结果与理论分析作了对照和讨论。当三支波动连续谱区相互不重叠时该计算结果与理论分析完全一致, 但当发生连续谱区重叠时则须采用谱函数重组的方法来得到连续谱的结构。重组的基本原则是在波谱重叠区对计算得到的谱函数作预处理后, 再对频率相邻的谱点和谱函数进行滑动平均, 并将该滑动平均后的结果作为重组后的谱点和谱函数。分析该重组后的谱函数可知, 此时扰动结构呈现涡旋-重力惯性混合波的形式, 出现了新波型。在连续谱三波重叠区域, 该混合波的谱函数在对流层中层有涡旋波的临界层并体现了涡旋波的性质, 在对流层的上、下层则分别有顺、逆重力惯性波的临界层并体现了重力惯性波的性质。

关键词 横波型扰动 谱函数 涡旋-重力惯性混合波

文章编号 1006-9895 (2008) 06-1401-10

中图分类号 P433

文献标识码 A

The Structure of Continuous Spectrum of Transversal Perturbation Wave in Atmosphere

ZHANG Ming¹ and AN Jie^{1, 2}

1 *Laboratory of Atmospheric Circulation and Short-range Climate Forecast, Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101*

2 *Institute of Aeronautical Meteorology, Air Force Academy of Equipment, Beijing 100085*

Abstract The spectrum and spectral function of the mesoscale wave are studied by using nonstatic quasi-two-dimensional Boussinesq equations. It is supposed that basic flow is only the function of z . The equations are linearized with definite condition, and then the initial value and boundary value problems are changed into the eigenvalue problem of generalized matrix after assuming normal mode solution. The spectrum and spectral function of transversal disturbance in atmosphere are studied by using the numerical method when the vertical linear shear of basic flow exists and the stratification parameter is constant. The results of numerical calculation and theoretical analysis are discussed and compared. When the continuous spectrum areas of three waves do not overlap, the numerical solution is consistent with the analytic solution. But when continuous spectrum areas overlap each other, the structure of the continuous spectrum would be gotten by using the method of recombining spectral function. The basic principle of recombining is that, in the continuous spectrum overlapping area the spectral function of numerical solution is pre-processed, and then the running mean is calculated for the frequency consecutive spectrum and spectral function, and

收稿日期 2007-06-01, 2008-01-04 收修定稿

资助项目 国家自然科学基金资助项目 40575023

作者简介 张铭, 男, 1945 出生, 教授, 博士生导师, 研究方向: 大气动力学和数值预报。E-mail: gq068@jlonline.com

the running mean results are regarded as spectrum and spectral function after recombination. From the results of the spectrum and spectral function after recombination it can be seen that the structure of the disturbance is a hybrid wave of vortex wave and inertia-gravitational wave, that is, new wave mode appears. In the overlapping area of three waves of the continuous spectrum, the spectral function of the hybrid wave has the critical layer of vortex wave in the middle troposphere, which shows the character of vortex wave, and have the critical layers of inertia-gravitational waves along and against the basic flow propagation in the upper troposphere and the lower troposphere, respectively, which shows the character of inertia-gravitational wave.

Key words transversal wave in atmosphere, spectral function, hybrid wave of vortex wave and inertia-gravitational wave

1 引言

在文献[1]中,我们给出了研究大气波动波谱和谱函数的理论模型和数学方法。在采用 Boussinesq 方程组,并在一定条件下对方程组线性化后再取标准模,可将该方程组的初边值问题转化为一个非典型常微分方程的特征值问题求解。由于该问题目前尚无法解析求解,故将此特征值问题离散化为一个矩阵的广义特征值问题来进行数值求解,这样就可由数值解来分析和讨论原问题中波动的波谱和谱函数的性质。在无基本气流且取地转参数、层结参数为常数的特殊情况下,则可求出波动的波谱和谱函数的解析解。此时该模式中仅包含一对相对于基本气流顺传和逆传的重力惯性内波模态(简称重力惯性波),且各模态均是简谐波;模态越高,垂直波数越大则波动传播得越慢,所有的模态均为离散谱,并有聚点存在。对于该情况,曾用数值解作了验算,结果表明,该数值求解方案正确合理且可行。我们还对无基本气流但考虑了层结参数垂直变化后的情况作了数值求解,此时该模式仍仅包含有一对重力惯性波的离散谱模态,不过此时因层结参数有垂直变化,各模态的结构已与简谐波出现了偏差。

在文献[2]中,我们则从分析构成该特征值问题的常微分方程的奇性入手,讨论了垂直切变基本气流中扰动连续谱的重叠问题和临界层出现的情况。这时该模式中不仅包含有一对(两支)重力惯性波,还包含有一支涡旋波;虽在此地转参数取为常数,但基本气流的垂直切变使环境涡度场发生了改变,故仍会有涡旋波发生。我们发现,随着基本气流切变的增大和扰动波长的减小,两支重力惯性波和一支涡旋波的连续谱区会互相靠拢,最后发生重叠,这时按频率已不能区分为快波、慢波;而能

否重叠的关键在于临界波长与扰动波长的相对大小;基本气流切变越大,扰动水平波长越短,重叠现象就越严重。该重叠可作为划分运动尺度的客观标准:当运动尺度大于临界波长时,属大尺度,这时三支波动连续谱区互不重叠,涡旋波是准地转的;当运动尺度小于临界波长时,则可认为属中尺度,此时会出现连续谱的重叠。

本文将给出数值计算得到的横波型扰动波谱分布和谱函数(特征波动)结构,并对文献[1,2]中的有关问题作进一步的讨论。这里采用文献[1]中的数学模型和数值方法。在此要指出的是,由于数值计算采用了离散化方法,原问题的连续谱则表现为计算离散谱点;不过通过加密垂直分层数,仍可判断原谱点的性质,即可知其原来是离散谱还是连续谱^[3~6];加密也可提高计算的精度。实践表明,取分层数为40已能满足精度的要求。以下为称呼方便,仍将该计算离散谱称为连续谱。

