

廖洞贤, 朱禾. 2012. 多级扰动法——静力扣除及其在非静力模式设计中的可应用性 [J]. 大气科学, 36 (3): 645–656, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2011.11080. Liao Dongxian, Zhu He. 2012. A multilevel perturbation method—Hydrostatic deduction and its applicability to designing the nonhydrostatic model [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 36 (3): 645–656.

# 多级扰动法——静力扣除及其在非静力模式 设计中的可应用性

廖洞贤<sup>1</sup> 朱禾<sup>2</sup>

1 国家气象中心, 北京 100081

2 中国气象局干部培训学院, 北京 100081

**摘要** 在尺度分析的基础上, 利用大气垂直运动方程中各项量级的分布特点, 提出了多级扰动法。通过它可以使该方程中量级最大的垂直气压梯度力项 (VPGF) 和重力项 ( $G$ ) 的相应扰动项的量级随级次  $n$  的增加明显减小, 而其他项的量级不变; 而且, 方程中最大的垂直截断误差的量级也随  $n$  的增加而减小, 直到高级扰动项不再是扰动方程中仅有的最大项时为止。另外, 因截断误差的量级和被离散项的量级成正比, 在方程中 VPGF 的截断误差就是该方程中最大的垂直截断误差, 可以表示该方程的总的垂直截断误差。故垂直气压梯度力扰动项的量级的减小还可以使该方程中最大的垂直截断误差减小, 用多级扰动法可以使最大垂直截断误差控制在可容许的范围内, 使垂直气压梯度力扰动项和重力扰动项计算准确, 可以较好地描写对流活动。这样, 最大垂直截断误差对倾向的影响就不致歪曲或掩盖垂直柯氏力项和曲率项对倾向的贡献。还可以证明: 扰动平衡方程的解是静力扰动。多级扰动法实质上是多次利用扰动平衡方程的解, 从低级扰动中扣除其所含和解大小相同的静力扰动部分, 使高一级的扰动项的量级减小, 达到其与其他项量级接近, 以减小方程中的最大量级差的一种方法。而且,  $n$  的变化不影响方程的性质。可以说, 多级扰动法使大气基本态垂直廓线有较大的改善, 使其与大气实际垂直廓线很接近, 通过静力平衡, 使基本模式大气不包含垂直声波。

**关键词** 多级扰动法 尺度分析 修正的基本态垂直廓线

文章编号 1006-9895 (2012) 03-0645-12

中图分类号 P435

文献标识码 A

doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2011.11080

## A Multilevel Perturbation Method—Hydrostatic Deduction and Its Applicability to Designing the Nonhydrostatic Model

LIAO Dongxian<sup>1</sup> and ZHU He<sup>2</sup>

1 National Meteorological Center, Beijing 100081

2 China Meteorological Administration Training Center, Beijing 100081

**Abstract** Based upon the results from the scale analysis of the vertical equation of motion for the atmosphere and forecast experience, especially numerical weather forecast experience, the multilevel perturbation method has been proposed. It can be proved that in the vertical perturbation equation the magnitude of the perturbation decreases

收稿日期 2011-04-26, 2011-10-28 收修定稿

资助项目 国家自然科学基金资助项目 40875029、40745032

作者简介 廖洞贤, 男, 1926 年出生, 研究员, 主要从事数值预报和数值模拟的研究。

通讯作者 朱禾, E-mail: zhuh@cma.gov.cn

with  $n$ ,  $n=1, 2, \dots$ . But, on the other hand, since the magnitude of truncation error is proportional to that of the discretized term, in the vertical equation of motion or the perturbation equation the truncation error of the discretized vertical pressure gradient force (VPGF) is the largest vertical truncation error, which can represent the total vertical truncation error in the equation. Hence the decrease in the magnitude of VPGF with  $n$  is favorable for reduction of the total vertical truncation error and use of the method can limit such an error within a permissible range, to make computation of VPGF more correct and describe convective activity better than ever. Therefore the impact of the largest truncation error on the tendency of  $w$  would be unable to distort or cover up the contribution of vertical Coriolis force term and that of curvature term to the tendency.

Further, it can be proved that the solution of level  $n$  perturbation balance equation is a hydrostatic perturbation. The method is, substantially, a tool to be used to deduct the hydrostatic part from level  $n$  perturbation, in order to reduce the level  $n+1$  perturbation in magnitude. In this way a high level perturbation VPGF may easily come closer to the other terms without perturbation in magnitude. Furthermore, because the sum of VPGF and gravity does not vary with  $n$ , the physical properties of the vertical equation of motion would not change. Therefore, the method may be named the multilevel perturbation hydrostatic deduction method. It can diminish the difference between the improved basic state vertical profile and the actual atmospheric vertical profile quite small, and under hydrostatic equilibrium in the vast majority of the model atmosphere there would be almost no vertical sound waves.

**Key words** multilevel perturbation method, scale analysis, improved basic state vertical profile

## 1 引言

自从 Tapp and White (1976) 提出完全弹性非静力模式 (NH) 以来, 经过约 30 多年的努力, 现在世界上的气象中心已建立的业务或准业务模式已不下 10 个, 其积分范围大多是有限区域, 少数既是全球又含有有限区域 (廖洞贤, 2004)。Steppler et al. (2003)、Steppler (1995) 和 Dudhia (1995) 认为: 垂直坐标的选择、无摆动且计算精确的平流格式的构造和椭圆型方程的数值解的收敛速度应给予特别关注, 其中第一个问题在采用高分辨率时因陡峭地形使坐标面倾斜会引起计算不稳定。不过, 所谈内容仅限于计算方法, 对于动力方面的问题还未涉及。

关于动力方面的问题, 早期 Tapp and White (1976) 以及张可苏和周晓平 (1980) 在静力近似和完全弹性非静力情况下, 比较了高频、小振幅的重力惯性波的性质, 结论是: 在静力情况下会引起虚假的高频重力波, 应采用非静力方法。2002 年, Yeh et al. (2002) 还发现: 由于静力近似略去了  $dw/dt$ , 非静力导致的内波崩溃和翻转作用当水平运动尺度在 10 km 以下时, 不可忽视。但这些研究还限于较窄的范围, 还没有进行一般性研究和能量分析。

近年来, 一些气象中心企图用非静力模式制作

全球中长期预报和气候预测, 如 UKNC (Cullen et al 1997)、GEM (Cote et al., 1998) 和 GRAPES (薛纪善等, 2008) (缩写词全称见附录, 下面其他缩写词全称亦然)。它们的预报效果表明: 与采用同样分辨率的静力原始方程模式 (全球谱模式或差分模式) 相比, 目前还看不出有明显的优势 (Yeh et al, 2002)。另外, 用 GRAPES 模式计算的垂直速度有时会异常大, 引起虚假的格点暴雨。WRF 模式也反映有类似问题 (Skamarock et al., 2005), WRF 曾用约束 Courant 数以达到约束垂直速度的 nudging 方法。

不论对于静力模式或非静力模式, 能量守恒和能量转换都应是模式设计中需要考虑的。对此, 很多人都进行过研究, 特别是对于前一种模式。由于这类模式发展的时间较长, 结果比较成熟, 可以作为后一类模式设计的参考。早在 20 世纪 60 年代, Arakawa (1966) 就提出过正压过滤模式长期预报积分的方案, 以后, Arakawa and Lamb (1977)、Arakawa and Suartz (1983) 又研究 UCLA 大气环流模式的保持能量守恒的数值方案和 sigma 坐标系中原始方程模式的垂直差分方案, 其结果多次为数值预报模式设计者所引用。但是, Arakawa 等的方案只能在时间连续, 空间离散情况下保持能量守恒 (即瞬时能量守恒), 这是其不足之处。对于这个问题, 曾庆存和张学洪 (1987) 以及左瑞亭等 (2004)

曾提出时空差分的能量守恒的隐式方案。1995年, 季仲贞等(1995)提出时空差分的能量守恒的显式方案。至于完全弹性非静力模式, 由于问题比较复杂, 研究能量守恒的较少。研究方案有针对有限区模式垂直差分的 Taylor (1984) 方案和针对有限区模式的 Gallus and Rancic (1996) 方案, 以及致力于全球气候模式的 Satoh (2002) 方案。Satoh 以连续方程、动量方程和全能量方程构成模式的动力方案, 计算结果令人鼓舞, 其质量守恒和总能量守恒的计算都在舍入误差精度以内。

