

朱宗申, 朱国富, 张林. 2009. 用有限区域风速场准确求解流函数和速度势场的方法 [J]. 大气科学, 33 (4): 811–824. Zhu Zongshen, Zhu Guofu, Zhang Lin. 2009. An accurate solution method of stream function and velocity potential from the wind field in a limited area [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 33 (4): 811–824.

用有限区域风速场准确求解流函数和速度势场的方法

朱宗申^{1, 2} 朱国富^{2, 1} 张林¹

1 中国气象科学研究院数值预报研究中心, 北京 100081

2 国家气象中心, 北京 100081

摘 要 流函数和速度势是气象业务和研究中常用于表述风速的一组变量。用有限区域风速场, 使用有限差分方法求解得到的流函数和速度势场重建初始风速场, 由于受区域边界的限制往往有明显的偏差。虽然有许多求解方法的研究, 但是, 至今仍尚未见到一种真正准确的求解计算方案。首先, 介绍用 Arakawa A 网格和 D 网格分布的有限区域风速场求解流函数和速度势场的一般有限差分计算方法, 探讨用它们的解重建风速场产生误差的原因。然后, 针对这些原因, 对给定的有限区域, 通过线性外推初始风速场, 扩展求解计算区域, 使用协调、一致的有限差分格式方案, 准确计算求解区域的边界有旋风速、散度风速和速度势的定解边界条件, 以及恰当选择流函数、速度势、涡度和散度等变量的分布网格, 设计了用上述两种网格分布的风速场准确求解流函数、速度势场的方案, 并对其正确性加以证明, 它们可以推广应用于其他 Arakawa 网格。用实际资料试验同样显示, 方案避免了重建风速场误差的出现, 与初始风速场相比, 全场风速最大偏差精度达到 10^{-12} m/s 或以上, 在计算机精度造成的计算误差影响范围内。本文的研究很好解决了长期以来用有限区域风速场、使用有限差分方法无法准确求解流函数和速度势场的问题。

关键词 有限区域 准确求解流函数和速度势 误差分析 Arakawa 网格方案 有限差分方法

文章编号 1006–9895 (2009) 04–0811–14

中图分类号 P425

文献标识码 A

An Accurate Solution Method of Stream Function and Velocity Potential from the Wind Field in a Limited Area

ZHU Zongshen^{1, 2}, ZHU Guofu^{2, 1}, and ZHANG Lin¹

1 Center for Numerical Prediction Research, Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081

2 National Meteorological Center, Beijing 100081

Abstract The wind field is often represented by stream function and velocity potential in the meteorological community. For a limited area, the finite-difference approach is used to calculate the stream function and velocity potential from the wind field. But there are often large departures between the original and reconstructed wind fields caused by the unsuitable boundary conditions.

The basic finite-difference method for Arakawa A- and D-grids is introduced and the comprehensive discussion

收稿日期 2008–01–10, 2008–09–18 收修定稿

资助项目 国家自然科学基金资助项目 40475042, 国家“十一五”科技支撑计划项目“灾害天气精细数值预报系统及短期气候集合预测研究”2006BAC02B

作者简介 朱宗申, 男, 1941 年出生, 研究员, 主要从事数值天气预报研究及其业务系统建设。E-mail: zhuzs@cma.gov.cn

about the problems in the previous methods is given. Then a new method is presented, whose unique features include (a) the linear extrapolation of the original wind field and the extension to the computation domain, (b) the consistent finite-difference scheme, (c) the accurate calculations of non-divergent wind, irrotational wind and solution-determining condition of velocity potential at the boundary, and (d) the suitable grid distribution of variables. The correctness of the new method is proved mathematically. The new method can be also used for all other Arakawa grids. The results of experiments using the real data show the maximum magnitude of departures between the original and reconstructed wind fields is only 10^{-12} m/s, which is produced by the round-off error of the computer.

The longstanding problem on accurate solution of the stream function and velocity potential from the wind field in a limited area by using the finite-difference approach, is perfectly solved in the present study.

Key words limited area, accurate solution of stream function and velocity potential, Arakawa grids scheme, error analysis, finite-difference method

1 引言

流函数 ψ 和速度势 χ 是常用于表述风速 u 、 v 的一组变量,它们在气象业务和研究中得到广泛应用。近年来,变分资料同化方法已成为国际上采用的主流资料同化方法。这种方法中的很多方案(Barker et al., 2004; Lorenc et al., 2000; 张华等, 2004; 朱宗申等, 2002; 庄世宇等, 2005),利用流函数建立风场和质量场的统计动力约束,有些还用流函数和速度势建立水平环流和次级环流意义上的统计动力约束,而这些约束关系对于方案的计算有着重要影响。因此,资料同化的发展使得流函数和速度势有了新的应用,并成为这些资料同化方案中的一个关键环节。

ψ 和 χ 不是观测量,需要用能够观测的风速通过求解 Poisson 方程得到[见公式(2)]。 ψ 和 χ 场求解准确性的一种检验方法,是用求解的 ψ 和 χ 场重建风速(以下用 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 表示)场,与初始风速(以下用 u_0 、 v_0 表示)场比较。用风速场求解 ψ 和 χ 场是典型的数值计算问题,在全球区域容易采用谱方法获得(Bourke, 1972, 1974),对于有限区域大多采用有限差分方法。由于有限区域 ψ 和 χ 场的求解需要使用定解边界条件,但是耦合的边界条件[见公式(4)]往往使得求解问题变得复杂和困难。

1958年,Phillips(1958)提出用调整的边界法向初始风速确定 ψ 边界条件,求解 ψ 场。随后,Sangster(1960)提出一种被广泛使用的方法。首先设定 χ 的边界条件为零,求解 χ 场,然后将边界法向初始风速减去求得的散度风速,用于确定 ψ 边界条件,求解 ψ 场。然而,Shukla et al.(1974)和Lynch(1988, 1989)的试验显示,这种方法的结果

并不十分理想。Shukla et al.(1974)在Sangster(1960)方法基础上,提出一种改进的求解方法。使用边界法向和切向两种初始风速,通过迭代更新 ψ 和 χ 边界条件,求解 ψ 和 χ 场。Bijlsma et al.(1986)则给出另一种迭代求解方法。将 ψ 和 χ 分离成两部分,一部分在边界取零值,对应的风速场在区域内是有旋和有辐散的;另一部分在边界为原 ψ 和 χ 值,对应的风速场在区域内既无旋又无辐散。在同时求解两个 Poisson 方程过程中,张弛 ψ 和 χ 的内部和边界值,得到 χ 和 ψ 场。虽然上述这些方法对重建风场有所改进,但Haltiner et al.(1980)和Lynch(1988)的计算表明,迭代过程往往并不收敛。后来,Chen et al.(1992a, 1992b)提出又一种迭代求解 ψ 和 χ 的方法。把风场分离为内部辐散风、内部有旋风以及调和风。采用正弦或余弦调和函数对 ψ 和 χ 展开,求解边界条件为零的内部有旋风和辐散风的 ψ 和 χ ,以及区域内涡度和散度为零的调和风的 ψ 和 χ ,并进行调和风的迭代求解,最终得到全风场的 ψ 和 χ 。这个方法能够得到最大误差为0.1 m/s量级精度的重建风场,但是并未给出计算收敛的严格证明。朱宗申等(2008)在Shukla et al.(1974)方法基础上,提出对 ψ 、 χ 和风速分量的增量进行迭代的有限差分求解方法。试验同样显示,虽然计算结果精度很高,但并不能收敛。

综上所述,虽然有许多求解有限区域 ψ 和 χ 场的方法研究,但是有的方法精度不能令人满意,有的方法需要采用迭代方法计算,并且不能保证收敛。Bishop(1996)认为,由于受区域边界的限制,对于非线性分布的有限区域风场,往往难于重建准确的风场。虽然,Stephens et al.(1978)曾采用周期边界条件、Fourier转换和一致的有限差分方法

得到精确解, 然而对于其他普遍的边界条件, 这种方法并不适用。他们甚至认为, 没有有效确定准确 ψ 和 χ 边界条件的方法。至今, 有限区域用有限差分方法求解 ψ 和 χ 的研究进展甚少, 尚未见到一种真正准确的求解计算方案。

本文的研究很好地解决了长期以来无法用有限区域风速场、使用差分方法准确求解 ψ 和 χ 场的问题, 其方案适用于所有规则分布的有限区域风速场。第 2 节简述用有限区域 u 、 v 场求解 ψ 和 χ 场的基本原理, 然后, 介绍在规则的有限区域, 用 Arakawa 网格 (Arakawa, 1966) 中 A 网格和 D 网格分布的 u_0 、 v_0 场求解 ψ 和 χ 场的一般差分计算方法, 探讨用它们的解重建 $\tilde{u}$ 、 $\tilde{v}$ 场产生偏差的原因。第 3 节中, 针对这种原因, 设计了用上述两种网格分布的 u_0 、 v_0 场准确求解 ψ 和 χ 场的差分计算方案, 在附录中对其正确性加以证明, 并将方案推广到其他 Arakawa 网格。第 4 节给出用实际资料的试验计算结果, 对方案的准确性给以数值检验。最后, 进行总结。

2 有限区域风速场求解流函数和速度势场的误差分析

2.1 用风速场求解流函数和速度势场的基本原理

设: 在有限区域 Ω , 已知初始风速 u_0 、 v_0 场, 存在流函数 ψ 、速度势 χ 和涡度 ζ 、散度 η , 有:

$$\begin{cases} u_0 = u_\psi + u_\chi = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ v_0 = v_\psi + v_\chi = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \zeta, \\ \nabla^2 \chi = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = \eta. \end{cases} \quad (2)$$

其中, u_ψ 、 v_ψ 和 u_χ 、 v_χ 分别为有旋风速和散度风速分量。如果同时知道 Ω 边界 Σ 的 ψ 、 χ 为

$$\begin{cases} \psi_\Sigma = \psi(\Sigma), \\ \chi_\Sigma = \chi(\Sigma). \end{cases} \quad (3)$$