为使问题不过于复杂,以便能得到明晰的结论,本文环境场取得相对较简单,仅设基本气流只存在线性垂直切变且取层结参数 N^2 为常数,还略去了外源,并只研究横波型扰动的情况,即设扰动传播方向与基本气流的方向相同(取它们之间的夹角为0)。

2 横波型扰动谱函数的计算结果

若不特别声明,以下的数值计算中垂直分层数均取40,此时可算得119个谱点。设基本气流呈垂直接性变化,其最大值 $\bar{u}_{\max} = 10 \text{ m/s}$,在 $z = H$ 处(对流层顶);最小值 $\bar{u}_{\min} = 0 \text{ m/s}$,在地面 $z = 0$ 处(不考虑地形),并取层结参数 $N^2 = 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$,地转参数 $f = 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 。此时,则有临界波数

$$k_0 = f / (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) = 10^{-6} \text{ m}^{-1},$$

与其相应的 $L_0 = 2\pi/k_0 = 628 \text{ km}$,这样按文献[2]

中的分析, 则有:

(1) 当扰动波长 $L < L_0/2$, 即小于 314 km 时, 出现了三支波动连续谱区重叠的情况, 即不但涡旋波的连续谱区与重力惯性波的连续谱区发生重叠, 而且两支重力惯性波的连续谱区也相互重叠, 此时无单纯涡旋波的连续谱区;

(2) 当 $L_0/2 < L < L_0$, 即扰动波长在 314 km 和 628 km 之间时, 则有两支波动连续谱区重叠的情况, 此时重力惯性波与涡旋波的连续谱区发生相互重叠, 但两支重力惯性波的连续谱区并不互相重叠, 此时仍有单纯的涡旋波和重力惯性波的连续谱区;

(3) 当扰动波长大于 628 km 时, 则三支波动的连续谱区互不重叠, 三支波动完全可以从频率上

区分。

根据以上分析, 相应于上面的三种情况, 本文分别取扰动波长为 100 km、500 km 和 1000 km 对横波型扰动的波谱分布和谱函数结构作了计算。

2.1 三支波动连续谱区互不重叠的情况

取水平波长为 1000 km, 则此时涡旋波和重力惯性波的连续谱区是可区分的。从计算得到的频谱分布看, 重力惯性波波速较快, 涡旋波波速较慢 (均指绝对值), 故前者称之为快波, 后者则为慢波。将计算得到的 119 个谱点按扰动相速 (或频率) 的大小排序, 设序号为 1 的谱点其相速最大, 序号为 119 的谱点其相速最小 (以后均如此排序, 不再赘述), 经分析后可知, 序号 1、2、3 和 117、118、119 的谱点分别是顺基本气流传播 (简称顺

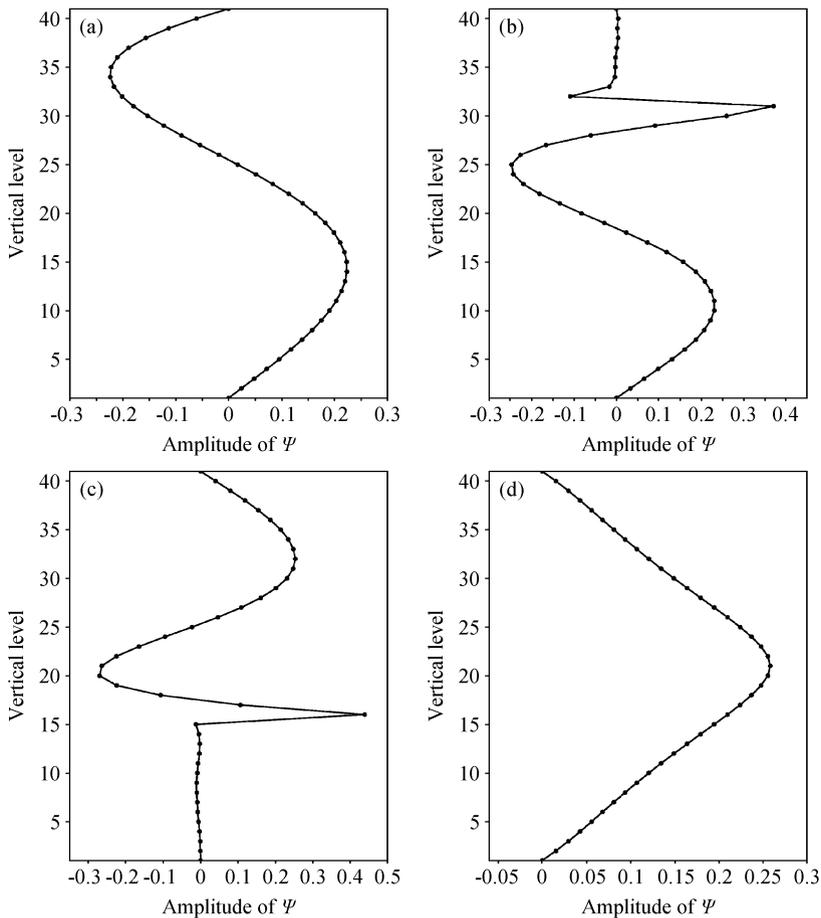


图 1 水平波长 1000 km 时谱函数 Ψ 的垂直结构图: (a) 序号 2 (离散谱); (b) 序号 12 (连续谱); (c) 序号 103 (连续谱); (d) 序号 60 (连续谱)

Fig. 1 The perpendicular structures of stream function's spectral function for horizontal wavelength 1000 km: (a) Sequence number 2 (dissociative spectrum); (b) sequence number 12 (continuous spectrum); (c) sequence number 103 (continuous spectrum); (d) sequence number 60 (dissociative spectrum)

传)和逆基本气流传播(简称逆传)的重力惯性波的离散谱点,序号为4~39的谱点是顺传重力惯性波的连续谱,序号为40~80的谱点为涡旋波的连续谱,序号81~116的谱点为逆传重力惯性波的连续谱。