根据上面的分析和提出的问题, 下面我们将作进一步的分析并对某些问题提出解决的方法。全文共 6 节, 第 2 到第 6 节依次是: 对垂直运动方程进行尺度分析的结果和垂直扰动运动方程各项量级接近的可能、垂直扰动气压梯度力的截断误差、多级扰动法、多级扰动的性质和结论。

## 2 对垂直运动方程进行尺度分析的结果和方程各项量级接近的可能

根据廖洞贤(2008)研究中的尺度分析结果, 我们可以把在绝热无耗散情况下大气垂直运动方程各项的量级表示出来(图 1)。图 1 中纵坐标是  $\lg 10^a$ ,  $10^a$  是量级, 横坐标是方程各项。从图 1 可以看出如下几个特点:

(1) 不论对于水平尺度  $L=10^6$  m、 $L=10^5$  m 或  $L=10^4$  m 的运动, 最大项都是垂直气压梯度力项(VPGF)和重力项( $G$ ), 而最小项却各有不同, 对于  $L=10^6$  m 和  $L=10^5$  m 的运动, 是随  $L$  的减小而增大的垂直平流项(VAD); 对于  $L=10^4$  m 的运

动, 是曲率项(CUR)。由于 VPGF、 $G$  和 CUR 不随  $L$  而变, VPGF 与 CUR 之差也不随  $L$  而变, 故对于这三种水平尺度的运动, 最大项和最小项之间的量级差(以下简称最大量级差)总是随  $L$  的减小而减小的。根据图 1 所示, 对于  $L=10^6$  m、 $L=10^5$  m 或  $L=10^4$  m 的运动, 最大量级差依次是 9 个、7 个和 6 个量级。

(2) 最大项和次大项之间差 4 个量级。根据廖洞贤(2008)的研究, VPGF 和最小项之间的量级差最大, 应取的垂直分辨率最高, 而对于一定的  $L$ , 带有垂直差商项的量级愈大, 其截断误差的量级也愈大。因此, 通过分离技术使 VPGF 相应扰动项的量级减小, 会使所需垂直分辨率降低, 而在同样分辨率下, 用分离技术时的截断误差比未用时的截断误差显著减小。在已设计的完全弹性非静力模式中, Tapp and White (1976)、Dudhia (1993)、Bubnova et al (1995)、Xue et al. (2000) 和薛纪善等(2008)的模式, 毫无例外地都采用只随高度而变的气候值作基本态变量, 并用来对随时空而变的热力学变量进行分离, 用对后者的扰动作预报。看来这样做有一定好处。为了了解这种好处, 廖洞贤和孙岚(2003)曾用 19 种地面温度( $T_s$ )和温度的垂直递减率( $\Gamma$ )的组合构成的温度廓线和用气候值且只是  $z$  的函数的基本态廓线所作的计算, 扰动项的量级比 VPGF 和  $G$  仅降低约 1~2 个量级, 还不足以使方程达到各项量级接近的程度。但是, 也应看到如果我们用类似方法对扰动进行分离, 则有可能使更高级扰动项的量级继续降低, 经过几次使方程达到各项量级接近, 使与最大量级差相应的垂

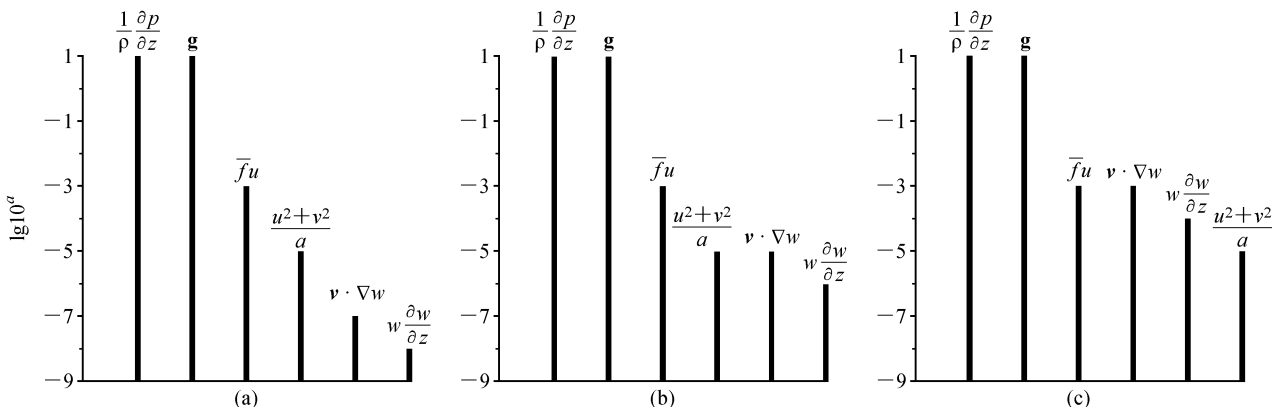


图 1 大气垂直运动方程中各项的量级 (倾向量级和  $v \cdot \nabla w$  量级相同): (a)  $L=10^6$  m; (b)  $L=10^5$  m; (c)  $L=10^4$  m

Fig. 1 Order of magnitude of each term in the vertical equation of motion for three kinds of horizontal motion (the magnitude of the tendency term is the same as that of  $v \cdot \nabla w$ ): (a)  $L=10^6$  m; (b)  $L=10^5$  m; (c)  $L=10^4$  m

直分辨率达到可用的程度。当然, 这些想法还须分析论证。

### 3 垂直扰动气压梯度力项的截断误差

#### 3.1 离散的垂直扰动运动方程和其各项的量级

设  $\delta F/\delta z = \partial F/\partial z + E(\delta F/\delta z)$ , 其中  $E(\delta F/\delta z)$  是  $\delta F/\delta z$  的截断误差。以  $L=10^6$  m 的运动为例, 我们可以把离散的大气垂直扰动运动方程写成:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla w S + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + \frac{\rho^{(1)}}{\rho} g =$$

$$\begin{matrix} 10^{-7} & 10^{-8} & 10^0 & 10^0 \\ \bar{f}u & + \frac{u^2 + v^2}{a} & + E_H & + E_V, \end{matrix} \quad (1)$$

$$\begin{matrix} 10^{-3} & 10^{-5} \end{matrix}$$

这里, 方程中各项下面的数表示各项的量级 [参阅廖洞贤 (2008) 的方程 (18) 及廖洞贤和孙岚 (2002)]。  $F^{(1)}$  是热力学变量  $F$  对基本态变量  $\hat{F}$  的 1 级扰动, 即  $F = \hat{F} + F^{(1)}$ 。因为截断误差的量级比待离散量的量级为小, 我们不妨取水平截断误差项  $E_H$  为方程的水平待离散项的 1/10, 这样  $E_H$  为  $10^{-8}$ 。  $E_V$  是方程中垂直截断误差的总和, 它可以用垂直扰动气压梯度力 (VPPGF) 项的截断误差  $E(\text{VPPGF})$  近似地表示。

#### 3.2 $E(\text{VPPGF})$ 对 $dw/dt$ 或 $\partial w/\partial t$ 的影响

在方程 (1) 中, 除被离散项外, 如果不计观测、分析或舍入误差的影响, 其他项都是可以精确计算的。这样, 在第 1 节中提到的  $w$  异常增大应该是  $dw/dt$  或  $\partial w/\partial t$  出现异常造成的, 而  $dw/dt$  或  $\partial w/\partial t$  出现异常只可能是方程中出现很大  $E(\text{VPPGF})$  所致。如果  $E(\text{VPPGF})$  是 VPPGF 的 1/100, 则  $E(\text{VPPGF})$  的量级是  $10^{-2}$ 。于是,  $E(\text{VPPGF})$  的量级就大于  $\bar{f}u$ 、 $(u^2 + v^2)/a$  和平流项的量级。