根据 (2)、(3) 式, 可以得到 Ω 内 ψ 、 χ 场的唯一解。但是, 在求解 ψ 、 χ 场的实际问题中, 往往仅知道 Ω 内及 Σ 的 u_0 、 v_0 , 并不知道 Σ 的 ψ 、 χ 。此时, 求解问题的边界条件变为

$$\begin{cases} u_{0\Sigma} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_\Sigma + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_\Sigma = u_0(\Sigma), \\ v_{0\Sigma} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_\Sigma + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_\Sigma = v_0(\Sigma). \end{cases} \quad (4)$$

Lynch (1988)、Chen et al. (1992a) 指出, “用有限区域风速场求 ψ 、 χ 场的解不是唯一的, 但这些解却可以重建确定的初始风速场”。对于气象的实际问题, 就是求满足边界条件 (4) 式, 以及方程 (2) 式的 ψ 、 χ 场的一个特解。

2.2 计算流函数和速度势场的有限差分方法

下面给出在网格点规则分布、采用通常的中央差分格式计算情况下, 用两种最常见的、典型分布的风速场 (Arakawa 网格 A 和 D 方案, 以下简称方案 A 和方案 D) 求 ψ 和 χ 场特解的最一般的有限差分计算方法。这两种方案的计算区域、网格和变量分布见图 1a、d。

方案主要的计算步骤如下:

(1) 给出 ψ 的定解边界条件 $\psi(\Sigma)$ 。

根据 2.1 节的基本原理, ψ 定解边界条件的取法可以有多种。考虑大气准地转和准无辐散的特性, $\psi(\Sigma)$ 可按下式

$$\psi_{i,j}(\Sigma) = \phi_{i,j}(\Sigma) / f_{i,j}(\Sigma)$$

给定。其中, $\phi_{i,j}$ 是位势高度, $f_{i,j} = 2\omega \sin \phi_{i,j}$, ω 是地转角速度, $\phi_{i,j}$ 是纬度, i 、 j 是网格坐标。 $\psi(\Sigma)$ 也可以按 Phillips (1958)、Chen et al. (1992a) 和朱宗申等 (2008) 所述的相似方法, 根据下式

$$\oint_l d\psi = \oint_l \frac{d\psi}{dl} dl = \oint_l V_{\psi,n} dl = 0,$$

利用中央差分方法计算给出。其中 $V_{\psi,n}$, 为边界 l 的法向有旋风速。

首先, 在方案 A 和方案 D 求解 ψ 场的区域, 按下述步骤:

$$\psi_1(\Sigma) = c,$$

$$\psi_k(\Sigma) = c + \sum_{m=2}^k \bar{V}_{n,m-1} \times \delta l_{m-1}$$

$$(k=2, 3, \dots, N, N+1)$$

计算近似的 $\psi(\Sigma)$ 。其中, c 为待定常数, 通常取零; $\bar{V}_n$ 为边界法向有旋风速的近似值, 对方案 A 和方案 D 分别取:

$$\bar{V}_{n,m} = \frac{V_{0,n,m} + V_{0,n,m+1}}{2} \quad (m=1, 2, \dots, N),$$

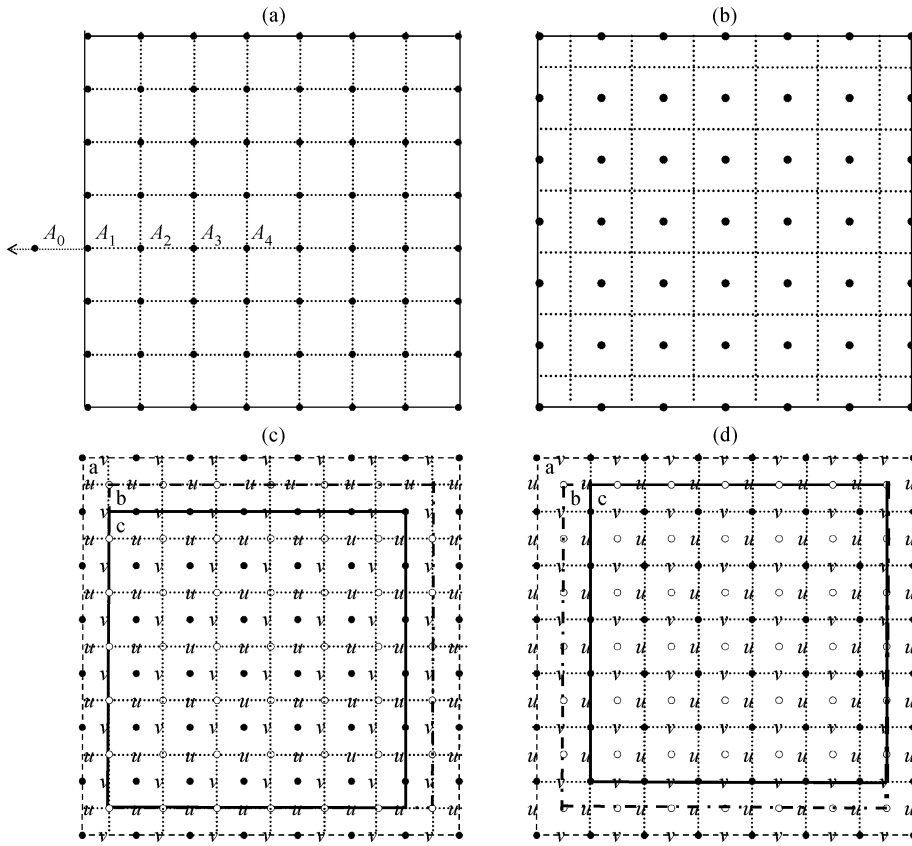


图1 四种 Arakawa 网格方案的计算区域、网格和变量分布: (a) 方案 A 和 (b) 方案 B/E (●置放 u 、 v 、 ψ 、 χ 、 ζ 和 η); (c) 方案 C 和 (d) 方案 D (●置放 ψ 和 ζ , ○置放 χ 和 η)。实线: 设定求解区域; 点线: Arakawa 网格; (a) 箭头: 边界的法向方向; (c、d) 虚线: 求解流函数区域; (c、d) 点虚线: 求解势函数区域

Fig. 1 Experimental domains and variable distributions for four different Arakawa grids, (a) Arakawa A; (b) Arakawa B/E; (c) Arakawa C; (d) Arakawa D. ● represents u 、 v 、 ψ 、 χ 、 ζ and η in (a) and (b); ● is for ψ 、 ζ and ○ for χ 、 η in (c) and (d). Solid lines give the computational areas, dot lines are the horizontal grids, dashed lines and dash-dotted lines in (c) and (d) give the computational areas for stream function and velocity potential respectively, arrow in (a) shows the normal direction at the boundary

$$V_{0,n,N+1} = V_{0,n,1},$$

和

$$\bar{V}_{n,m} = \bar{V}_{0,n,m} \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

$V_{0,n}$ 是边界法向初始风速; δl 为格距; N 为边界格点数。

然后, 通过调整 $\psi_k(\Sigma)$, 使得绕边界 l 线积分一圈后回到第一格点的 $\psi_{N+1}(\Sigma)$ 等于 $\psi_1(\Sigma)$, 得到定解边界条件 $\psi(\Sigma)$ 。

(2) 求解 ψ 场和确定区域所有格点的 u_ψ 、 v_ψ 。

首先, 利用 u_0 、 v_0 场计算区域内 (“区域” 指包括边界, “区域内” 指不包括边界。以下同) 的 ζ 场。对方案 A 用下式

$$\zeta_{i,j} = -\frac{\partial u_{0,i,j}}{\partial y_{i,j}} + \frac{\partial v_{0,i,j}}{\partial x_{i,j}} = -\frac{u_{0,i,j+1} - u_{0,i,j-1}}{2\delta y_{i,j}} + \frac{v_{0,i+1,j} - v_{0,i-1,j}}{2\delta x_{i,j}} \quad (i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1;$$

$$j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1) \quad (5-1)$$

对方案 D 用下式

$$\zeta_{i,j} = -\frac{\partial u_{0,i,j}}{\partial y_{i,j}} + \frac{\partial v_{0,i,j}}{\partial x_{i,j}} = -\frac{u_{0,i,j} - u_{0,i,j-1}}{\delta y_{i,j}} + \frac{v_{0,i,j} - v_{0,i-1,j}}{\delta x_{i,j}} \quad (i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1;$$

$$j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1) \quad (5-2)$$

其中, I_{ma} 和 J_{ma} 分别是求解区域东-西和南-北的格点数 (下同)。

然后, 由 ψ 的定解边界条件 $\psi(\Sigma)$ 和差分格式的 Poisson 方程

$$\nabla^2 \psi_{i,j} = \zeta_{i,j} \quad (i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1;$$

$$j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1), \quad (6)$$

用超松弛迭代方法得到求解区域内的 ψ 场。其中 $\nabla^2 \psi_{i,j}$, 对方案 A 邻近区域边界第二圈及以内的

格点采用下式 [式中的 A 用 ψ 代替, (7-2)~(7-4) 式同此],

$$\nabla^2 A_{i,j} = \frac{A_{i+2,j} - 2A_{i,j} + A_{i-2,j}}{4\delta x_{i,j}^2} + \frac{A_{i,j+2} - 2A_{i,j} + A_{i,j-2}}{4\delta y_{i,j}^2} \quad (i=3, 4, \dots, I_{\text{ma}}-2; j=3, 4, \dots, J_{\text{ma}}-2). \quad (7-1)$$

邻近区域边界第一圈: 四个角的格点采用 (7-4) 式, 其他邻近东、西边界的格点采用 (7-2) 式,

$$\nabla^2 A_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{\delta x_{i,j}^2} + \frac{A_{i,j+2} - 2A_{i,j} + A_{i,j-2}}{4\delta y_{i,j}^2} \quad (i=2, I_{\text{ma}}-1; j=3, 4, \dots, J_{\text{ma}}-2). \quad (7-2)$$