文献[2]中指出,当波谱(特征值)的集合 σ 满足

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\min}k < \sigma < \bar{u}_{\max}k, \\ \bar{u}_{\min}k - f < \sigma < \bar{u}_{\max}k - f, \\ \bar{u}_{\min}k + f < \sigma < \bar{u}_{\max}k + f, \end{aligned}$$

这三个不等式之一时(这里 k 为波数, $k=2\pi/L$, L 为扰动波长),则其为连续谱。在此所作的计算表明,算得的连续谱均满足这三个不等式,而离散谱点则不满足。该事实说明,有关谱点分布的理论分析和数值计算的结果完全吻合。

从计算得到的顺传和逆传重力惯性波离散谱流函数 Ψ 场、位温场 Θ 和风速分量 V 场的垂直结构图(Ψ 场顺传的见图1a,逆传的图略, Θ 场和 V 场图均略)可见,此时因有基本气流的垂直切变,其结构与标准的简谐波相比出现了偏差,对于逆传的重力惯性波,则偏差要更大些; Θ 场的结构与 Ψ 场差不多,而 V 场的结构则与上述两个场不同,其值在边界上达到最大;在此,无论是 Ψ 场、 Θ 场和 V 场,其垂直结构均算得十分光滑,不出现奇性,即无临界层;这是因其是离散谱的缘故。

计算得到的顺传和逆传重力惯性波连续谱流函数 Ψ 场(见图1b、c)、位温场 Θ 和风速分量 V 场(顺传的见图2b、a,逆传的图略)垂直结构则与离散谱不同,不再具有光滑的波动特性,而是有临界层存在;在临界层处谱函数有间断,其不连续,即存在奇性;随着频率 σ 值的增加,临界层的高度增高,反之亦然;该结果与文献[2]的理论分析完全一致。

计算还表明, Ψ 场、 Θ 场和 V 场的垂直结构各不相同,对于顺传重力惯性波的 Ψ 场,在临界层之上,其谱函数呈指数变化,在之下则呈波动变化;随着频率 σ 值的减小,临界层位置降低,其临界层下的波动在垂直方向被压缩;对于逆传重力惯性波的 Ψ 场,在临界层之上,其谱函数呈波动变化,在之下则呈指数变化;随着频率 σ 值的减小,临界层位置的降低,其临界层上的波动在垂直方向被拉伸(图1b、c)。顺传和逆传重力惯性波连续谱 V 场和 Θ 场振幅的大值发生在临界层附近,这与 Ψ 场的离

散谱不同(顺传的见图2a、b,逆传的图略)。

对于涡旋波则仅存在连续谱而无离散谱,因其谱点的 σ 值落在不等式 $\bar{u}_{\min}k < \sigma < \bar{u}_{\max}k$ 的范围内,数值计算得到的涡旋波谱点的 σ 值范围的确也在以上范围内,数值计算的结果与理论分析的相同。从计算得到的涡旋波的 Ψ 场(图1d)上看,其结构光滑,看不到谱函数的间断,这点与重力惯性波有很大的不同。涡旋波谱函数的间断在 Θ 场上则表现得非常清晰(图2c)。在 V 场上,临界层不是以谱函数曲线存在间断,而是以在该处其一阶微商存在间断的形式出现,这表现为在此处该曲线有明显的折角(参见图2d)。比较 Ψ 场、 Θ 场和 V 场后可知, Ψ 场上最大振幅的位置即为临界层的位置,在该处有 $d\Psi/dz=0$ 。计算结果表明,随着谱点 σ 值的减小,临界层深度也由高变低,这点与理论分析的结果也相一致。

基本气流有切变时与无切变时其波谱的最大不同之处在于,前者不论是重力惯性波还是涡旋波均有连续谱,而后者重力惯性波仅有离散谱而无涡旋波存在。

2.2 两支波动连续谱区重叠的情况

取水平波长 $L=500$ km,此时波数 $k=2\pi/L$ 满足不等式 $k_0 < k < 2k_0$,在此 k_0 为临界波数,这时存在涡旋波和重力惯性波的连续谱区部分重叠,从频谱上这时已不能区分出快波、慢波。分析数值计算得到的谱点和谱函数可知,此时序号1、2、3、4和116、117、118、119的谱点分别为顺、逆传的重力惯性波的离散谱点,其表现为光滑的波动结构特征;并与三波可分(如波长为1000 km)时重力惯性波离散谱的结构类似(图略)。序号5~33和序号87~115的谱点则分别为单纯的顺、逆传重力惯性波的连续谱,序号49~71的谱点则为纯涡旋波的连续谱,以上这些谱点 Ψ 场、 Θ 场和 V 场的结构均分别与三波可分时的顺、逆传重力惯性波和涡旋波连续谱的结构类似(图略),这里不再赘述。

在此特别要引起关注的是序号34~48和序号72~86的两段谱点,它们分别位于顺、逆传重力惯性波连续谱和涡旋波连续谱的重叠区。从数值计算的结果看,在该重叠区 Ψ 场谱函数的结构有两种类型,一种类似于重力惯性波,其存在有明显的一个间断,另一种则类似于涡旋波,其结构光滑,看不到有间断出现,随着谱点 σ 值的减小这两种结构