#### 3.3 对 $E(\text{VPPGF})$ 的估计

为了得到具体的结果, 我们还须对  $E(\text{VPPGF})$  进行估计。取  $T$  和静止大气基本态变量  $\hat{T}$  各是

$$T = \begin{cases} T_s, & z_s \leq z \leq z_1 \\ T_s - \Gamma_1(z - z_1), & z_1 \leq z \leq z_{T1} \\ T_{T1} = T_s - \Gamma_1(z_{T1} - z_1), & z_{T1} \leq z \leq z_t \end{cases} \quad (2)$$

和

$$\hat{T} = \begin{cases} \hat{T}_s - \Gamma_2 z, & z_s \leq z \leq z_{T2} \\ \hat{T}_{T2} = \hat{T}_s - \Gamma_2 z_{T2}, & z_{T2} \leq z \leq z_t \end{cases} \quad (3)$$

其中, 下标  $s$  和  $t$  表示地面和模式大气顶; 变量上带  $\hat{\cdot}$  的量表示基本态变量, 不带  $\hat{\cdot}$  的量表示实际变量; 下标  $T1$ 、 $T2$  各表示实际变量和基本态变量在对流层顶的值;  $z_1$  表示  $T$  廓线中的等温层顶。取  $z_s = 0$  m,  $z_1 = 3 \times 10^3$  m,  $z_{T1} = 1 \times 10^4$  m,  $z_{T2} = 1.2 \times 10^4$  m,  $T_s = 278.15$  K,  $\Gamma_1 = 5.5 \times 10^{-3}$  K/m,  $\hat{T}_s = 288.15$  K,  $\Gamma_2 = 6.5 \times 10^{-3}$  K/m。于是, 从静力方程我们有

$$p = \begin{cases} p_s \exp\left(-\frac{g}{R_d T_s} z\right), & z_s \leq z \leq z_1 \\ p_1 \exp\left\{\frac{g}{R_d \Gamma_1} \ln\left[1 - \left(\frac{\Gamma_1}{T_s}\right)(z - z_1)\right]\right\}, & z_1 \leq z \leq z_{T1} \\ p_{T1} \exp\left[-\frac{g}{R_d T_{T1}} (z - z_{T1})\right], & z_{T1} \leq z \leq z_t \end{cases} \quad (4)$$

和

$$\hat{p} = \begin{cases} \hat{p}_s \exp\left[\frac{g}{R_d \Gamma_2} \ln\left(1 - \frac{\Gamma_2}{T_s} z\right)\right], & z_s \leq z \leq z_{T2} \\ \hat{p}_{T2} \exp\left[-\frac{g}{R_d \hat{T}_{T2}} (z - z_{T2})\right], & z_{T2} \leq z \leq z_t \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $p_1 = p_s \exp\left\{-\frac{g}{R_d T_s} z_1\right\}$ , 是气压在  $z_1$  处的值; 同样,  $p_{T1}$  和  $\hat{p}_{T2}$  分别表示在  $z_{T1}$  处的气压和在  $z_{T2}$  处的基本态气压。这样, 我们可以求出  $p^{(1)}$ ,  $\rho^{(1)}$ 。至于  $E(\text{VPPGF})$ , 在取中心差的情形, 利用 Taylor 展开可以得到

$$E_v \approx E(\text{VPPGF}) \approx -\frac{1}{\rho_k} \times \frac{1}{12\Delta z} [p_{k+2}^{(1)} - p_{k-2}^{(1)} - 2(p_{k+1}^{(1)} - p_{k-1}^{(1)})] \quad (6)$$

其中,  $k$  是垂直网格的序号。于是, 从式 (6), 可以求得在  $\Delta z = 1000$  m, 200 m 和 20 m 时的  $|E(\text{VPPGF})|$ , 它们各可以表示其  $E(\text{VPPGF})$  的量级, 如表 1 所示。

表 1 取 3 种  $\Delta z$  得到的  $|E(\text{VPPGF})|$ \*

$\Delta z/\text{m}$	$ E(\text{VPPGF}) /\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
1000	$8.2556 \times 10^{-2}$
200	$4.7217 \times 10^{-4}$
20	$5.0384 \times 10^{-6}$

注: \*  $|(\ )|$  表示绝对值平均。

比较  $\Delta z = 1000 \text{ m}$  时的  $\overline{E(VPPGF)}$  和方程 (1) 中各项的量级, 可以看出: 除 VPPGF 和浮力项 (BUOY) 外, 它比所有的项都大。这样,  $\partial w / \partial t$  受到  $E(VPPGF)$  的影响就掩盖了  $\overline{fu}$ ,  $(u^2 + v^2) / a$  和平流项等对  $\partial w / \partial t$  的贡献。而且, 由于 VPPGF 总是方程中的最大项, 这种现象还会持续存在; 虽然  $(u^2 + v^2) / a$  总为正,  $\overline{fu}$  在北半球西风带中基本为正, 它们的持续作用仍不容易表现出来。这是不合理的。

### 3.4 垂直分辨率的问题

从前面的分析讨论来看,  $E(VPPGF)$  所以不合理, 是选取垂直分辨率不当造成的。其实并不尽然。从表 1 可以看到: 提高垂直分辨率可以使  $E(VPPGF)$  减小, 但是, 取到  $\Delta z = 20 \text{ m}$  仍有  $5.0384 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$  的误差; 对于  $L = 10^6 \text{ m}$  的运动, 对  $\partial w / \partial t$  的影响仍大于水平和垂直平流项对  $\partial w / \partial t$  的贡献。看来要彻底避免这种现象的出现, 只有再提高分辨率才行。不过, 根据朱禾等 (2007), 要避免这种现象,  $\Delta z$  须取为

$$\Delta z = \frac{\sqrt{6}H}{10^{[(A_z - B_1)_M + r] / 2}}, \quad (7)$$

其中,  $H$  是大气垂直厚度的特征尺度, 取为  $10^4 \text{ m}$ ,  $A_z$  和  $B_1$  各是 VPPGF 和最小项的量级 ( $10^8$ ) 的次数,  $(A_z - B_1)_M = \max_{\ell} (A_z - B_1)_{\ell}$ ,  $\ell$  是方程的序号,  $r$  是调节精度的参数, 取为 1。在非静力模式中,  $(A_z - B_1)_M$  就是方程 (1) 中的  $A_z - B_1$  即 8。根据式 (7) 的计算, 对于  $L = 10^6 \text{ m}$  和  $L = 10^5 \text{ m}$  的运动,  $\Delta z$  须取到  $0.77 \text{ m}$  和  $7.75 \text{ m}$ 。这显然在当前客观条件下是很难实现的。而且, 即使实现, 取这样小的  $\Delta z$ , 舍入误差反而会增大, 使计算效果适得其反 (冯康等, 1978)。不过还可以采用第 4 节中的多级扰动法。

## 4 多级扰动法

### 4.1 多级扰动的构造

根据方程 (1),  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}$  和  $\frac{\rho^{(1)}}{\rho} g$  是其最大项。在这个条件下, 我们可以得到如下结果:

**结果 1**  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}$  和  $\frac{\rho^{(1)}}{\rho} g$  量级相等符号相反。

因为, 如二者量级不相等, 则其中必有一项的量级大于另一项, 这样方程中最大项只有一项, 这

就违反了尺度分析中一个方程的最大项至少有 2 项的结论 (叶笃正等, 1988; 刘式适和刘适达, 1991); 另外, 如它们的符号相同, 则方程不能达到平衡, 故结果 1 成立。

根据结果 1, 我们可以构造 1 级扰动平衡方程

$$\frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial z} = -\bar{\rho}^{(1)} g, \quad (8)$$

其中,  $\bar{p}^{(1)}$ ,  $\bar{\rho}^{(1)}$  各是  $p^{(1)}$  和  $\rho^{(1)}$  中满足上方程的部分,  $p^{(1)} = \bar{p}^{(1)} + p^{(2)}$ ,  $\rho^{(1)} = \bar{\rho}^{(1)} + \rho^{(2)}$ 。但是  $\bar{p}^{(1)}$  和  $\bar{\rho}^{(1)}$  还必须各和  $\hat{p}$ ,  $\hat{\rho}$  一起满足形如

$$p_1 = p_r (R_d \rho_1 \theta_1 / p_r)^\gamma$$

的状态方程才能和  $\theta_1$  保持一致。这里  $p_1 = \hat{p} + \bar{p}^{(1)}$ ,  $\rho_1 = \hat{\rho} + \bar{\rho}^{(1)}$ ,  $\theta_1 = \hat{\theta} + \bar{\theta}^{(1)}$ ,  $p_r$  是参考气压, 取为常数。