邻近南、北边界的格点采用 (7-3) 式,

$$\nabla^2 A_{i,j} = \frac{A_{i+2,j} - 2A_{i,j} + A_{i-2,j}}{4\delta x_{i,j}^2} + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\delta y_{i,j}^2} \quad (i=3, 4, \dots, I_{\text{ma}}-2; j=2, J_{\text{ma}}-1). \quad (7-3)$$

这样可以得到精度较高的求解结果 (朱宗申等, 2008)。对方案 D 采用如下差分公式

$$\nabla^2 A_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{\delta x_{i,j}^2} + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\delta y_{i,j}^2} \quad (i=2, 3, \dots, I_{\text{ma}}-1; j=2, 3, \dots, J_{\text{ma}}-1). \quad (7-4)$$

最后, 方案 A 和方案 D 分别用中央差分公式,

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\psi_{i,j}} = -\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = -\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\delta y_{i,j}} \\ (i=1, 2, \dots, I_{\text{ma}}; j=2, 3, \dots, J_{\text{ma}}-1), \\ \tilde{v}_{\psi_{i,j}} = \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x_{i,j}} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\delta x_{i,j}} \\ (i=2, 3, \dots, I_{\text{ma}}-1; j=1, 2, \dots, J_{\text{ma}}), \end{cases} \quad (8-1)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\psi_{i,j}} = -\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = -\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{\delta y_{i,j}} \\ (i=1, 2, \dots, I_{\text{ma}}; j=1, 2, \dots, J_{\text{ma}}-1), \\ \tilde{v}_{\psi_{i,j}} = \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x_{i,j}} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{\delta x_{i,j}} \\ (i=1, 2, \dots, I_{\text{ma}}-1; j=1, 2, \dots, J_{\text{ma}}), \end{cases} \quad (8-2)$$

计算区域所有格点的 $\tilde{u}_{\psi}$ 、 $\tilde{v}_{\psi}$; 无法用上式求得的重建边界切向有旋风速 $\tilde{V}_{\psi,l}$, 线性外推得到。

(3) 计算 χ 的定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 。

一旦 ψ 场和 $\tilde{u}_{\psi}$ 、 $\tilde{v}_{\psi}$ 场求得, χ 场和 $\tilde{u}_{\chi}$ 、 $\tilde{v}_{\chi}$ 场的取值将严格受其制约。根据 (1) 式可以用 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 和边界切向初始风速 $V_{0,l}$ 得到边界切向散度风速 $V_{\chi,l}$ 的计算值, 用于下面计算 χ 的定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 。 $\chi(\Sigma)$ 按本节计算步骤 (1) 的相似方法, 即根据下式

$$\oint_l d\chi = \oint_l \frac{d\chi}{dl} dl = \oint_l V_{\chi,l} dl = 0, \quad (9)$$

利用中央差分方法计算确定。

首先, 在方案 A 和方案 D 求解 χ 场的区域, 按下述步骤:

$$\begin{cases} \chi_1(\Sigma) = c, \\ \chi_k(\Sigma) = c + \sum_{m=2}^k \bar{V}_{l,m-1} \times \delta l_{m-1} \end{cases} \quad (k=2, 3, \dots, N, N+1), \quad (10)$$

计算, 其中, c 为待定常数, 通常取零; $\bar{V}_l$ 作为边界切向散度风速, 对方案 A 和方案 D 分别取:

$$\begin{cases} \bar{V}_{l,m} = \frac{V_{\chi,l,m} + V_{\chi,l,m+1}}{2} \quad (m=1, 2, \dots, N), \\ V_{\chi,l,N+1} = V_{\chi,l,1}, \end{cases} \quad (11-1)$$

和

$$\bar{V}_{l,m} = V_{\chi,l,m} \quad (m=1, 2, \dots, N), \quad (11-2)$$

δl 为格距; N 为边界格点数。由于用外推的 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 计算的 $V_{\chi,l}$ 未必恰当, 因此同样需要通过调整 $\chi_k(\Sigma)$, 使得绕边界 l 线积分一圈后回到第一格点的 $\chi_{N+1}(\Sigma)$ 等于 $\chi_1(\Sigma)$, 得到定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 。

(4) 求解 χ 场和确定区域所有格点的 u_{χ} 、 v_{χ} 。

与本节中计算步骤 (2) 相似。利用 u_0 、 v_0 场计算区域内的 η 场, 对方案 A 用下式

$$\eta_{i,j} = \frac{\partial u_{0,i,j}}{\partial x_{i,j}} + \frac{\partial v_{0,i,j}}{\partial y_{i,j}} = \frac{u_{0,i+1,j} - u_{0,i-1,j}}{2\delta x_{i,j}} + \frac{v_{0,i,j+1} - v_{0,i,j-1}}{2\delta y_{i,j}} \quad (i=2, 3, \dots, I_{\text{ma}}-1; j=2, 3, \dots, J_{\text{ma}}-1), \quad (12-1)$$

对方案 D 用下式

$$\eta_{i,j} = \frac{\partial u_{0,i,j}}{\partial x_{i,j}} + \frac{\partial v_{0,i,j}}{\partial y_{i,j}} = \frac{u_{0,i+1,j} - u_{0,i-1,j}}{\delta x_{i,j}} + \frac{v_{0,i,j+1} - v_{0,i,j-1}}{\delta y_{i,j}} \quad (i=1, 2, \dots, I_{\text{ma}}-1; j=1, 2, \dots, J_{\text{ma}}-1), \quad (12-2)$$

然后,由 χ 的定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 和差分格式的 Poisson 方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi_{i,j} &= \eta_{i,j} \quad (i=2, 3, \dots, I_{\text{ma}}-1; \\ j &= 2, 3, \dots, J_{\text{ma}}-1), \end{aligned} \quad (13)$$

用超松弛迭代方法得到求解区域内的 χ 场。其中, $\nabla^2 \chi_{i,j}$ 的差分形式与(7-1)~(7-4)式完全相同, 仅需将式中的 A 用 χ 代替。

最后,对方案 A 或方案 D 用中央差分公式

$$\begin{cases} \bar{u}_{\chi_{i,j}} = \frac{\partial \chi_{i,j}}{\partial x_{i,j}} = \frac{\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}}{2\delta x_{i,j}} \\ \quad (i=2, 3, \dots, I_{\text{ma}}-1; \\ \quad j=1, 2, \dots, J_{\text{ma}}), \\ \bar{v}_{\chi_{i,j}} = \frac{\partial \chi_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}}{2\delta y_{i,j}} \\ \quad (i=1, 2, \dots, I_{\text{ma}}; \\ \quad j=2, 3, \dots, J_{\text{ma}}-1), \end{cases} \quad (14-1)$$

或

$$\begin{cases} \bar{u}_{\chi_{i,j}} = \frac{\partial \chi_{i,j}}{\partial x_{i,j}} = \frac{\chi_{i,j} - \chi_{i-1,j}}{\delta x_{i,j}} \\ \quad (i=2, 3, \dots, I_{\text{ma}}; j=1, 2, \dots, J_{\text{ma}}), \\ \bar{v}_{\chi_{i,j}} = \frac{\partial \chi_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \frac{\chi_{i,j} - \chi_{i,j-1}}{\delta y_{i,j}} \\ \quad (i=1, 2, \dots, I_{\text{ma}}; j=2, 3, \dots, J_{\text{ma}}), \end{cases} \quad (14-2)$$

计算区域所有格点的 $\bar{u}_{\chi}$ 、 $\bar{v}_{\chi}$;无法用上式求得的重建边界法向散度风速 $\tilde{V}_{\chi,n}$,用线性外推得到。

由计算步骤(1)~(4),最终得到整个区域的 ψ 、 χ 场,以及由(1)式将 $\bar{u}_{\psi}$ 、 $\bar{v}_{\psi}$ 和 $\bar{u}_{\chi}$ 、 $\bar{v}_{\chi}$ 合成重建的 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场。

2.3 计算误差的成因分析

朱宗申等(2008)对 Arakawa A 网格方案的计算误差曾有过初步分析,下面对上述求解过程的计算误差成因作进一步探讨。

(1) 求解 Poisson 方程和计算边界风速的差分公式格式不协调。

方案 A 求解 ψ 和 χ 场使用的差分格式 Poisson 方程分别为(6)和(13)式。对邻近区域边界第一圈的格点,方程左端的 $\nabla^2 \psi_{i,j}$ 和 $\nabla^2 \chi_{i,j}$,采用(7-2)~(7-4)式计算;方程右端的 $\zeta_{i,j}$ 和 $\eta_{i,j}$,用 ψ 和 χ 表示时,有

$$\zeta_{i,j} = -\frac{u_{0,i,j+1} - u_{0,i,j-1}}{2\delta y_{i,j}} + \frac{v_{0,i+1,j} - v_{0,i-1,j}}{2\delta x_{i,j}} =$$

$$\frac{\psi_{0,i+2,j} - 2\psi_{0,i,j} + \psi_{0,i-2,j}}{4\delta x_{i,j}^2} +$$

$$\frac{\psi_{0,i,j+2} - 2\psi_{0,i,j} + \psi_{0,i,j-2}}{4\delta y_{i,j}^2},$$

$$\eta_{i,j} = \frac{u_{0,i+1,j} - u_{0,i-1,j}}{2\delta x_{i,j}} + \frac{v_{0,i,j+1} - v_{0,i,j-1}}{2\delta y_{i,j}} =$$