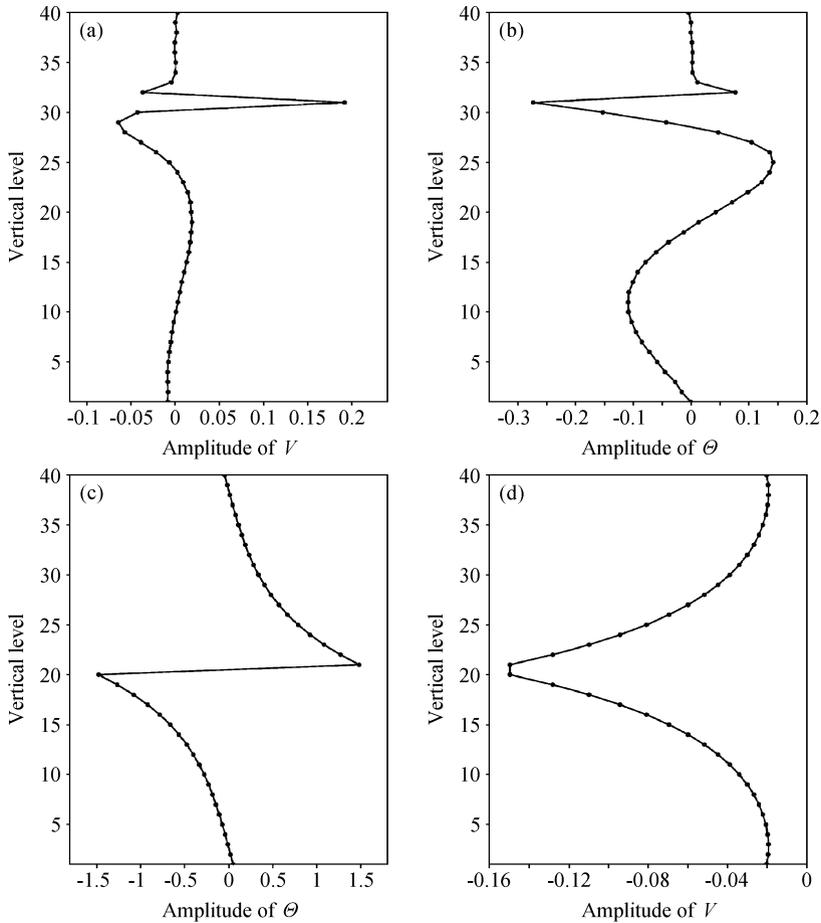


图2 水平波长 1000 km 时谱函数 V (a、d)、 θ (b、c) 的垂直结构图: (a、b) 序号 12; (c、d) 序号 60
 Fig. 2 The perpendicular structures of (a, d) V , (b, c) θ of spectral function for horizontal wavelength 1000 km: (a, b) Sequence number 12; (c, d) sequence number 60

的谱函数呈交替出现形式 (图 3a~c)。这里特别要注意的是临界层的变化, 计算表明, 随着谱点 σ 值的减小, 重力惯性波和涡旋波的临界层高度均由高变低, 但前者其临界层出现在低层而后者出现在高层 (图 3a~c)。文献 [2] 中的理论分析表明, 此时应有两个临界层, 一个在高层, 另一个在低层; 分析计算结果后发现有的 Ψ 场谱函数的确如此 (注意重力惯性波的临界层的表现形式与涡旋波不同, 在 Ψ 上, 前者在临界层处谱函数有间断而后者在临界层处有 $d\Psi/dz=0$), 但也有不少仅表现为一个临界层而另一个不明显 (图 3f), 分析表明这是由于在那里振幅很小的缘故。在此, V 场也体现了以上 Ψ 场的特点, 不再赘述。 θ 场上, 特别在逆传重力惯性波和涡旋波的重叠区, 则有不少谱函数上述两个临界层均表现得十分明显, 此时其谱函数有两个间断, 逆传重力惯性波的结构与三波可分时的结

构已有较大的差异 (图 3d、e)。

2.3 三支波动连续谱区重叠的情况

取水平波长为 100 km, 则波数 k 满足不等式 $k > 2k_0$, 文献 [2] 中的理论分析指出, 此时不但涡旋波的连续谱区与重力惯性波的连续谱区发生了重叠, 且二支重力惯性波的连续谱区也发生了重叠, 出现了三支波动连续谱区发生重叠的情况, 并且不存在单纯涡旋波的连续谱区。

分析数值计算的结果可知, 这时序号为 1~6 和 114~119 的谱点分别为顺、逆传重力惯性波的离散谱, 这里因扰动水平尺度的减小, 出现了垂直结构复杂 (垂直波长更短) 即模态更高的波动 (图略); 序号为 26~94 的谱点处于顺、逆传重力惯性波和涡旋波三波连续谱的重叠区; 序号为 13~25 的谱点处于顺传重力惯性波和涡旋波两波连续谱的重叠区, 而序号 95~107 的谱点则处于逆传重力惯