方程 (8) 推广, 设

$$F^{(n)} = \bar{F}^{(n)} + F^{(n+1)}, \quad (9)$$

其中,  $n$  表示扰动级次,  $n$  是大于或等于 1 的正整数;  $\bar{F}^{(n)}$  表示  $F^{(n)}$  中满足  $n$  级扰动平衡方程

$$\frac{\partial \bar{p}^{(n)}}{\partial z} = -\bar{\rho}^{(n)} g, \quad (10)$$

又和  $p_{n-1}$ ,  $\rho_{n-1}$ ,  $\theta_{n-1}$  一起满足状态方程

$$p_n = p_r (R_d \rho_n \theta_n / p_r)^\gamma \quad (11)$$

的部分, 其中

$$\begin{aligned} p_n &= \hat{p} + \bar{p}^{(1)} + \dots + \bar{p}^{(n)}, \\ \rho_n &= \hat{\rho} + \bar{\rho}^{(1)} + \dots + \bar{\rho}^{(n)}, \\ \theta_n &= \hat{\theta} + \bar{\theta}^{(1)} + \dots + \bar{\theta}^{(n)}, \end{aligned}$$

其中  $n$  是大于等于 0 的整数; 当  $n=0$  时  $p_0 = \hat{p}$ ,  $\rho_0 = \hat{\rho}$ ,  $\theta_0 = \hat{\theta}$ 。

而  $F^{(n+1)}$  表示  $F^{(n)}$  对  $\bar{F}^{(n)}$  的扰动, 如取

$$\bar{\rho}^{(n)} = c_1 \rho^{(n)}, \quad (12)$$

其中  $c_1$  是一近于 1 的正实数,  $0.9 \leq c_1 \leq 0.99$ , 则

$$\rho^{(n+1)} = (1 - c_1) \rho^{(n)}. \quad (13)$$

而从方程 (11), 如  $\rho_n$ ,  $p_n$  和  $\hat{\theta}$ ,  $\bar{\theta}^{(1)}$ , 直到  $\bar{\theta}^{(n-1)}$  已知, 还可以求出  $\bar{\theta}^{(n)}$ , 从而, 从  $\rho^{(n)}$ ,  $\theta^{(n)}$ ,  $p^{(n)}$  通过 (9) 求出  $\rho^{(n+1)}$ ,  $\theta^{(n+1)}$ ,  $p^{(n+1)}$ 。不过, 在工作中还可以利用一些近似式来达到目的。在下节中我们将进行推导。

### 4.2 一些近似关系

对状态方程

$$\hat{p} = p_r (R_d \hat{\rho} \hat{\theta} / p_r)^\gamma \quad (14)$$

取对数, 有

$$\ln \hat{p} = \ln p_r + \gamma [\ln R_d + \ln \hat{\rho} + \ln \hat{\theta} - \ln p_r].$$

而对方程 (11), 置  $n=1$ , 取对数, 并利用上式, 则有

$$\ln\left(1 + \frac{\bar{p}^{(1)}}{\hat{p}}\right) = \gamma \left[ \ln\left(1 + \frac{\bar{\rho}^{(1)}}{\hat{\rho}}\right) + \ln\left(1 + \frac{\bar{\theta}^{(1)}}{\hat{\theta}}\right) \right]. \quad (15)$$

故近似地有

$$\frac{\bar{p}^{(1)}}{\hat{p}} = \gamma \left[ \frac{\bar{\rho}^{(1)}}{\hat{\rho}} + \frac{\bar{\theta}^{(1)}}{\hat{\theta}} \right],$$

或

$$\bar{p}^{(1)} = c_s^2 \left( \bar{\rho}^{(1)} + \frac{\hat{\rho}}{\hat{\theta}} \bar{\theta}^{(1)} \right), \quad (16)$$

其中  $c_s^2 = \gamma R_d \hat{T}$ 。类似地, 用  $p$ 、 $\rho$ 、 $\theta$  代替方程 (11) 中的  $p_n$ 、 $\rho_n$ 、 $\theta_n$  利用  $p$ 、 $\hat{p}$ 、 $p^{(1)}$  等的关系, 我们还有

$$p^{(1)} = c_s^2 \left[ \rho^{(1)} + \frac{\hat{\rho}}{\hat{\theta}} \theta^{(1)} \right], \quad (17)$$

从方程 (11) 取对数, 考虑其线性部分, 还有

$$\frac{\bar{p}^{(n)}}{p_{n-1}} = \gamma \left( \frac{\bar{\rho}^{(n)}}{\rho_{n-1}} + \frac{\bar{\theta}^{(n)}}{\theta_{n-1}} \right),$$

$$\bar{p}^{(n)} = (c_s^2)_{n-1} \left( \bar{\rho}^{(n)} + \frac{\rho_{n-1}}{\theta_{n-1}} \bar{\theta}^{(n)} \right), \quad (18)$$

其中,  $(c_s^2)_{n-1} = \gamma R_d T_{n-1}$ ,  $\ln p_{n-1} = \ln p_r + \gamma [\ln R_d + \ln \rho_{n-1} + \ln \theta_{n-1} - \ln p_r]$ 。如  $p = p_n + p^{(n+1)}$ ,  $\rho = \rho_n + \rho^{(n+1)}$ ,  $\theta = \theta_n + \theta^{(n+1)}$ , 还有

$$\frac{p^{(n+1)}}{p_n} = \gamma \left( \frac{\rho^{(n+1)}}{\rho_n} + \frac{\theta^{(n+1)}}{\theta_n} \right), \quad (19)$$

故

$$p^{(n+1)} = (c_s^2)_n \left( \rho^{(n+1)} + \frac{\rho_n}{\theta_n} \theta^{(n+1)} \right) \approx c_s^2 \left( \rho^{(n+1)} + \frac{\hat{\rho}}{\hat{\theta}} \theta^{(n+1)} \right), \quad (20)$$

其中  $(c_s^2)_n = \gamma R_d T_n$ 。

### 4.3 扰动项量级随级次的变化

用  $\rho$  乘方程 (1), 得到

$$\dots \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + \rho^{(1)} g = \dots, \quad (21)$$

利用式 (9) 和方程 (10), 置  $n=1$ , 则方程 (21) 成为

$$\dots \frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} + \rho^{(2)} g = \dots, \quad (22)$$

易见,  $\partial p^{(2)}/\partial z$  和  $\rho^{(2)} g$  仍是方程 (22) 中仅有的最大项。于是根据推导结果 1 同样的理由, 我们可以推得:  $\partial p^{(2)}/\partial z$  和  $\rho^{(2)} g$  量级相等, 符号相反的结论。于是, 我们可以构造 2 级扰动平衡方程

$$\frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial z} = -\bar{\rho}^{(2)} g, \quad (23)$$

而

$$\rho^{(2)} g = (\rho^{(1)} - \bar{\rho}^{(1)}) g <_{\text{M}} \rho^{(1)} g, \quad (24)$$

故

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} \sim \rho^{(2)} g <_{\text{M}} \rho^{(1)} g \sim \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}. \quad (25)$$

这里  $<_{\text{M}}$  表示量级小于;  $\sim$  表示量级相等。这样一步一步地推下去, 当  $n > 2$  时, 如扰动方程是

$$\dots \frac{\partial p^{(n)}}{\partial z} + \rho^{(n)} g = \dots, \quad (26)$$

则只要  $\rho^{(n)} g >_{\text{M}} \rho^{(n-1)} g$  和  $\partial p^{(n)}/\partial z$  都是方程中仅有的最大项。于是结果 1 可以推广为:

**结果 2**  $\partial p^{(n)}/\partial z$  和  $\rho^{(n)} g$  量级相等, 符号相反。

于是, 利用推导不等式 (24) 和 (25) 同样的方法, 可以得到

$$\rho^{(n)} g <_{\text{M}} \rho^{(n-1)} g, \quad (27)$$

且

$$\frac{\partial p^{(n)}}{\partial z} <_{\text{M}} \frac{\partial p^{(n-1)}}{\partial z}. \quad (28)$$

式 (27)、(28) 说明: 随着  $n$  的增加, 扰动项量级随着级次的增加而减小。但是, 扰动方程中当原方程 (1) 中的次大项  $\bar{f}u$  成为  $n$  级扰动方程的最大项时, 方程中的最大项可能不只 2 项, 而是 3 项, 这时结果 2 不一定成立。为了方便, 不妨设结果 2 不一定成立的  $n$  是  $n_1$ 。

为了说明多级扰动法的作用, 我们利用扰动项量级随  $n$  减小的性质来估计  $E(\text{VPPGF})$ 。用  $n$  代替式 (6) 中的 1, 用 3.3 节中的理想场, 按式 (9)、(10)、(12)、(13) 和附录中解  $n$  级扰动平衡方程的方法, 仍取表 1 中的分辨率, 可以求出  $\overline{|E(\text{VPPGF})|}$ , 结果如图 2 所示。从图 2 可见,  $\overline{|E(\text{VPPGF})|}$  的量级随  $\Delta z$  的减小而减小, 也随  $n$  的增加而减小, 都可以使  $E(\text{VPPGF})$  对倾向的影响减小。容易看出: 不论取  $c_1 = 0.91$  或  $0.95$ , 当  $n=3$ ,  $\Delta z=200$  m 时,  $\overline{|E(\text{VPPGF})|}$  都小于  $10^{-5}$ ,  $\overline{|E(\text{VPPGF})|}$  对倾向的影响已不致歪曲或掩盖  $\bar{f}u$  和  $(u^2 + v^2)/a$  对倾向的贡献了。

### 4.4 扰动项量级减小和垂直分辨率的关系

如果  $n$  增加 1, 扰动项减小一个量级, 则扰动项  $\rho^{(1)} g/\rho$  减小到和  $\bar{f}u$  的量级相等时,  $n=n_1$ , 这时 VPPGF 减小了 3 个量级。按式 (7) 用 2 阶中心差

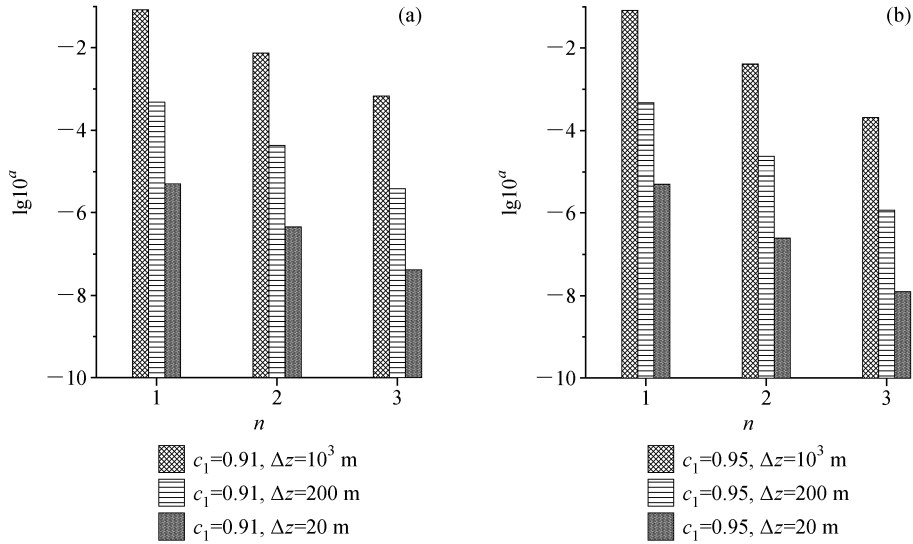


图 2  $|E(VPPGF)|$  的计算结果。纵坐标是  $\lg |E(VPPGF)|$  (以  $10^a$  表示)

Fig. 2 Results of  $|E(VPPGF)|$ . The ordinate represents  $\lg |E(VPPGF)|$  (shown as  $10^a$ )

应取的  $\Delta z$  如表 2 所示。如果认为  $\Delta z$  大于 100 m 为可用, 则从表 2 可见, 除  $L=10^6$  m 的运动外, 对于  $L=10^5$  m 和  $L=10^4$  m 的运动,  $\Delta z$  可用。

表 2 VPPGF 和 BOUY 减小 3 个量级后应取的  $\Delta z$

Table 2  $\Delta z$  after both VPPGF and BOUY having decreased by 3 orders of magnitude

$L/m$	$(A_z - B_1)_M$	$\Delta z$
$10^6$	5	25
$10^5$	3	245
$10^4$	2	775

至于  $L=10^6$  m 的运动, 如我们只要求  $E(VPPGF)$  的量级小于曲率项, 则 VPPGF 和 BOUY 只减小 2 个量级,  $(A_z - B_1)_M$  为 3, 按式 (7),  $\Delta z = 245$  m, 也是可用的。

## 5 多级扰动的性质

### 5.1 2 个关于 $\Delta (= \partial p^{(1)} / \partial z + \rho^{(1)} g)$ 的结果

结果 3 利用式 (9) 和方程 (10) 有

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + \rho^{(1)} g = \frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} + \rho^{(2)} g = \dots = \frac{\partial p^{(n_1-1)}}{\partial z} + \rho^{(n_1-1)} g = \Delta, \quad n = 1, 2, \dots, n_1 - 1 \quad (29)$$

上式说明: 在应用多级扰动法时, 尽管  $n$  可以变化, 但与对流活动密切相关的  $\Delta$  不随  $n$  而变, 垂直扰动运动方程中其他项也不随之而变, 故  $n$  的变化

不改变方程的性质。

结果 4 设有满足静力方程的变量  $p_1, \rho_1$  和  $p_2, \rho_2$ , 则它们的差  $p' (= p_1 - p_2)$  和  $\rho' (= \rho_1 - \rho_2)$  必满足式

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0, \quad (30)$$

易见, 如  $p_2, \rho_2$  为只随  $z$  而变的静止大气基本态变量, 则有

$$\Delta = 0. \quad (31)$$

## 5.2 静力扰动

### 5.2.1 静力扰动的性质

显然扰动平衡方程中的气压扰动  $\bar{p}^{(n)}$  是静力扰动。以  $n$  级扰动平衡方程

$$\frac{\partial \bar{p}^{(n)}}{\partial z} + \bar{\rho}^{(n)} g = 0 \quad (32)$$

为例, 易见, 在  $\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{p}^{(n)} = 0$  的条件下 (证明见 5.3 节), 可以得到

$$\bar{p}^{(n)} = \int_z^\infty \bar{\rho}^{(n)} g dz' \approx \sum_{j=k}^J \text{SGN} \bar{\rho}_j^{(n)} \times g \Delta z', \quad (33)$$

其中,  $J$  表示一个很高的气层。

$$\text{SGN} \bar{\rho}_j^{(n)} = \begin{cases} |\bar{\rho}_j^{(n)}|, & \bar{\rho}_j^{(n)} > 0 \\ 0, & \bar{\rho}_j^{(n)} = 0 \\ -|\bar{\rho}_j^{(n)}|, & \bar{\rho}_j^{(n)} < 0 \end{cases}$$

可见,  $\bar{p}^{(n)}$  表示以  $|\bar{\rho}^{(n)}|$  为密度的静止大气单位截面, 从高度  $z$  到  $\infty$  的空气柱的正 (负) 重量扰动, 即正 (负) 静力气压扰动。故  $\bar{p}^{(n)}$  是静力扰动。易

见, 这个结果可以推广为: 方程  $\frac{\partial p^{(n)}}{\partial z} + \rho^{(n)} g = 0$  的解  $p^{(n)}$  也是静力扰动。