$$\frac{\chi_{0,i+2,j} - 2\chi_{0,i,j} + \chi_{0,i-2,j}}{4\delta x_{i,j}^2} +$$

$$\frac{\chi_{0,i,j+2} - 2\chi_{0,i,j} + \chi_{0,i,j-2}}{4\delta y_{i,j}^2},$$

对比计算 $\nabla^2 \psi_{i,j}$ 、 $\nabla^2 \chi_{i,j}$ 和 $\zeta_{i,j}$ 、 $\eta_{i,j}$ 的有限差分公式的格式形式可见,在 Poisson 方程两端存在明显的 ∇^2 不一致。这隐含着边界法向方向的差分计算(见图 1a)可以存在如下关系:

$$\frac{A_3 - 2A_2 + A_1}{\delta s^2} = \frac{A_4 - 2A_2 + A_0}{4\delta s^2},$$

即

$$A_0 = 4A_3 - 6A_2 + 4A_1 - A_4, \quad (15)$$

其中,变量 A 为 ψ 或 χ , δs 为格距。如果由(15)式,根据(8-1)和(14-1)式,可以用区域求解得到的 A 重新求得 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 和 $\tilde{V}_{\chi,n}$ 。容易证明,在求解区域用由此得到的 $\bar{u}_{\psi}$ 、 $\bar{v}_{\psi}$ 和 $\bar{u}_{\chi}$ 、 $\bar{v}_{\chi}$ 计算的 $\tilde{\zeta}$ 和 $\tilde{\eta}$,与用 u_0 、 v_0 计算的 ζ 和 η 完全恒等;而 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 和 $\tilde{V}_{\chi,n}$ 采用简单的线性外推公式

$$\tilde{V}_1 = 2\tilde{V}_2 - \tilde{V}_3$$

计算,上述的恒等关系并不成立。方案 D 存在类似的情况。显然,由于求解 Poisson 方程和外推计算边界风速的有限差分公式的格式不一致,可导致 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 和 $\tilde{V}_{\chi,n}$ 往往并不是与求解问题协调的解。

(2) 计算 $\chi(\Sigma)$ 和重建边界风速的公式不一致。

方案 A 采用(10)、(11-1)式,利用 $\bar{V}_{\chi,l}$ 计算值的平均 $\bar{V}_{\chi,l}$ 来求得 $\chi(\Sigma)$;然而重建风速场时用中央差分(14-1)式,由 $\chi(\Sigma)$ 计算 $\tilde{V}_{\chi,l}$ 。由于前后计算的有限差分公式的不一致,即使 $V_{\chi,l}$ 准确,也难以还原得到准确的 $\tilde{V}_{\chi,l}$ (除非 $V_{\chi,l}$ 沿边界是线性的)。

由于方案利用 $V_{0,l}$ 和外推的 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 确定 $V_{\chi,l}$,再用(10)、(11)式计算 $\chi(\Sigma)$ 。根据本节的计算步骤(1),外推的 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 往往与求解问题不协调,此时就会出现 $V_{\chi,l}$ 和 $\chi(\Sigma)$ 的计算近似误差。此外,根据本节的计算步骤(2),方案 A 还存在用不恰当的 $V_{\chi,l}$ 平均取值计算 $\chi(\Sigma)$,这些都将直接影响区域

内求解 χ 场和重建 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场的准确性。

3 准确求解流函数和速度势的方案设计

针对产生误差的原因, 对上述两种 Arakawa 网格分布的 u_0 、 v_0 场求解 ψ 和 χ 场的有限差分计算方案加以完善, 设计了准确求解的方案。

3.1 Arakawa D 网格方案

根据 2.3 节分析, 造成 Arakawa D 网格方案重建 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场误差的原因, 是由于计算定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 使用不协调的外推 $\tilde{V}_{\psi,l}$, 这在已设定的区域直接进行计算是难以避免的。为此, 根据 2.1 节叙述的求解基本原理, 可以按图 1d, 采用西边界和南边界的 u_0 、 v_0 线性外推一圈, 东边界的 u_0 外推一圈, 北边界的 v_0 外推一圈, 在图中所示的扩展区域 a 确定 ψ 的定解边界条件和求解 ψ 场, 然后在较小的区域 b 计算 χ 的定解边界条件和求解 χ 场, 最后在设定获得 ψ 、 χ 解的最小区域 c 得到最终结果, 避免使用任何外推及与其相关的计算。另外, 方案选择恰当的变量分布, 变量全部用中央差分计算, 保持差分格式计算的一致。

根据 2.2 节叙述的方案步骤和公式:

(1) 在区域 a 求解 ψ 场, 计算 $\bar{u}_\psi$ 、 $\bar{v}_\psi$ 场, 得到区域 b 的 $u_\chi(\Sigma)$ 、 $v_\chi(\Sigma)$ 所确定的边界 $V_{\chi,l}$ 。

(2) 由 Stokes 定理

$$\oint_{l_b} V_{\chi,l} dl = \oint_{l_b} (V_{0,l} - \tilde{V}_{\psi,l}) dl = \iint_{\sigma_b} (\zeta - \tilde{\zeta}) d\sigma = \iint_{\sigma_b} (\zeta - \zeta) d\sigma = 0.$$

因此, 不需要调整就可以直接求得定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 。在区域 b 求解 χ 场, 计算 $\bar{u}_\chi$ 、 $\bar{v}_\chi$ 场。最终完成在区域 a 的 ψ 场, 区域 b 的 χ 场, 即包括区域 c 的 ψ 和 χ 场以及 $\bar{u}_\psi$ 、 $\bar{v}_\psi$ 和 $\bar{u}_\chi$ 、 $\bar{v}_\chi$ 场的求解, 并重建区域 c 的风速 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场。

3.2 Arakawa A 网格方案

方案的计算区域、网格和变量分布与前述的一般方案完全相同 (见图 1a)。变量间采用一致的中央差分公式进行转换。

依然基本根据 2.2 节叙述的方案步骤和公式:

(1) 求解区域的 ψ 场。然后, 根据 (15) 式, 确定对应格点边界外的 ψ_0 。由中央差分 (8-1) 式计算区域除边界四个角外所有格点的 $\bar{u}_\psi$ 、 $\bar{v}_\psi$ 场, 其

满足

$$\frac{\bar{u}_{\psi,i+1,j} - \bar{u}_{\psi,i-1,j}}{\delta x_{i,j}} - \frac{\bar{u}_{\psi,i,j+1} - \bar{u}_{\psi,i,j-1}}{\delta y_{i,j}} = \zeta_{i,j} \quad (i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1)$$

(2) 为了能够求解得到区域准确 χ 场, 用其求得的 $\bar{u}_\chi$ 、 $\bar{v}_\chi$ 场, 既满足

$$\frac{\bar{u}_{\chi,i+1,j} - \bar{u}_{\chi,i-1,j}}{\delta x_{i,j}} + \frac{\bar{v}_{\chi,i,j+1} - \bar{v}_{\chi,i,j-1}}{\delta y_{i,j}} = \eta_{i,j} \quad (i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1)$$

而且与求得的 $\bar{u}_\psi$ 、 $\bar{v}_\psi$ 场合成, 准确重建初始风速 u_0 、 v_0 场。如图 2 所示, 将区域按东-西和南-北的格点数分成所有可能的四种类型: a: 全奇数型、b: 全偶数型、c: 南-北向奇数和东-西向偶数型、d: 东-西向奇数和南-北向偶数型, 并按四种类型将区域分别划分成 (I)、(II)、(III) 和 (IV) 四个子域。四个子域的西南角所对应的网格坐标 (i, j) 分别为 (1, 1)、(1, 2)、(2, 1) 和 (2, 2), 子域的东-西和南-北的格点数均为奇数。

根据区域的格点数确定类型和划分四个子域后, 对四个子域分别使用区域边界最外两圈的风速作为边界条件, 在原网格的跳点坐标系采用与 3.1 节 Arakawa D 网格方案完全相似的方法进行求解。

首先, 确定子域边界的 $V_{\chi,l}$ 的计算值, 并采用与 (10) 式相类似的公式,

$$\begin{cases} \chi_1(\Sigma) = c, \\ \chi_{k'}(\Sigma) = c + \sum_{m=3}^{k'} V_{\chi,l,m-1} \times 2\delta l_{m-1} \\ (k' = 3, 5, \dots, N-1), \end{cases} \quad (16)$$

计算 $\chi(\Sigma)$ 。其中, δl 为格距; N 为子域的边界格点数; 四个子域的 c 为待定常数, 但通常取值为:

$$\begin{aligned} c_{\text{I}} &= 0, \\ c_{\text{II}} &= c_{\text{I}} + (v_{\chi 1,1} + v_{\chi 1,2})/2 \times \delta l_y, \\ c_{\text{III}} &= c_{\text{I}} + (u_{\chi 1,1} + u_{\chi 2,1})/2 \times \delta l_x, \\ c_{\text{IV}} &= [c_{\text{II}} + (u_{\chi 1,2} + u_{\chi 2,2})/2 \times \delta l_x + c_{\text{III}} + (v_{\chi 2,1} + v_{\chi 2,2})/2 \times \delta l_y]/2, \end{aligned}$$

δl_x 和 δl_y 分别是相应格点东-西和南-北向的格距。

接着, 计算各子域内的 η 场,

$$\eta_{i',j'} = \frac{u_{0,i'+1,j'} - u_{0,i'-1,j'}}{2\delta x_{i',j'}} + \frac{v_{0,i',j'+1} - v_{0,i',j'-1}}{2\delta y_{i',j'}} \quad (i' = 3, 5, \dots, I'_{\text{ma}} - 2; j' = 3, 5, \dots, J'_{\text{ma}} - 2),$$