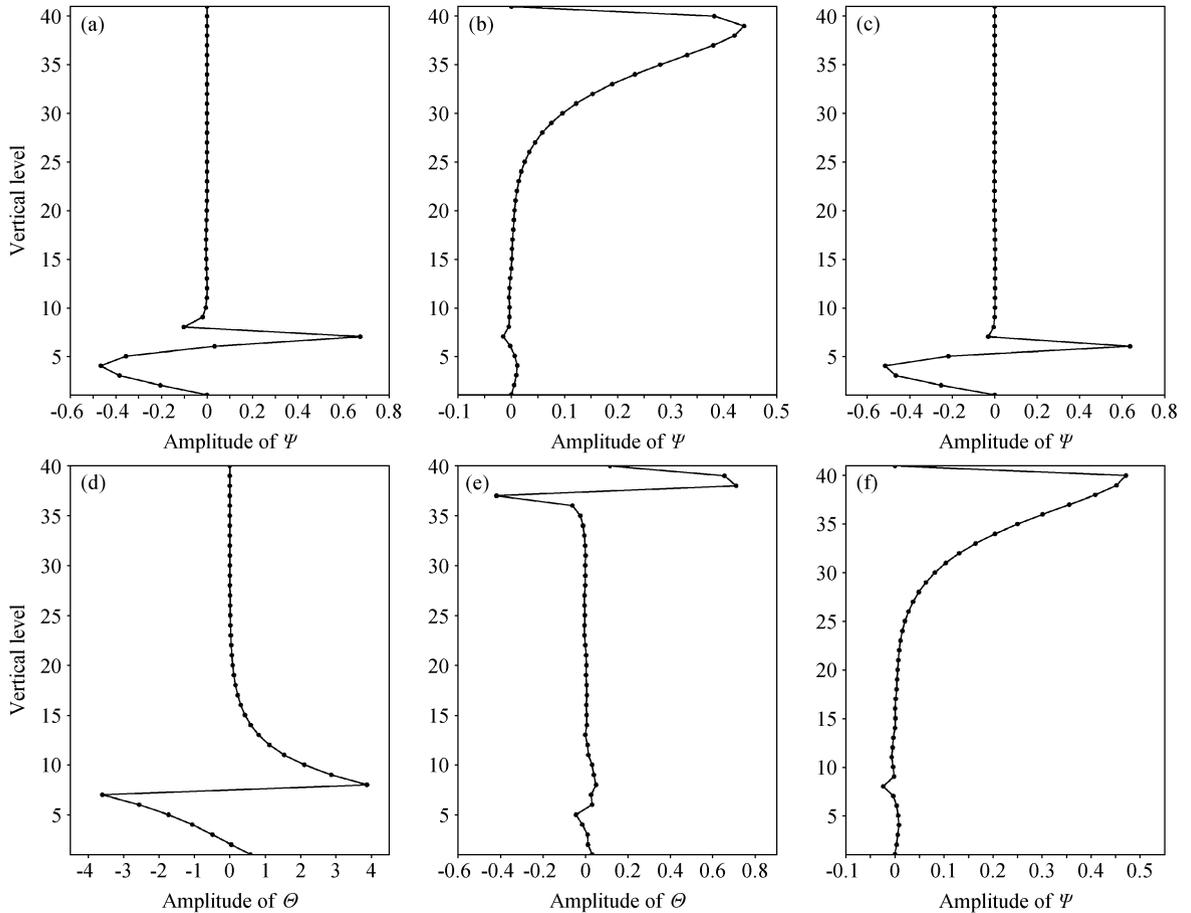


图3 水平波长 500 km 时谱函数 Ψ (a, b, c, f)、 Θ (d, e) 的垂直结构图: (a) 序号 36; (b) 序号 37; (c) 序号 38; (d), 序号 73; (e) 序号 76; (f) 序号 35

Fig. 3 The perpendicular structures of spectral functions (a, b, c, f) Ψ , (d, e) Θ for horizontal wavelength 500 km; (a) Sequence number 36; (b) sequence number 37; (c) sequence number 38; (d) sequence number 73; (e) sequence number 76; (f) sequence number 35

性波和涡旋波两波连续谱的重叠区。

在顺、逆传重力惯性波和涡旋波的两波重叠区, 从计算得到的 Ψ 场看, 其结构仍有类似于重力惯性波、涡旋波的两类类型, 且随谱点 σ 值的减小这两类谱函数也呈交替出现形式 (图略)。此时按理论分析在该重叠区应有两个临界层, 但由于 Ψ 场的谱函数其另一个临界层所处的位置振幅太小, 故其在计算结果中并未体现。V 场、 Θ 场临界层的分布与变化与 Ψ 场相似, 不再赘述。

在顺、逆传重力惯性波与涡旋波三波重叠区域, 计算得到的 Ψ 场谱函数的结构则有三种类型, 其分别类似于顺、逆传重力惯性波和涡旋波。随谱点 σ 值的减小, 这三类谱函数呈交替出现的形式 (图略)。文献 [2] 中的理论分析表明, 此时应有三个临界层出现; 但实际的数值计算表明, 仅序号

50、58、64 的 Ψ 场有两个临界层表现得很清晰。在图 4a 上, 序号 50 的 Ψ 场其涡旋波的临界层位于中上层, 其顺传重力惯性波的临界层位于下层, 而在图 4b 上, 序号 64 的 Ψ 场其逆传重力惯性波的临界层位于上层, 顺传重力惯性波的临界层位于中下层。其它 Ψ 场的谱函数在其余两个临界层的位置上谱函数的振幅均很小, 临界层表现不清晰。在 Θ 、V 场上, 谱函数也呈三类函数交替出现的形式, 临界层的变化也与 Ψ 场相似, 不再赘述; 但此时 Θ 和 V 场上则序号 41、58、64 的谱函数有明显两个临界层出现, 可参见序号 41、64 的 Θ 场 (图 4c、d)、V 场 (图 4e、f) 的结构。为节省篇幅, 序号 58 谱函数的结构图则略。