### 5.2.2 多级扰动静力扣除法

多级扰动法实质上是多次利用扰动平衡方程的解, 从  $p^{(n)}$  中扣除其所含大小与  $\bar{p}^{(n)}$  相同的静力扰动部分, 使  $p^{(n)}$  量级减小, 达到  $\partial p^{(n)}/\partial z$  与其它项量级接近的一种方法。这种方法也可以称作“多级扰动静力扣除法”。

### 5.2.3 修正的大气基本态变量

从大气总的来看, 因为  $\rho = \rho_n + \rho^{(n+1)}$ ,  $p = p_n + p^{(n+1)}$ , 易证  $\partial p_n/\partial z = -\rho_n g$ , 故  $\rho_n$ 、 $p_n$  各可代替  $\hat{\rho}$  和  $\hat{p}$  作为大气修正的基本态变量,  $\rho^{(n+1)}$  和  $p^{(n+1)}$  各代替  $\rho^{(1)}$  和  $p^{(1)}$  作为  $\rho$ 、 $p$  和  $\rho_n$  和  $p_n$  之间的扰动。这种基本态变量虽然不一定是  $z$  的函数而是时间和空间的函数, 但因  $\rho^{(n+1)} = (1 - c_1)^n \rho^{(1)}$ ,  $p^{(n+1)} = (1 - c_1)^n p^{(1)}$  使  $\rho^{(n+1)} \ll \rho^{(1)}$ ,  $p^{(n+1)} \ll p^{(1)}$ , 当  $n \geq 1$  时, 这种代替使  $\rho_n$ 、 $p_n$  大气垂直廓线和  $\rho$ 、 $p$  大气垂直廓线或实际大气垂直廓线达到很接近的程度; 而且, 每次修正都是通过静力平衡达到的, 可以认为: 模式大气的绝大部分已不含有垂直声波。不过, 由于  $(u^2 + v^2)/a$ ,  $\bar{f}u$  和  $dw/dt$  的存在, 它们还会引起非静力扰动, 从而, 使这种作用降低。不过, 非静力扰动一般远比静力扰动为小, 其所起的作用一般不太明显。只是, 这时仍存在水平声波, 考虑计算稳定性问题, 应当把它作为主要的抑制对象。下面我们用一个例子来说明。

### 5.2.4 实例计算

为了说明修正的大气基本态变量垂直廓线和实际大气变量垂直廓线当  $n \geq 1$  时相接近的程度, 我们把 NCEP 的 2003 年 7 月 31 日 1800 UTC 在  $(30^\circ\text{N}, 120^\circ\text{E})$  从 1000 hPa ~ 10 hPa 的等压面温度资料, 通过线性插值转换为  $z$  坐标的以 200 m 为  $\Delta z$  的格点值  $T$ ,  $p$  按 Lorentz 网格依次放置在整数层和半数层上。还采用 3.3 节用理想场计算的  $z$  坐标格点的  $\hat{\rho}$  和  $\hat{p}$ , 用前面的方法算出  $\rho_n$  和  $p_n$ , 从而算出  $\rho - \rho_n$  和  $p - p_n$ 。但这时除  $\rho - \rho_n$  是迅速随  $n$  减小外,  $p - p_n$  从  $n=0$  到 1 减小得很快, 而从  $n=1$  到 3 则随  $n$  有所增加, 增加值占从  $n=0$  到 1 减小值的 15.8% (图略)。其所以如此, 显然和计算中求  $z$  坐标  $p$ 、 $\rho$  值时采用的线性插值有关, 因为这种插值不一定满足静力平衡条件, 即使用原 NCEP 温度

资料得出的  $\rho$ 、 $p$  格点值满足该条件。由于这样, 我们不能用公式  $p^{(n)} = (1 - c_1)^{n-1} p^{(1)}$  来估计  $p - p_n$ , 而只能用 4.1 节中  $p_n$  的表示式计算, 这样, 在  $p - p_n$  中不仅含有插值误差, 还含有因计算  $\bar{p}^{(1)}$  等引入的数值积分的误差, 这比  $\rho - \rho_n$  中所含的误差还多。为了这个缘故, 我们改变了计算方案: 只对  $\rho$  插值, 而  $p$  则用静力方程求出, 并令其他方法不变,  $\hat{\rho}$  和  $\hat{p}$  也不变。这样得到的  $\rho - \rho_n$  和  $p - p_n$  的结果各表示在图 3 和图 4 中。从这两幅图中可以看出:  $\rho - \rho_n$  和  $p - p_n$  都随  $n$  减小, 只是当  $n$  从 0 到 1 时减小得很快, 而 1 到 3 时, 减小的幅度较小罢了。这说明: 修正的大气基本态变量垂直廓线和实际大气变量垂直廓线是随  $n$  的增加而接近的。注意: 为了使单位协调,  $\rho$  采用  $\text{hPa} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $p$  采用 hPa (Stull, 1988)。

### 5.2.5 非静力扰动

凡形式上不满足形如方程 (32) 的扰动都是非静力扰动。如

$$p^{(n)} \neq \int_z^\infty \rho^{(n)} g dz'. \quad (34)$$

为了方便, 我们不妨把式 (32) 改写成

$$\frac{\partial p^{(n)}}{\partial z} + \rho^{(n)} g = S^{(n)}, \quad (35)$$

并令  $p^{(n)} = p_{\text{H}}^{(n)} + p_{\text{N}}^{(n)}$ , 其中下标 H, N 各表示静力变量和非静力变量;  $S^{(n)}$  是  $z$  的函数; 且

$$\frac{\partial p_{\text{H}}^{(n)}}{\partial z} + \rho^{(n)} g = 0. \quad (36)$$

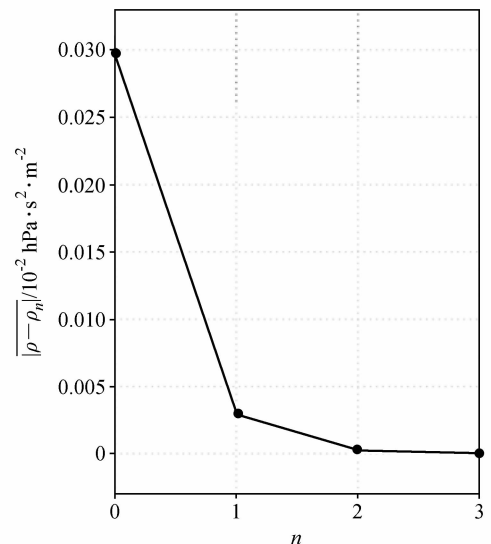


图 3  $|\rho - \rho_n|$  随  $n$  的变化

Fig. 3 Variation of  $|\rho - \rho_n|$  with  $n$



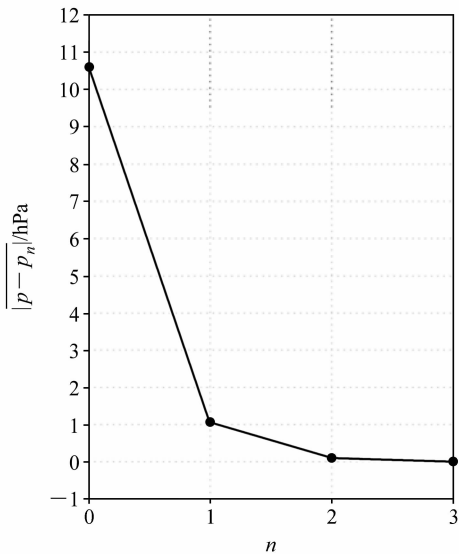


图 4  $|p - p_n|$  随  $n$  的变化

Fig. 4 Variation of  $|p - p_n|$  with  $n$

把方程 (36) 代入方程 (35), 则

$$\frac{\partial p_N^{(n)}}{\partial z} = S^{(n)}, \quad (37)$$

设  $\lim_{z \rightarrow \infty} p_N^{(n)} = 0$ , 则

$$p_N^{(n)} = - \int_z^{\infty} S^{(n)} dz'. \quad (38)$$

这是  $S^{(n)}$  引起的非静力扰动, 它是对流发展的重要因素。

### 5.3 扰动在 $\infty$ 高处的极限

设  $p, \hat{p}$  和  $\rho, \hat{\rho}$  均各满足 5.1 节中结果 4 和  $\Delta=0$  的条件, 则可以推出如下结果。