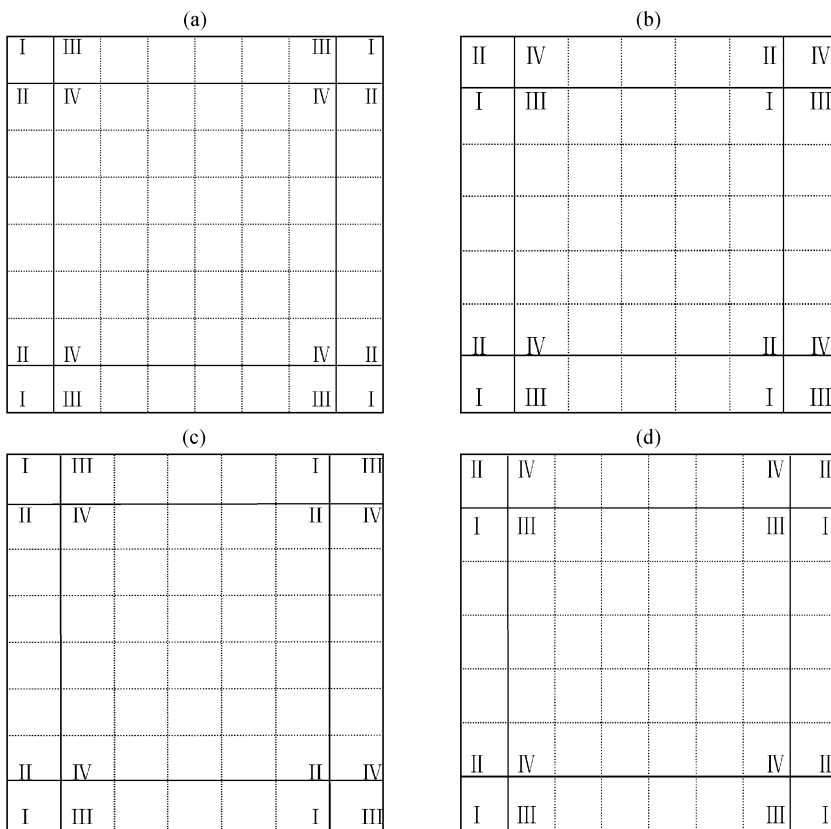


图2 四种区域类型的四个子域划分: (a) 全奇数型; (b) 全偶数型; (c) 南-北向奇数、东-西向偶数型; (d) 东-西向奇数、南-北向偶数型
Fig. 2 Four sub-domains divisions for four kinds of domains: The grid numbers are (a) both odd, (b) both even, (c) odd at the latitudinal direction and even at the longitudinal direction, (d) opposite to (c)

并由每个子域的定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 和差分格式的 Poisson 方程,

$$\nabla^2 \chi_{i',j'} = \frac{\chi_{i'+2,j'} - 2\chi_{i',j'} + \chi_{i'-2,j'}}{4\delta x_{i',j'}^2} +$$

$$\frac{\chi_{i',j'+2} - 2\chi_{i',j'} + \chi_{i',j'-2}}{4\delta y_{i',j'}^2} = \eta_{i',j'}$$

$$(i' = 3, 5, \dots, I'_{\text{ma}} - 2; j' = 3, 5, \dots, J'_{\text{ma}} - 2)$$

求解子域内的 χ 场。其中, I'_{ma} 、 J'_{ma} 分别是子域的东-西和南-北的格点数(奇数)。

然后,将各子域求得的 χ 场组合成区域的 χ 场。实际上,也可以将得到的区域边界两圈所有格点的 χ 作为定解边界条件,求解 Poisson 方程,得到所有其他格点的 χ 。这两种方法是完全等价的。

最后,计算区域的 $\bar{u}_\chi$ 、 $\bar{v}_\chi$ 场。其中,边界 $\hat{V}_{\chi,n}$ 无法采用中央差分方法计算,用 $V_{0,n}$ 减去 $\hat{V}_{\psi,n}$ 得到;四个角的格点 $\bar{u}_\chi$ 、 $\bar{v}_\chi$,与 $\bar{u}_\psi$ 、 $\bar{v}_\psi$ 一样无法准确求得,但实际上它们并不参与求解问题的计算。

最终,由 $\bar{u}_\psi$ 、 $\bar{v}_\psi$ 和 $\bar{u}_\chi$ 、 $\bar{v}_\chi$ 重建 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场,区域四个角的格点 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 取相应格点的 u_0 、 v_0 值。

有关 Arakawa A 和 Arakawa D 网格方案的求解正确性证明见附录。

3.3 Arakawa C 网格方案

如图 1c 所示,将 Arakawa C 网格的边界向外扩展、风速线性外推,西边界 u_0 外推一圈,南边界 v_0 外推一圈,东边界和北边界 u_0 、 v_0 外推一圈。比较图 1c 和图 1d,求解 ψ 、 χ 场,除了 Arakawa 网格坐标位置相差半个格点外,完全相同。因此,只需位移半个网格坐标,就可以直接将 Arakawa D 网格方案推广用于 Arakawa C 网格。

3.4 Arakawa B/E 网格方案

图 1b 给出 Arakawa B/E 网格的区域、网格和变量分布。比较图 1b 和图 1a,两者差异同样仅在于 Arakawa 网格坐标相差半个格点。因此,位移半个网格坐标后,可以直接将 Arakawa A 网格方案推广用于 Arakawa B/E 网格。

3.5 具有最小散度风动能的 ψ 和 χ 的求解方案

由于在有限区域求解 ψ 、 χ 和有旋风、散度风不是唯一的，Sangster (1960) 和 Yanai et al. (1967) 给出一种气象意义合理的求解标准，即求得的散度风的动能占总动能中所占比例最小和有旋风的动能最大。Lynch (1989) 证明，当设定 χ 的定解边界条件为常数（通常取零）时，求解的结果符合散度风的动能最小的判据。

本文设计的方案，对确定 ψ 的定解边界条件 $\psi(\Sigma)$ 并无特定要求，即选取任何 $\psi(\Sigma)$ 都可以得到准确的一组 ψ 和 χ 的特解。而且方案完全可以

采用首先确定 χ 边界条件 $\chi(\Sigma)$ 求解 χ ，然后求解 ψ 的步骤实现。此时，当设定 $\chi(\Sigma)$ 为任意常数时，就可以求解得到散度风动能最小，同时又能够准确重建 u_0 、 v_0 的一组 ψ 和 χ 的特解。

4 方案的实例试验

4.1 个例测试

利用国家气象中心中期数值预报系统 T213 12 小时预报的 2003 年 7 月 20 日 1200 UTC 500 hPa Arakawa A 网格分布的 u_0 、 v_0 场资料。资料区域范围为(2.25°N~49.50°N, 90.00°E~144.00°E)，

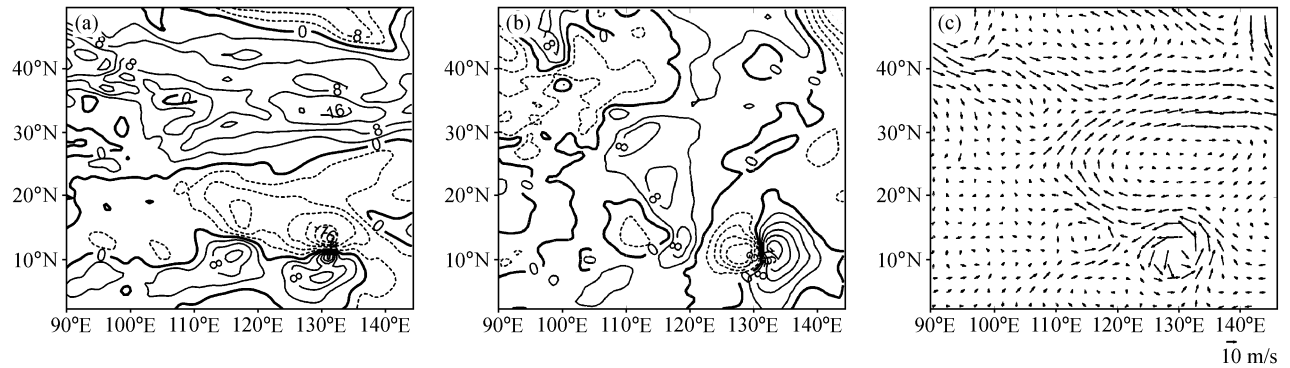


图 3 2003 年 7 月 20 日 1200UTC 500 hPa 初始风速场和流场：(a) u 场；(b) v 场；(c) 流场。(a、b) 等值线间距为 4 m/s
Fig. 3 Original wind speed and wind field at 1200 UTC 20 Jul 2003 at 500 hPa (isoline interval: 4 m/s): (a) u ; (b) v ; (c) wind fields

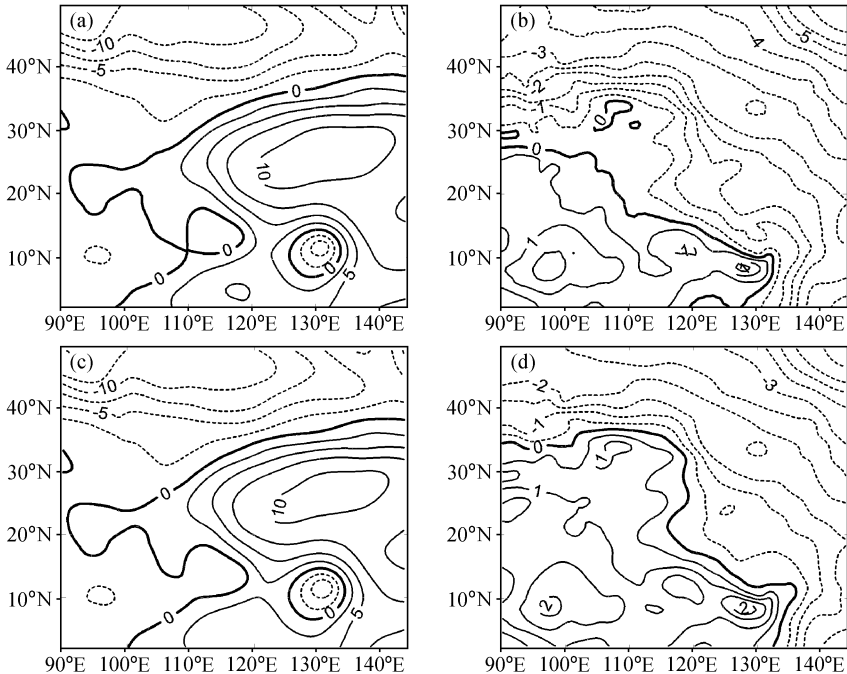


图 4 2003 年 7 月 20 日 1200 UTC 500 hPa 流函数和速度势场 (单位: $10^6 \text{ m}^2/\text{s}$): (a) A 方案 ψ ; (b) A 方案 χ ; (c) D 方案 ψ ; (d) D 方案 χ
Fig. 4 Stream function and velocity potential at 1200 UTC 20 Jul 2003 at 500 hPa (units: $10^6 \text{ m}^2/\text{s}$): (a) ψ for Arakawa A grid; (b) χ for Arakawa A grid; (c) ψ for Arakawa D grid; (d) χ for Arakawa D grid