上面已提到, 以上三种情况的计算结果, 包括连续谱重叠的条件, 临界层的变化等均与我们在文

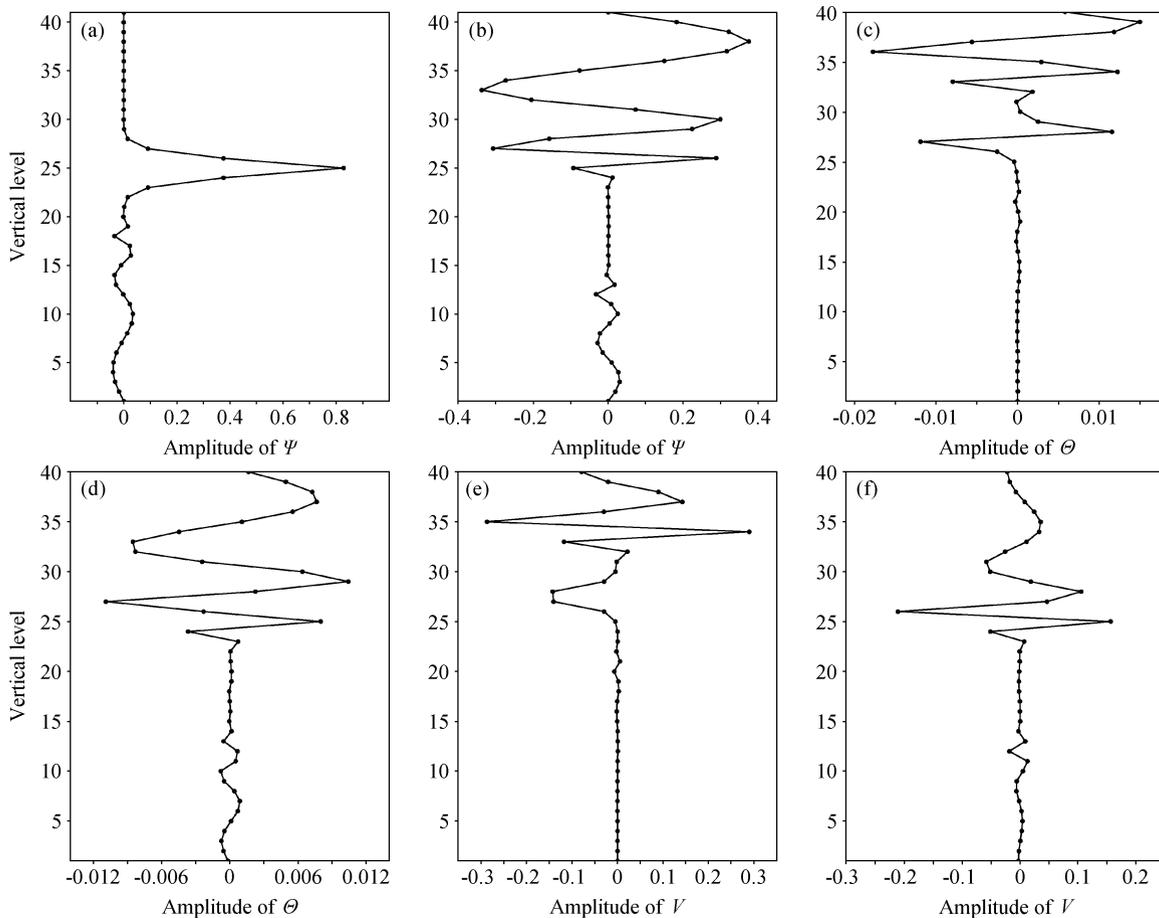


图 4 水平波长 100 km 时谱函数 Ψ (a, b)、 Θ (c, d)、 V (e, f) 的垂直结构图：(a) 序号 50；(b, d, f) 序号 64；(c, e) 序号 41
 Fig. 4 The perpendicular structures of spectral functions (a, b) Ψ , (c, d) Θ , (e, f) V for horizontal wavelength 100 km: (a) Sequence number 50; (b, d, f) sequence number 64; (c, e) sequence number 41

献[2]中的理论分析一致，这也相互印证了理论分析和数值计算的正确性。但在连续谱重叠的区域，谱函数上临界层的情况则存在理论分析与数值计算结果的某些差异，该问题将在下面讨论。

3 连续谱重叠区谱函数的结构

3.1 问题的提出

上面已提到，因原问题的特征值问题是一个非典型的特征值问题，无法解析求解，故只能采用数值求解的方式，这样就会将原有的连续谱歪曲为计算离散谱。对于三支波动连续谱区互不重叠的情况，我们从得到的数值解中可见，虽然此时因连续谱已被歪曲，但无论是重力惯性波还是涡旋波，其连续谱谱函数随特征值（频率）的变化均很有规律（参见图 1），并符合我们在文献[2]中通过理论分析得到的结论，且对于在该连续谱范围内的任何谱

点，其结构均可通过数值计算得到的相邻特征值的计算离散谱的结构内插得到。然而，对连续谱区相重叠的情况，以上计算结果表明有以下问题值得探讨：

- (1) 此时随特征值的减小，在连续谱的重叠区出现了两类或三类波型交替出现的情形。该情形的出现与计算的分层无关，增加分层只能增加该重叠区中特征值的个数，也即增加谱函数的个数，而不能改变这种交替出现的情况。计算表明，增加分层仅能加快该种交替变化的频度。这样分层无穷增加后不会有极限出现，因此不能像连续谱区互不重叠的情况那样，通过相邻计算离散谱的结构来内插求得该重叠谱区内任意谱点的连续谱谱函数的结构。
- (2) 数值计算得到的重叠谱区中计算离散谱的谱函数其临界层的个数有不少与理论分析有差异，

其临界层的个数偏少(也有少数与理论分析一样)。分析其原因,发现在理论上原该出现临界层的地方则扰动的振幅很小,这样无法直观的分析出临界层。

以上两问题的出现表明,我们必须重新审视连续谱重叠谱区中谱函数的结构。

3.2 连续谱重叠区中谱函数的重组

为此,我们提出了对连续谱重叠区中谱函数(其本应是连续谱,但在数值计算中则表现为计算离散谱)进行重组的思想,该思想既不悖于以上的理论分析和数值计算,又能很好地解决上面存在的问题。由于谱函数是空间中的一组基底,重组相当于用空间中另外一组基底来代替原有的基底,物理量可按照重组后的基底展开。重组的具体做法:

(1) 对连续谱重叠区中的谱函数(计算离散谱的谱函数)进行逐个审查,若发现个别谱函数与大多谱函数有反相的情况,则乘 -1 更正之(谱函数可乘任意不为 0 的常数)。

(2) 若发现有相同类型的谱函数相邻出现的情况,则对其频率作平均,同时内插出相应的该平均频率的谱函数,为简单可取算术平均和线性内插。该情况不多见,且若出现的话则是两个,目前还未发现有三个或三个以上相邻出现的,即使出现了该情况,也可类似处理。

(3) 经以上处理后在连续谱重叠区可得到按频率减小的谱函数类型呈交替出现的序列,将该序列的频率和谱函数进行滑动平均,滑动平均个数若两

波重叠则取 2 ,三波重叠则取 3 ,这样则可得重组后的频率和谱函数。

(4) 如有必要,可对重组后的谱函数进行归一。

经过重组后的谱函数则有以下特点:

(1) 重组后的谱点(频率)和谱函数可认为仍是原问题的谱点(频率)和谱函数。

(2) 该谱函数的临界层个数以及其位置随频率的变化与文献[2]中的理论分析一致。

(3) 以该谱函数为基础,可内插出在连续谱重叠区中任意谱点上的谱函数结构。

(4) 注意到在连续谱重叠区原两(三)类谱函数仅在临界层附近明显,在离开临界层后振幅迅速减小,故重组后的谱函数的性质综合了原两(三)类谱函数的性质,这样其波动性质则是原两(三)类波动的混合波。