**结果 5**  $\bar{p}_\infty^{(n)} = p_\infty^{(n)} = 0$ 。其中  $\bar{p}_\infty^{(n)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{p}^{(n)}$ ;  $p_\infty^{(n)} = \lim_{z \rightarrow \infty} p^{(n)}$ 。证明如下。先证  $n=1$  的情形。这时

$$p = p_s \exp \left\{ - \int_0^z \frac{g}{R_d T} dz' \right\} = p_s \exp \left\{ - \frac{g}{R_d} \left( \frac{1}{T(\xi)} \right) z \right\}, \quad 0 < \xi < z$$

由于在大气中  $1/T(\xi)$  有界, 且总大于零, 故

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p = 0, \quad (39)$$

同理

$$\hat{p} = \hat{p}_s \exp \left\{ - \frac{g}{R_d} \left( \frac{1}{T(\mu)} \right) z \right\}, \quad 0 < \mu < z$$

且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{p} = 0, \quad (40)$$

故

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p^{(1)} = p_\infty^{(1)} = 0. \quad (41)$$

因

$$\frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial z} = -\bar{\rho}^{(1)} g = c_1 \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}, \quad (42)$$

故式

$$\bar{p}^{(1)} = c_1 p^{(1)}, \quad (43)$$

且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{p}^{(1)} = \bar{p}_\infty^{(1)} = c_1 p_\infty^{(1)} = 0, \quad (44)$$

故式 (43) 在区间  $[0, \infty)$  成立。至于  $p^{(2)}, \bar{p}^{(2)}$ , 因  $p^{(2)} = p^{(1)} - \bar{p}^{(1)}$ , 故

$$p_\infty^{(2)} = 0. \quad (45)$$

又因

$$\frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial z} = -\bar{\rho}^{(2)} g = c_1 \frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}, \quad (46)$$

故用和前面同样的方法可以证式  $\bar{p}^{(2)} = c_1 p^{(2)}$  在区间  $[0, \infty)$  成立。如此继续可证

$$\bar{p}^{(n)} = c_1 p^{(n)} \quad (47)$$

和

$$p_\infty^{(n)} = \bar{p}_\infty^{(n)} = 0. \quad (48)$$

**结果 6**  $\bar{p}_t^{(n)} = (1 - c_1)^{n-1} \bar{p}_t^{(1)}$ 。证明如下。对方程 (42) 作从  $z_t$  到  $\infty$  处的积分, 利用式 (44), 有

$$\bar{p}_t^{(1)} = \int_{z_t}^{\infty} \bar{\rho}^{(1)} g dz. \quad (49)$$

又因从  $n$  级扰动平衡方程

$$\frac{\partial \bar{p}^{(n)}}{\partial z} = -\bar{\rho}^{(n)} g \quad (50)$$

和式 (48), 有

$$\begin{aligned} \bar{p}_t^{(n)} &= \int_{z_t}^{\infty} \bar{\rho}^{(n)} g dz = (1 - c_1)^{n-1} \int_{z_t}^{\infty} \bar{\rho}^{(1)} g dz \\ &= (1 - c_1)^{n-1} \bar{p}_t^{(1)}. \end{aligned} \quad (51)$$

注意计算  $p_t^{(1)}$  和  $\bar{p}_t^{(n)}$  时须化为数值积分的形式, 且积分上限还须用有限高度代替。

## 6 结论

从前面的讨论, 可以得出以下初步结论:

(1) 用多级扰动法可以使大气垂直扰动运动方程中量级最大的垂直扰动气压梯度力项和浮力项的量级随级次减小, 使方程中最大的截断误差对倾向的影响不致歪曲或掩盖较小的垂直科氏力项和曲率项对倾向的贡献, 从而使倾向计算合理, 可以避免  $\omega$  出现异常增大的现象; 而具有持续作用的垂直科氏力项和曲率项的作用也可以得到充分发挥, 有利于制作较长时期的天气预报。

(2) 扰动平衡方程的解表示静力扰动。多级扰动法实质上是多次利用不同级次的静力扰动扣除原扰动中和  $\bar{p}^{(n)}$  大小相同的静力部分, 达到扰动方程中各项量级接近的一种方法。而且, 从大气总的情况来看, 经过这法不多几次修正, 大气基本态  $\rho_n$ ,  $p_n$  垂直廓线的绝大部分和实际大气  $\rho$ ,  $p$  垂直廓线已很接近, 可以认为, 通过静力平衡, 模式大气基本上已不含有垂直声波; 抑制快波使计算稳定的主要对象应是水平声波。

(3) 可以证明: 在应用多级扰动法时, 尽管级次  $n$  可以变化, 但与对流活动密切有关的  $\Delta (= \partial p^{(n)} / \partial z + \rho^{(n)} g)$  却不随  $n$  而变, 因各级扰动垂直运动方程中其他项均不随  $n$  而变, 故  $n$  的变化不改变原扰动方程的性质。

## 附录

### 1 $n$ 级扰动平衡方程的数值解

$n$  级扰动平衡方程可以写成

$$\frac{\partial \bar{p}^{(n)}}{\partial z} = -\bar{\rho}^{(n)} g, \quad n = 1, 2, \dots, n_1 - 1. \quad (\text{A1})$$

对方程 (A1) 作从  $z=0$  到  $z_t$  的积分, 采用 Lorentz 网格, 可以得到

$$\bar{p}_s^{(n)} = \bar{p}_t^{(n)} + \int_0^{z_t} \bar{\rho}^{(n)} g dz \approx \bar{p}_t^{(n)} + \sum_{k=1}^K \bar{\rho}_k^{(n)} g \Delta z. \quad (\text{A2})$$

再作从  $z=z_{k-1/2}$  到  $z_t$  的积分, 可以得到

$$\bar{p}_{k-1/2}^{(n)} = \bar{p}_t^{(n)} + \sum_{m=k}^K \bar{\rho}_m^{(n)} g \Delta z, \quad (\text{A3})$$

于是, 可取

$$\bar{p}_k^{(n)} = \frac{1}{2} (\bar{p}_{k+1/2}^{(n)} + \bar{p}_{k-1/2}^{(n)}). \quad (\text{A4})$$

从式 (13) 和式 (51) 有

$$\bar{p}_s^{(n)} = (1 - c_1)^{n-1} \bar{p}_s^{(1)} \quad (\text{A5})$$

和

$$\bar{p}_k^{(n)} = (1 - c_1)^{n-1} \bar{p}_k^{(1)}. \quad (\text{A6})$$

## 2 高级扰动的构造

(1)  $\Delta=0$  的情形。根据式 (47), 从式 (A5) 和 (A6) 可以得到

$$p_s^{(n)} = (1 - c_1)^{n-1} p_s^{(1)} \quad (\text{A7})$$

和

$$p_k^{(n)} = (1 - c_1)^{n-1} p_k^{(1)}. \quad (\text{A8})$$

至于  $\rho_k^{(n)}$ ,  $\rho_s^{(n)}$  和  $\theta_k^{(n)}$ ,  $\theta_s^{(n)}$  等, 则可以从式 (13) 和 4.2 节中有关公式推出。下同。

(2)  $\Delta \neq 0$  的情形。这时从式 (9) 有

$$p_k^{(n)} = p_k^{(1)} - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{p}_k^{(j)} = p_k^{(1)} - \sum_{j=1}^{n-1} (1 - c_1)^{j-1} \bar{p}_k^{(1)}, \quad (\text{A9})$$

$$p_s^{(n)} = p_s^{(1)} - \sum_{j=1}^{n-1} (1 - c_1)^{j-1} \bar{p}_s^{(1)}. \quad (\text{A10})$$

## 3 缩写词的全称

缩写词的全称如表 A1 所示。

表 A1 缩写词的全称

Table A1 Full name of abbreviation

缩写词	全称
UKNC	United Kingdom Numerical Weather Prediction and Climate model
GEM	The Operational CMC-MRB* Global Environmental Multiscale (GEM) model
GREAPES	Global-Regional Assimilation and Prediction system
WRF	Weather Research and Forecasting modeling system
UCLA	UCLA** Atmospheric General Circulation mode

注: \* CMC-MRB 指 Canadian Meteorological Center-Meteorological Research Branch; \*\* UCLA 指 University of California at Los Angeles.