分辨率为 0.5625° (经度) $\times 0.5625^{\circ}$ (纬度)。其他 Arakawa B/E、C 和 D 网格的 u_0 、 v_0 场, 分别由 A 网格的 u_0 、 v_0 场通过线性内插得到。图 3 是 Arakawa A 网格的 u_0 、 v_0 场和流场。试验中, 方案采用球面坐标有限差分计算公式, 求解 Poisson 方程设定的迭代计算 ψ 和 χ 精度取 $10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ 。四种网格方案求解得到的 ψ 和 χ 场非常一致, 图 4 给出 A、D 网格方案的计算结果。

4.1.1 求解计算过程的测试

对四种 Arakawa 网格方案的求解过程进行测试。表 1 给出在求解 χ 区域用 $\bar{u}_\psi$ 、 $\bar{v}_\psi$ 和 u_0 、 v_0 计算得到 ζ 场之间的最大绝对偏差, 以及在设定求解区域用 $\bar{u}_\chi$ 、 $\bar{v}_\chi$ 和 u_0 、 v_0 计算得到 η 场之间的最大绝对偏差, 精度均达 10^{-17} s^{-1} 或以上。表 2 给出根据 (9) 式, 线积分边界一圈 $\chi(\Sigma)$ 始末值的偏差 $\delta\chi$, 即依据 (16) 式和 (10)、(11-2) 式的差分计算步骤, $\delta\chi = \chi_{N+1}(\Sigma) - \chi_1(\Sigma)$ 的绝对值, 精度达到 $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 或以上。

4.1.2 重建风速场的效果检验

检验用风速场求解 ψ 和 χ 场合理、正确的一种方法, 是用 ψ 和 χ 场重建 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场, 与初始 u_0 、 v_0 场比较。表 3 给出它们之间的最大绝对偏差, 精度均达 10^{-12} m/s 或以上。

4.1.3 计算机精度和求解 Poisson 方程迭代计算精度的影响

对求解 Poisson 方程设定的迭代计算 ψ 、 χ 精度给予计算 $\delta\chi$ 和 u 、 v 、 ζ 、 η 等变量精度的影响进行分析。在方案个例中, 部分 ψ 、 χ 、 u 、 v 、 ζ 和 η 的值可以达到或超过 $10^7 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $10^6 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 10 m/s 、 10 m/s 、 10^{-5} s^{-1} 和 10^{-6} s^{-1} , 网格的格距为 0.5625° (经度) $\times 0.5625^{\circ}$ (纬度), 边界最多格点数为 360。此时, 在计算机精度为有效位数 15 位时, ψ 和 χ 达到或超过其上述取值的格点, 最高精度实际仅可达到 $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 和 $10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ 。表 4 给出 Arakawa A 网格方案的结果 (其他方案完全相似)。由表 4 可见, 在设定的 ψ 、 χ 精度达到上述计算机允许的最高精度前, 分别 4 个子域的 $\delta\chi$ 和整个区域的 u 、 v 、 ζ 、 η 等变量的计算精度, 随设定的 ψ 、 χ 精度的提高线性增加; 所有的计算误差, 均在计算机精度和求解 Poisson 方程设定的迭代计算 ψ 、 χ “可达”精度造成的计算误差影响范围内。

表 1 2003 年 7 月 20 日 1200 UTC 500 hPa 个例计算得到的 ζ 和 η 场的最大绝对偏差 (单位: s^{-1})

Table 1 The maximum absolute departures of ζ and η fields from the original and reconstructed wind fields at 1200 UTC 20 Jul 2003 at 500 hPa (units: s^{-1})

网格方案	ζ 场的最大偏差	η 场的最大偏差
Arakawa A	4.2×10^{-18}	5.5×10^{-18}
Arakawa B/E	6.7×10^{-18}	1.1×10^{-18}
Arakawa C	1.3×10^{-17}	4.1×10^{-18}
Arakawa D	1.1×10^{-17}	5.0×10^{-18}

表 2 2003 年 7 月 20 日 1200 UTC 500 hPa 个例计算得到的 $[\sum_{i=1}^N \chi_i(\Sigma)] - \chi_1(\Sigma)$ 的绝对误差 (单位: m^2/s)

Table 2 The absolute error of $[\sum_{i=1}^N \chi_i(\Sigma)] - \chi_1(\Sigma)$ at 1200 UTC 20 Jul 2003 at 500 hPa (units: m^2/s)

网格		误差
Arakawa A	I	2.2×10^{-6}
	II	2.9×10^{-6}
	III	2.1×10^{-6}
	IV	2.8×10^{-6}
Arakawa B/E	I	2.1×10^{-6}
	II	2.6×10^{-6}
	III	2.1×10^{-6}
	IV	2.7×10^{-6}
Arakawa C		7.5×10^{-6}
Arakawa D		1.3×10^{-5}

表 3 2003 年 7 月 20 日 1200 UTC 500 hPa 个例计算得到的四种网格方案重建风速场与初始风速场间的最大绝对偏差 (单位: m/s)

Table 3 The maximum absolute departures between the original and reconstructed wind fields for four kinds of Arakawa grids at 1200 UTC 20 Jul 2003 at 500 hPa (units: m/s)

网格方案	u 场的最大偏差	v 场的最大偏差
Arakawa A	5.0×10^{-13}	5.5×10^{-13}
Arakawa B/E	5.8×10^{-13}	5.3×10^{-13}
Arakawa C	1.9×10^{-12}	2.2×10^{-12}
Arakawa D	1.9×10^{-12}	2.2×10^{-12}

4.2 效果统计试验

利用中国气象科学研究院 GRAPES 数值预报系统 2007 年 7 月 1~10 日 0000 UTC 的产品, 生成区域范围为 ($15.0^{\circ}\text{N} \sim 64.2^{\circ}\text{N}$, $70.0^{\circ}\text{E} \sim 144.4^{\circ}\text{E}$), 分辨率为 0.6° (经度) $\times 0.6^{\circ}$ (纬度) 的 850 hPa、

表 4 设定迭代求解 Poisson 方程的 ψ 、 χ 精度, 对 2003 年 7 月 20 日 1200 UTC 500 hPa 个例计算分别 4 个子域的 $\delta\chi$ 和整个区域的 u 、 v 、 ζ 、 η 精度的影响 (变量单位同表 1~3)

Table 4 The influence of given ψ , χ precision in solving Poisson equation on the computational precision of $\delta\chi$ in the four sub-domains, and u , v , ζ , η in the domain at 1200 UTC 20 Jul 2003 at 500 hPa (units are same as Tables 1 – 3)

ψ/χ	$\delta\chi_1$	$\delta\chi_2$	$\delta\chi_3$	$\delta\chi_4$	u	v	ζ	η
1.0×10^{-1}	5.6×10^1	5.5×10^1	5.5×10^1	5.5×10^1	7.7×10^{-6}	5.8×10^{-6}	4.7×10^{-12}	7.9×10^{-11}
1.0×10^{-2}	5.5×10^0	5.5×10^0	5.5×10^0	5.5×10^0	7.6×10^{-7}	5.8×10^{-7}	4.6×10^{-13}	7.9×10^{-12}
1.0×10^{-3}	5.6×10^{-1}	5.5×10^{-1}	5.5×10^{-1}	5.5×10^{-1}	7.7×10^{-8}	5.8×10^{-8}	4.7×10^{-14}	8.0×10^{-13}
1.0×10^{-4}	5.5×10^{-2}	5.5×10^{-2}	5.5×10^{-2}	5.5×10^{-2}	7.6×10^{-9}	5.8×10^{-9}	4.6×10^{-15}	7.9×10^{-14}
1.0×10^{-5}	5.6×10^{-3}	5.5×10^{-3}	5.5×10^{-3}	5.5×10^{-3}	7.7×10^{-10}	5.8×10^{-10}	4.7×10^{-16}	8.0×10^{-15}
1.0×10^{-6}	5.5×10^{-4}	5.5×10^{-4}	5.5×10^{-4}	5.5×10^{-4}	7.6×10^{-11}	5.9×10^{-11}	4.7×10^{-17}	8.0×10^{-16}
1.0×10^{-7}	5.3×10^{-5}	5.3×10^{-5}	5.2×10^{-5}	5.2×10^{-5}	7.3×10^{-12}	5.7×10^{-12}	8.9×10^{-18}	7.6×10^{-17}
1.0×10^{-8}	2.2×10^{-6}	2.9×10^{-6}	2.1×10^{-6}	2.8×10^{-6}	5.0×10^{-13}	5.5×10^{-13}	4.2×10^{-18}	5.5×10^{-18}
1.0×10^{-9}	2.9×10^{-7}	3.3×10^{-7}	4.4×10^{-7}	3.4×10^{-7}	5.3×10^{-13}	6.5×10^{-13}	1.1×10^{-17}	3.2×10^{-18}