图5给出了当扰动取 500 km 、 100 km 时,重组后连续谱两波和三波重叠区的谱函数 Ψ 的结构,除特点(1)外的其余特点在该图上均表现清晰、直观,无庸赘叙。对特点(1),则作如下说明:

在文献[1]中可知,Boussinesq方程组的初边值问题可转化为一个非典型常微分方程的特征值问题,在离散化后其可变成一个复矩阵的广义特征值问题,并可进一步化为通常的复矩阵特征值问题来数值求解,即有

$$\mathbf{TX} = \sigma\mathbf{X}, \quad (1)$$

这里 σ 为特征值, \mathbf{T} 是 $(3M-1) \times (3M-1)$ 阶的矩

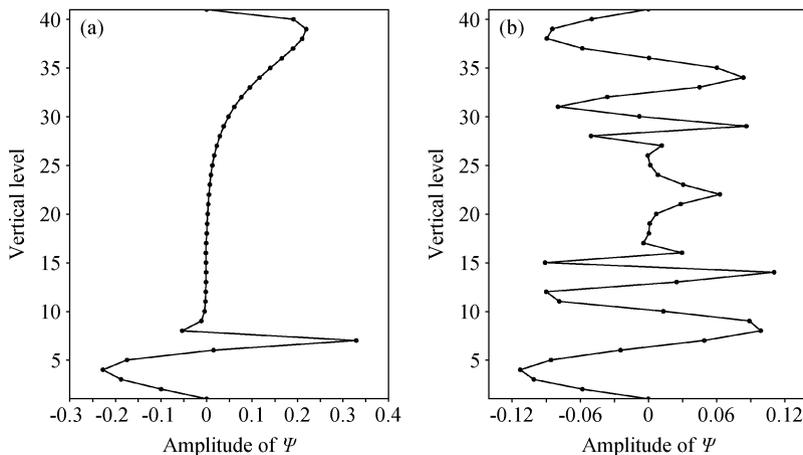


图5 重组后谱函数 Ψ 的垂直结构图:(a)水平波长 500 km ,序号37;(b)水平波长 100 km ,序号58

Fig. 5 The perpendicular structures of spectral function Ψ after recombination; (a) Horizontal wavelength 500 km , sequence number 37; (b) horizontal wavelength 100 km , sequence number 58

阵, 而 M 则为离散化时的分层数。

设 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 分别是算得的连续谱 (实际是计算离散谱) 中相邻的两个谱点 σ_1 和 σ_2 的谱函数, 不失一般性, 假定 $\sigma_1 > \sigma_2$, 则显然有

$$T\mathbf{X}_1 = \sigma_1\mathbf{X}_1, \quad (2-1)$$

$$T\mathbf{X}_2 = \sigma_2\mathbf{X}_2. \quad (2-2)$$

将以上两式相加, 设 $\sigma_0 = 0.5 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$, $\Delta\sigma = 0.5 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$, 并令 $\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)/2$, $\mathbf{e} = \Delta\sigma \cdot (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)/2$, 则有

$$T\hat{\mathbf{X}} = \sigma_0\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{e}. \quad (3)$$

由 (3) 式可知, 若略去 \mathbf{e} , 则重组后的 $\hat{\mathbf{X}}$ 仍为原问题的特征向量 (此时特征值为 σ_0), 故 \mathbf{e} 可看作重组误差。当计算得到的两个特征值的频率差 $\sigma_1 - \sigma_2$ 减小, 则 $\Delta\sigma$ 减小 (增加分层当属此情况), 此时因谱函数 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 有界 (归一化后其最大差值仅为 2), 故重组误差 $\mathbf{e} = \Delta\sigma(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)/2$ 也减小; 当 $\Delta\sigma \rightarrow 0$ 时, 有 $\sigma_1 \rightarrow \sigma_0$, $\sigma_2 \rightarrow \sigma_0$, 并有

$$T\hat{\mathbf{X}} = \sigma_0\hat{\mathbf{X}}. \quad (4)$$

这时无重组误差。由此可认为, 重组后的谱函数仍是原问题谱函数。显然重组误差依赖于数值计算中相邻的两个谱点 σ_1 和 σ_2 的差, 即 $\Delta\sigma$; 显然分层越密, 该误差越小。从我们计算结果看, 40 层的分层已达到精度要求 (20 层分层基本上就能接受)。这样在连续谱的重叠谱区, 经过对计算离散谱的重组, 可得到一系列重组后的谱函数, 并可通过内插求出该区中任意频率的谱函数结构。

3.3 谱函数的性质

为揭示谱函数的性质, 我们考察谱函数的涡度场和散度场。因假定扰动在 y 方向是均匀的, 故在各层上的散度场 D_i 与涡度场 ζ_i 的比值 (指绝对值) 为

$$\mu_j = \frac{|D_j|}{|\zeta_j|} = \frac{|\partial u/\partial x|_j}{|\partial v/\partial x|_j} = \frac{|d\Psi/dz|_j}{|V_j|}, \quad (5)$$

其中, μ_j 可称为散涡比, 下标 j 为该层的序号。在 z 方向对各层的 μ_j 作算术平均, 即作

$$\bar{\mu} = \sum_{j=1}^M \mu_j / M,$$

在此, M 为垂直分层数, 则可得垂直平均的散涡比 $\bar{\mu}$, 可简称为平均散涡比。此外, 还可求散涡比的最大值 $\mu_{\max} = \max \mu_j$ 和最小值 $\mu_{\min} = \min \mu_j$ 。

首先, 考察三波互不重叠时谱函数的性质 (取扰动水平波长为 1000 km, 其他环境参数同上), 此

时按波动频率可分为快波和慢波。计算结果表明, 序号为 1~39 和 81~119 的谱点, 其相应谱函数的平均散涡比大于或约为 1, 最大散涡比都大于 1, 最小散涡比大部分都大于 0.5, 是非地转的, 为重力惯性波; 而序号为 40~80 的谱点, 其平均散涡比的量级为 0.1, 最大散涡比都小于 1, 是准地转的, 为涡旋波。由此可见, 此时涡旋波和重力惯性波不仅在频谱上是可分的, 而且在波动的性质上也是可分的。