## 参考文献 (References)

- Arakawa A. 1966. Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion [J]. *J. Comput. Phys.*, 1 (1): 119-143.
- Arakawa A, Lamb V R. 1997. Computational design of the basic dynamical processes of UCLA general circulation model [M] // *Methods in Computational Physics*. New York: Academic Press, 174-264.
- Arakawa A, Suarez M J. 1983. Vertical differencing of the primitive equations in sigma coordinates [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 111 (1): 34-45.
- Bubnová R, Hello G, Bénard P, et al. 1995. Integration of the fully elastic equations cast in the hydrostatic pressure terrain-following coordinate in the frame work of the ARPEGR/Aladin NWP system [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 123 (2): 515-535.
- Côté, Jean, Gravel S, Méthot A, et al. 1998. The operational CMC-MRB Global Environmental Multiscale (GEM) model. Part I: design considerations and formulation [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 126 (6): 1373-1395.
- Cullen M J P, Davies T, Mawson M H, et al. 1997. An overview of

- numerical methods for the next generation UK NWP and climate model [J]. The A. J. Robert Memorial Volume, Canadian Meteorological and Oceanographic Society, 35: 425–444.
- Dudhia J. 1993. A nonhydrostatic version of the Penn State-NCAR mesoscale model; Validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 121 (5): 1493–1513.
- Dudhia J. 1995. Reply to Comments on “A nonhydrostatic version of the Penn State/NCAR mesoscale model; Validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front” by J. Steppeler [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 123 (8): 2573–2575.
- 冯康, 等. 1978. 数值计算方法 [M]. 北京: 科学出版社, 22–23.
- Feng Kang, et al. 1978. Computational Methods [M] (in Chinese). Beijing: Science Press, 22–23.
- Gallus W A Jr, Rančić M. 1996. A non-hydrostatic version of the NMC's regional Eta model [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 122 (531): 495–513.
- 季仲贞, 王斌, 曾庆存. 1995. 完全能量守恒差分法及其应用 [M] // 数值天气预报的若干新技术. 北京: 气象出版社, 26–46.
- Ji Zhongzhen, Wang Bin, Zeng Qingcun, et al. 1995. Complete energy conservative finite difference method and its application [M] // Several New Techniques Concerning NWP (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 26–46.
- 廖洞贤, 孙岚. 2002. 关于尺度分析中的三个问题和尺度分析 [J]. *南京气象学院学报*, 25 (4): 445–454.
- Liao Dongxian, Sun Lan. 2002. Scale analysis and its three problems [J]. *Journal of Nanjing Institute of Meteorology* (in Chinese), 25 (4): 445–454.
- 廖洞贤, 孙岚. 2003. 中尺度非静力模式中常用气压分离技术的研究 [J]. *大气科学*, 27 (2): 203–211.
- Liao Dongxian, Sun Lan. 2003. A study concerning the pressure separation technique used for current nonhydrostatic mesoscale models [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 27 (2): 203–211.
- 廖洞贤. 2004. 完全弹性非静力模式 (动力部分) 的发展 [C] // 中国气象学会编. 推进气象科技创新加快气象事业发展 (上册). 北京: 气象出版社, 203–210.
- Liao Dongxian. 2004. Development of the complete compressible nonhydrostatic model (dynamic frame) [M] // Chinese Meteorological Society. Pushing the Scientific and Technical Innovation Forward and Speeding up the Development of Meteorological Cause (Vol. 1) (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 203–210.
- 廖洞贤. 2008. 数值天气预报中“大量级差问题”和解决问题的可能途径 [M] // 模式设计、数值试验、数值模拟和有关的研究. 北京: 气象出版社, 111–119.
- Liao Dongxian. 2008. A problem of large magnitude difference occurring in numerical weather prediction equations and possible way for solving it [M] // Model Design, Numerical Experiment, Numerical Simulation and Related Studies (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 111–119.
- 刘式适, 刘适达. 1991. 大气动力学 (上册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 169–185.
- Liu Shikuo, Liu Shida. 1991. Dynamic Meteorology (Vol. 1) (in Chinese) [M]. Beijing: Peking University Press, 169–185.
- Satoh M. 2002. Conservative scheme for the compressible nonhydrostatic models with the horizontally explicit and vertically implicit time integration scheme [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 130 (5): 1227–1245.
- Skamarock W C, Klemp J B, Dudhia J, et al. 2005. A description of the advanced research WRF version 2 [R]. NCAR Tech. Note, NCAR/TN-468+STR, 31.
- Steppeler J, Hess R, Schättler U, et al. 2003. Review of numerical methods for nonhydrostatic weather prediction models [J]. *Meteor. Atmos. Phys.*, 82: 287–301.
- Steppeler J. 1995. Comments on “A nonhydrostatic version of the Penn State/NCAR mesoscale model; Validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front” [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 123 (8): 2572.
- Stull R B. 1988. An Introduction to Boundary Layer Meteorology [M]. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers Group, 669pp.
- Tapp M C, White P M. 1976. A non-hydrostatic mesoscale model [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 102 (432): 277–296.
- Taylor K E. 1984. A vertical finite-difference scheme for hydrostatic and nonhydrostatic equations [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 112 (7): 1398–1402.
- 薛纪善, 陈德辉, 等. 2008. 数值预报系统 GRAPES 的科学设计与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 175–176.
- Xue Jishan, Chen Dehui, et al. 2008. The Scientific Design of GRAPES and Its Applications [M] (in Chinese). Beijing: Science Press, 175–176.
- Xue M, Droegemeier K K, Wong V. 2000. The advanced regional prediction system (ARPS)—A multi-scale nonhydrostatic atmospheric simulation and prediction model. Part I: Model dynamics and verification [J]. *Meteor. Atmos. Phys.*, 75: 161–193.
- 叶笃正, 李崇银, 王必魁. 1988. 动力气象学 [M]. 北京: 科学出版社, 82–92.
- Ye Duzheng, Li Chongyin, Wang Bikui. 1988. Dynamic Meteorology [M] (in Chinese). Beijing: Science Press, 82–92.
- Yeh K S, Côté J, Gravel S, et al. 2002. The CMC-MRB Global Environmental Multiscale (GEM) model. Part III: Nonhydrostatic formulation [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 130 (2): 339–356.
- 曾庆存, 张学洪. 1987. 球面上斜压原始方程组保持总有效能量守恒的差分格式 [J]. *大气科学*, 11 (2): 113–127.
- Zeng Qingcun, Zhang Xuehong. 1987. Available energy conserving schemes for spherical baroclinic primitive equations [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* (in Chinese), 11 (2): 113–127.
- 张可苏, 周晓平. 1980. 非静力平衡模式中重力惯性波的传播、结构和传播特征 [C] // 中央气象局气象科学研究所编. 第 2 次全国数值预报会议论文集 (1977 年 12 月 22–28 日, 北京). 北京: 科学出版社, 196–206.
- Zhang Kesu, Zhou Xiaoping. 1980. The features of frequency spectrum, structure and propagation of

- gravitational-inertia waves in nonhydrostatic model [C] // The Collected Papers of 2nd Conference of NWP (Dec. 22-28, 1977) (in Chinese). Beijing: Science Press, 196-206.
- 朱禾, 孙岚, 廖洞贤. 2007. 大气数值模式空间分辨率的确定方法 [J]. 大气科学, 31 (3): 410-417. Zhu He, Sun Lan, Liao Dongxian. 2007. Determination of the spatial resolution required by the atmospheric numerical model [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 31 (3): 410-417.
- 左瑞亭, 张铭, 张东凌 等. 2004. 21 层大气环流模式 IAP AGCM-III 的设计及气候数值模拟 I. 动力框架 [J]. 大气科学, 28 (5): 659-674. Zuo Ruiting, Zhang Ming, Zhang Dongling, et al. 2004. Designing and climatic numerical modeling of 21-level AGCM (IAP AGCM-III) Part I. Dynamical framework [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 28 (5): 659-674.