表 5 2007 年 7 月 1~10 日 0000 UTC 10 天资料计算得到的各层 ζ 、 η 、 u 和 v 场的最大绝对偏差统计

Table 5 The maximum absolute departures and their mean values of ζ , η , u , and v fields at 0000 UTC from the original and reconstructed wind fields at 0000 UTC for 1 – 10 Jul 2007 at 850, 500, and 200 hPa (units are same as Tables 1 and 3)

网格方案	ζ 场的最大绝对偏差/平均值			η 场的最大绝对偏差/平均值		
	850 hPa	500 hPa	200 hPa	850 hPa	500 hPa	200 hPa
A	$1.3\times10^{-17}/$	$2.8\times10^{-17}/$	$7.7\times10^{-17}/$	$8.0\times10^{-18}/$	$8.4\times10^{-18}/$	$1.9\times10^{-17}/$
	9.7×10^{-18}	2.0×10^{-17}	4.8×10^{-17}	5.8×10^{-18}	6.7×10^{-18}	1.4×10^{-17}
B/E	$2.0\times10^{-17}/$	$2.2\times10^{-17}/$	$7.9\times10^{-17}/$	$9.0\times10^{-18}/$	$1.6\times10^{-17}/$	$3.7\times10^{-17}/$
	1.2×10^{-17}	1.8×10^{-17}	4.8×10^{-17}	7.0×10^{-18}	1.2×10^{-17}	2.5×10^{-17}
C	$2.4\times10^{-17}/$	$4.0\times10^{-17}/$	$8.6\times10^{-17}/$	$1.2\times10^{-17}/$	$1.5\times10^{-17}/$	$2.5\times10^{-17}/$
	1.7×10^{-17}	3.2×10^{-17}	7.0×10^{-17}	7.4×10^{-18}	5.6×10^{-18}	1.4×10^{-17}
D	$2.5\times10^{-17}/$	$4.1\times10^{-17}/$	$8.1\times10^{-17}/$	$1.5\times10^{-17}/$	$1.1\times10^{-17}/$	$1.9\times10^{-17}/$
	1.7×10^{-17}	3.1×10^{-17}	6.2×10^{-17}	7.9×10^{-18}	4.8×10^{-18}	1.2×10^{-17}

网格方案	u 场的最大绝对偏差/平均值			v 场的最大绝对偏差/平均值		
	850 hPa	500 hPa	200 hPa	850 hPa	500 hPa	200 hPa
A	$1.5\times10^{-12}/$	$1.3\times10^{-12}/$	$2.9\times10^{-12}/$	$9.2\times10^{-13}/$	$1.2\times10^{-12}/$	$3.0\times10^{-12}/$
	8.8×10^{-13}	1.0×10^{-12}	2.2×10^{-12}	6.7×10^{-13}	9.1×10^{-13}	2.0×10^{-12}
B/E	$1.3\times10^{-12}/$	$1.6\times10^{-12}/$	$4.1\times10^{-12}/$	$8.1\times10^{-13}/$	$1.5\times10^{-12}/$	$2.6\times10^{-12}/$
	8.5×10^{-13}	1.2×10^{-12}	3.1×10^{-12}	6.6×10^{-13}	1.0×10^{-12}	2.0×10^{-12}
C	$3.0\times10^{-12}/$	$3.4\times10^{-12}/$	$5.1\times10^{-12}/$	$2.8\times10^{-12}/$	$3.5\times10^{-12}/$	$4.1\times10^{-12}/$
	2.1×10^{-12}	2.6×10^{-12}	3.8×10^{-12}	2.3×10^{-12}	2.8×10^{-12}	2.6×10^{-12}
D	$2.6\times10^{-12}/$	$2.6\times10^{-12}/$	$2.7\times10^{-12}/$	$2.9\times10^{-12}/$	$3.3\times10^{-12}/$	$3.4\times10^{-12}/$
	2.0×10^{-12}	2.1×10^{-12}	2.2×10^{-12}	2.3×10^{-12}	2.7×10^{-12}	2.4×10^{-12}

500 hPa 和 200 hPa 的 u_0 、 v_0 场资料, 采用上述个例测试相同的方法, 对四种 Arakawa 网格方案的计算结果进行分析和效果统计。所有试验样本的结果, 与个例测试完全一致。表 5 给出各等压面 10

天 ζ 、 η 场和 u 、 v 场的最大绝对偏差, 以及全场最大绝对偏差的 10 天平均, 分别达 10^{-17} s^{-1} 和 10^{-12} m/s 或以上。比较表 5 和表 1、表 3 显示, 统计试验进一步验证设计的求解方案正确和准确。

5 结论

(1) 对用 Arakawa A 网格和 D 网格的有限区域风速 u_0 、 v_0 场求解 ψ 和 χ 场的一般有限差分计算方法进行分析, 探讨产生求解误差的原因。其为:

(a) 求解 Poisson 方程和计算边界风速采用不协调的差分计算公式, 对边界非线性风速场采用不恰当的外推方法。

(b) 计算定解边界条件 $\chi(\Sigma)$ 和重建边界风速的公式前后不一致, 用不恰当的 $\tilde{V}_{\chi,l}$ 平均取值计算 $\chi(\Sigma)$ 。从而导致计算 $\chi(\Sigma)$ 的近似误差, 直接影响区域内 χ 场的求解, 以及 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场重建的准确性。

(2) 针对误差生成的原因, 依据“用有限区域风速场求 ψ 、 χ 场的解不是唯一的, 以及由这些解却可以重建确定的初始风速场”的特性, 通过外推初始风速 u_0 、 v_0 场、扩展求解计算区域, 使用协调、一致的有限差分格式方案, 准确计算求解区域边界的有旋风速 $\tilde{V}_{\psi,l}$ 、散度风速 $\tilde{V}_{\chi,l}$ 、 $\tilde{V}_{\chi,n}$ 和定解边界条件 $\chi(\Sigma)$, 以及选择恰当的 ψ 、 χ 、 ζ 和 η 等变量的分布网格, 设计了用 Arakawa A 网格和 D 网格分布的风速 u_0 、 v_0 场准确求解 ψ 和 χ 场的有限差分计算方案, 对其正确性加以证明, 并推广应用于其他 Arakawa B/E、C 网格。

(3) 利用实际资料, 用设计的四种 Arakawa 网格方案求解 ψ 和 χ 场, 对中间计算过程进行测试, 并重建风速 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场, 与初始风速 u_0 、 v_0 场比较, 对效果加以检验。所有变量的误差, 均在计算机精度和求解 Poisson 方程设定的迭代计算 ψ 、 χ 可达精度的影响范围内。在本文给定的区域范围和分辨率的实例中, 重建风速 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场的最大误差精度高达 10^{-12} m/s 或以上。

本文的研究很好解决了长期以来无法用有限区域风速场、使用差分方法准确求解 ψ 和 χ 场的问题。方案适用于采用中央差分格式计算情况下所有规则分布的有限区域风速场 (包括中小尺度系统情况下边界具有非常强的非线性风速时), 它无需采用任何迭代, 就可以直接准确求解, 具有非常好的应用价值。

附录 Arakawa A 和 Arakawa D 网格方案的求解正确性证明

以下对 Arakawa D 网格方案和 Arakawa A 网

格方案的正确性证明, 分别采用正文第 2、3 节中使用的相应网格的中央差分公式。

I Arakawa D 网格方案

(i) 根据 3.1 节第 (1) 点, 在计算流函数的区域 (区域 a) 内有

$$\frac{\partial \bar{v}_{i,j}}{\partial x_{i,j}} - \frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \nabla^2 \psi_{i,j} = \zeta_{i,j}$$

$$(i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1).$$

根据 3.1 节第 (2) 点, 在计算速度势的区域 (区域 b) 内有

$$\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial x_{i,j}} + \frac{\partial \bar{v}_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \nabla^2 \chi_{i,j} = \eta_{i,j}$$

$$(i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1).$$

因此, 在求解区域 (区域 c) 内有

$$\frac{\partial \bar{v}_{i,j}}{\partial x_{i,j}} - \frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \nabla^2 \psi_{i,j} = \zeta_{i,j}$$

$$(i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1), \quad (\text{A}-1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial x_{i,j}} + \frac{\partial \bar{v}_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \nabla^2 \chi_{i,j} = \eta_{i,j}$$

$$(i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1). \quad (\text{A}-2)$$

(ii) ①在计算 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 场的区域 (图 1d 中分别用 u 、 v 所围的矩形区域) 内, $-\frac{\partial}{\partial y_{i',j'}}$ (A-1) 式,

$\frac{\partial}{\partial x_{i',j'}}$ (A-2) 式, 然后相加; $\frac{\partial}{\partial x_{i',j'}}$ (A-1) 式,

$\frac{\partial}{\partial y_{i',j'}}$ (A-2) 式, 然后相加。由 (7-4)、(5-2)、

(12-2) 式和 (8-2)、(14-2) 式, 有

$$\nabla^2 (\bar{u}_{\psi,i',j'} + \bar{u}_{\chi,i',j'}) = \nabla^2 u_{0,i',j'},$$

$$\nabla^2 (\bar{v}_{\psi,i',j'} + \bar{v}_{\chi,i',j'}) = \nabla^2 v_{0,i',j'}$$

$$(i' = 2, 3, \dots, I'_{\text{ma}} - 1; j' = 2, 3, \dots, J'_{\text{ma}} - 1),$$

即

$$\begin{cases} \nabla^2 (\bar{u}_{i',j'} - u_{0,i',j'}) = 0, \\ \nabla^2 (\bar{v}_{i',j'} - v_{0,i',j'}) = 0 \end{cases} \quad (\text{A}-3)$$

$$(i' = 2, 3, \dots, I'_{\text{ma}} - 1; j' = 2, 3, \dots, J'_{\text{ma}} - 1).$$