其次, 考察三波相互重叠时的谱函数的情况 (取扰动水平波长为 100 km, 其他环境参数同上, 此时因有三波相互重叠, 在重叠谱区内作了谱函数重组)。从重组后位于三波连续谱重叠区的谱函数的结构看, 其有三个临界层, 中、上、下层的临界层其性质分别属涡旋波和顺、逆传的重力惯性波, 临界层附近谱函数的结构也与以上三种波动类似, 故其波动的性质属涡旋-重力惯性混合波, 且其散涡比均大于 1, 非平衡特征明显, 并不能再对其作滤波操作。

4 结语

本文在考虑了基本气流存在线性切变, 并取常值层结参数时对横波型扰动的谱点和谱函数作了数值求解, 并与文献[2]中的理论分析结果作了对照和讨论。数值计算的结果在三支波动连续谱区相互不重叠时与理论分析完全一致, 此时按波谱 (频率) 可将其区分为快波与慢波, 并可用滤波模式 (最简单的是准地转模式) 将准平衡的涡旋波 (慢波) 过滤出来^[8]。然而当发生连续谱区重叠时则与文献[2]中的理论分析有差异。在分析了该差异后发现, 在连续谱的重叠区采用谱函数重组的方法可解决该问题。谱函数重组的基本原则是在预处理后对波谱重叠区频率相邻的计算离散谱的谱点和谱函数进行滑动平均, 将滑动平均后的结果作为重组后的谱点和谱函数, 此时在忽略误差后其仍是原问题的谱点和谱函数。分析该重组后的谱函数可见, 此时扰动呈涡旋-重力惯性混合波的形式, 即此时发生了重力惯性波与涡旋波混合, 出现了新波型。在连续谱三波重叠区域, 该波型在对流层中层有涡旋波的临界层并体现了涡旋波的性质, 在对流层上、下层则分别有顺、逆传重力惯性波的临界层, 并体现了重力惯性波的性质, 这时非平衡特征明显^[8],

并不能再对其作滤波操作。

连续谱因存在临界层, 具有奇性, 故一般不单独讨论单个的连续谱, 只有连续谱的积分才有明确的物理意义, 事实上连续谱的积分就是波包。这里因已将微分方程特征值问题作为矩阵的特征值问题来近似求解, 则连续谱已表现为计算离散谱(重组后亦然), 此时积分就转化为对计算离散谱的求和。连续谱波包的演变具有其自身的规律^[7], 我们将另文给出对其研究的结果。此外, 当存在切变基本气流时, 即使有层结稳定, 扰动也可发生不稳定, 且不稳定的谱点均为离散谱^[9, 10]。对于这种情况, 也将另文讨论。

参考文献 (References)

- [1] 张铭, 安洁. 中尺度大气波动的波谱和谱函数——数学模型和计算方法. 大气科学, 2007, **31** (4): 666~674
Zhang Ming, An Jie. Spectrum and spectral function analysis of mesoscale wave—mathematic model and numerical calculation method. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2007, **31** (4): 666~674
- [2] 张铭, 安洁. 大气波动的波谱和谱函数——垂直切变基流中的波谱分析. 大气科学, 2007, **31** (5): 919~925
Zhang Ming, An Jie. Spectrum and spectral function of wave in atmosphere—wave spectrum analysis with vertical shear of basic flow. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2007, **31** (5): 919~925
- [3] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础(第一卷). 北京: 科学出版社, 1979. 543pp
Zeng Qingcun. *The Mathematical and Physical Base in Numerical Weather Forecast* (Vol. 1) (in Chinese). Beijing: Science Press, 1979. 543pp
- [4] 曾庆存, 李荣凤, 张铭. 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数 I: 谱点的分析. 大气科学, 1990, **14** (2): 129~142
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming. The spectra and spectral functions in rotating two-dimensional compressive motion. Part I: Distribution of spectra. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (*Scientia Atmospherica Sinica*) (in Chinese), 1990, **14** (2): 129~142
- [5] 曾庆存, 李荣凤, 张铭. 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数 II: 谱和谱函数结构的分析. 大气科学, 1991, **15** (1): 1~5
Zeng Qingcun, Li Rongfeng, Zhang Ming. Spectra and spectral functions of rotating two-dimensional compressive motion. Part II: Structure of spectral functions and further discussion on spectra. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 1991, **15** (1): 1~15
- [6] 张立凤, 张铭. 斜压切变基本流中横波型扰动的特征波动 I: 谱点分布. 气象学报, 1999, **57** (5): 571~580
Zhanf Lifeng, Zhang Ming. Characteristic wave of transversal disturbance at baroclinic shear flow. I: Spectrum analysis. *Acta Meteorologica Sinica* (in Chinese), 1999, **57** (5): 571~580
- [7] 卢佩生, 卢里, 曾庆存. 正压准地转模式的谱和扰动的演变. 中国科学(B), 1986, **11**: 1225~1233
Lu Peisheng, Lu Li, Zeng Qingcun. The evolution of the spectra and disturbance in the barotropic quasi-geostrophic model. *Science in China* (Ser. B) (in Chinese), 1986, **11**: 1225~1233
- [8] 高守亭, 周非凡. 基于螺旋度的中尺度平衡方程及非平衡诊断方法. 大气科学, 2006, **30** (5): 854~862
Gao Shouting and Zhou Feifan. Mesoscale balance equation and the diagnostic method of unbalanced flow based on helicity. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 2006, **30** (5): 854~862
- [9] Zhang Minghua, Zeng Qingcun. Discrete and continuous spectra of barotropic quasigeostrophic vorticity model. Part I. *J. Atmos. Sci.*, 1997, **54**: 1910~1923
- [10] Zhang Ming, Zhang Lifeng. Semi-circle theorem of unstable spectrum distribution of heterotropic perturbation and the upper bound estimation of its growth rate. *Advances in Atmospheric Sciences*, 2002, **19** (1): 35~44