因此, $\bar{u} - u_0$ 和 $\bar{v} - v_0$ 仅可能在计算 u 、 v 场的区域边界有极值。

② 将计算速度势的区域的 χ 场向外扩展一圈, 其 χ 取值满足下式

$$\delta \chi(\Sigma) = (V_{0,n} - \tilde{V}_{\psi,n}) \times \delta n,$$

则在计算流函数的区域的边界, 由 (14.2) 式重建

风速, 有

$$\tilde{V}_{\chi,n} = \frac{\delta \mathcal{X}(\sum)}{\delta n} = V_{0,n} - \tilde{V}_{\psi,n},$$

即

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{\psi,n} + \tilde{V}_{\chi,n} = V_{0,n}. \quad (\text{A}-4)$$

根据 3.1 节第 (2) 点, 在计算速度势的区域边界, 由 (10)、(11-2) 式计算边界 $\mathcal{X}(\sum)$, 有

$$\delta \mathcal{X}(\sum) = V_{\chi,l} \times \delta l = (V_{0,l} - \tilde{V}_{\psi,l}) \times \delta l.$$

则由 (14-2) 式重建风速, 有

$$\tilde{V}_{\chi,l} = \frac{\delta \mathcal{X}(\sum)}{\delta l} = V_{\chi,l} = V_{0,l} - \tilde{V}_{\psi,l}$$

即

$$\tilde{V}_l = \tilde{V}_{\psi,l} + \tilde{V}_{\chi,l} = V_{0,l}. \quad (\text{A}-5)$$

由 (A-4)、(A-5) 式, 在计算 u 、 v 场区域的边界分别有:

$$\tilde{u}(\sum) = \tilde{u}_{\psi}(\sum) + \tilde{u}_{\chi}(\sum) = u_0(\sum)$$

$$\tilde{v}(\sum) = \tilde{v}_{\psi}(\sum) + \tilde{v}_{\chi}(\sum) = v_0(\sum)$$

即

$$\begin{cases} \tilde{u}(\sum) - u_0(\sum) = 0, \\ \tilde{v}(\sum) - v_0(\sum) = 0. \end{cases} \quad (\text{A}-6)$$

因此, 根据 (A-3)、(A-6) 式, 在计算 u 、 v 场区域 (包含求解区域) 分别有:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_{\psi} + \tilde{u}_{\chi} \equiv u_0,$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}_{\psi} + \tilde{v}_{\chi} \equiv v_0.$$

(iii) 根据 2.1 节的基本原理, 上面得到的 ψ 和 χ 场在求解区域, 满足方程 (2) 式、边界条件 (4) 式, 并能准确重建初始风速场, 所以是求解问题的正确特解。

II Arakawa A 网格方案

(i) 根据 3.2 节第 (1) 点, 在区域内有:

$$\frac{\partial \tilde{v}_{i,j}}{\partial x_{i,j}} - \frac{\partial \tilde{u}_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \nabla^2 \psi_{i,j} = \zeta_{i,j}$$

$$(i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1),$$

即在区域的四个子域内有:

$$\frac{\partial \tilde{v}_{i',j'}}{\partial x_{i',j'}} - \frac{\partial \tilde{u}_{i',j'}}{\partial y_{i',j'}} = \nabla^2 \psi_{i',j'} = \zeta_{i',j'}$$

$$(i' = 3, 5, \dots, I'_{\text{ma}} - 2; j' = 3, 5, \dots, J'_{\text{ma}} - 2).$$

(A-7)

根据 3.2 节第 (2) 点, 在区域的四个子域内有:

$$\frac{\partial \tilde{u}_{i',j'}}{\partial x_{i',j'}} + \frac{\partial \tilde{v}_{i',j'}}{\partial y_{i',j'}} = \nabla^2 \chi_{i',j'} = \eta_{i',j'}$$

$$(i' = 3, 5, \dots, I'_{\text{ma}} - 2; j' = 3, 5, \dots, J'_{\text{ma}} - 2).$$

(A-8)

(ii) 由 (A-7) 和 (A-8) 式, 采用附录 I 第 (ii) 点相似证明方法 (将方案 D 相应的区域和公式变换为方案 A), 在各子域有:

$$\tilde{u}_{i',j'} = \tilde{u}_{\psi,i',j'} + \tilde{u}_{\chi,i',j'} = u_{0,i',j'},$$

$$\tilde{v}_{i',j'} = \tilde{v}_{\psi,i',j'} + \tilde{v}_{\chi,i',j'} = v_{0,i',j'}$$

$$(i' = 1, 3, 5, \dots, I'_{\text{ma}} - 2, I'_{\text{ma}}; j' = 1, 3, 5, \dots, J'_{\text{ma}} - 2, J'_{\text{ma}}),$$

即区域有:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i,j} = \tilde{u}_{\psi,i,j} + \tilde{u}_{\chi,i,j} = u_{0,i,j}, \\ \tilde{v}_{i,j} = \tilde{v}_{\psi,i,j} + \tilde{v}_{\chi,i,j} = v_{0,i,j} \end{cases} \quad (\text{A}-9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, I_{\text{ma}}; j = 1, 2, \dots, J_{\text{ma}}),$$

或记为:

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u}_{\psi} + \tilde{u}_{\chi} \equiv u_0, \\ \tilde{v} = \tilde{v}_{\psi} + \tilde{v}_{\chi} \equiv v_0. \end{cases}$$

(iii) 根据 (A-9) 式, 有

$$\nabla^2 \chi_{i,j} = \frac{\partial \tilde{u}_{i,j}}{\partial x_{i,j}} + \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}}{\partial y_{i,j}} = \frac{\partial u_{0,i,j}}{\partial x_{i,j}} + \frac{\partial v_{0,i,j}}{\partial y_{i,j}} = \eta_{i,j}$$

$$(i = 2, 3, \dots, I_{\text{ma}} - 1; j = 2, 3, \dots, J_{\text{ma}} - 1).$$

(iv) 同附录 I 第 (iii) 点, 根据 2.1 节的基本原理, 所以得到的 ψ 和 χ 场是区域求解问题的正确特解。

致谢 陆慧娟博士提供试验使用资料, 在此表示感谢。

参考文献 (References)

- Arakawa A. 1966. Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion. Part I: Two dimensional incompressible flow [J]. J. Comput. Phys., 1: 119-143.
- Barker D M, Huang W, Guo Y R, et al. 2004. A three-dimensional variational data assimilation system for MM5: Implementation and initial results [J]. Mon. Wea. Rev., 132: 897-914.
- Bijlsma S J, Hafkenscheid L M, Lynch P. 1986. Computation of the streamfunction and velocity potential and reconstruction of the wind field [J]. Mon. Wea. Rev., 114: 1547-1551.
- Bishop H C. 1996. Domain independent attribution. Part I: Reconstructing the wind from estimates of vorticity and divergence using free space Green's functions [J]. J. Atmos. Sci., 53: 241-252.
- Bourke W. 1972. An efficient one-level primitive equation spectral model [J]. Mon. Wea. Rev., 100: 683-689.
- Bourke W. 1974. A multi-level spectral model. I: Formulation and hemispheric integrations [J]. Mon. Wea. Rev., 102: 687-701.
- Chen Q S, Kuo Y H. 1992a. A harmonic-sine series expansion and its application to partitioning and reconstruction problems in a

- limited area [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 120: 91–112.
- Chen Q S, Kuo Y H. 1992b. A consistency condition for wind-field reconstruction in a limited area and harmonic-cosine series expansion [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 120: 2653–2670.
- Haltiner G J, Williams R T. 1980. *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology* [M]. 2nd ed. John Wiley and Sons, 477 pp.
- Lorenc A C, Ballard S P, Bell R S, et al. 2000. The Met. Office global three-dimensional variational data assimilation scheme [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 126: 2991–3012.
- Lynch P. 1988. Deducing the wind from vorticity and divergence [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 116: 86–93.
- Lynch P. 1989. Partitioning the wind in a limited domain [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 117: 1492–1500.
- Phillips N A. 1958. Geostrophic errors in predicting the Appalachian storm of November 1950 [J]. *Geophysica*, 6: 389–405.
- Sangster W E. 1960. A method of representing the horizontal pressure force without reduction of pressures to sea level [J]. *J. Atmos. Sci.*, 17: 166–176.
- Shukla J, Saha K R. 1974. Computation of non-divergent streamfunction and irrotational velocity potential from the observed winds [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 102: 419–425.
- Stephens J J, Johnson K W. 1978. Rotational and divergent wind potentials [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 106: 1452–1457.
- Yanai M, Nitta T. 1967. Computation of vertical motion and vorticity budget in a Caribbean easterly wave [J]. *J. Meteor. Soc. Japan*, 45: 444–466.
- 张华, 薛纪善, 庄世宇, 等. 2004. GRAPeS 三维变分同化系统的理想试验 [J]. *气象学报*, 62: 31–41. Zhang Hua, Xue Jishan, Zhuang Shiyu, et al. 2004. Idea experiments of GRAPES three-dimensional variational data assimilation system [J]. *Acta Meteorological Sinica* (in Chinese), 62: 31–41.
- 朱宗申, 胡铭. 2002. 一种区域格点三维变分分析方案——基本框架和初步试验 [J]. *大气科学*, 26: 684–694. Zhu Zongshen, Hu Ming. 2002. A regional grid three-dimensional variational analysis scheme—Basic construction and preliminary tests [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 26: 684–694.
- 朱宗申, 朱国富. 2008. 有限区域风速场求解流函数和速度势场的有效方案 [J]. *应用气象学报*, 19: 10–18. Zhu Zongshen, Zhu Guofu. 2008. An effective method to solve the stream function and velocity potential from a wind field in a limited area [J]. *Journal of Applied Meteorological Science* (in Chinese), 19: 10–18.
- 庄世宇, 薛纪善, 朱国富, 等. 2005. GRAPES 全球三维变分同化系统——基本设计方案与理想试验 [J]. *大气科学*, 29: 872–884. Zhuang Shiyu, Xue Jishan, Zhu Guofu, et al. 2005. GRAPES global 3D-Var system—Basic scheme design and single observation test [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 29: 872–884.