垂直运动研究进展及新型垂直运动方程*

高守亭[1,2,3] 周玉淑[1,2,8] 张万诚[4] 张哲[5] 周冠博[6] 李驰钦[7] 曾勇[8]

1 中国科学院大气物理研究所云降水物理与强风暴重点实验室，北京 100029

2 中国科学院大学，北京 100049

3 贵州省山地气候与资源实验室，贵阳 550002

4 云南省气象科学研究所，昆明 650034

5 中国科学院地理科学与资源研究所，北京 100101

6 国家气象中心，北京 100081

7 江苏省气象台，南京 21000

8. 中国气象局乌鲁木齐沙漠气象研究所，乌鲁木齐 830002

摘要：垂直运动在天气系统（尤其是中小尺度系统）发生发展过程中有极其重要的作用，本文回顾并小结了大气垂直运动方程的研究进展。在质量守恒前提下，垂直运动可由连续方程积分计算得到，这个算法需要准确计算散度，不容易实现。基于大气绝热假设的绝热法，由于与实际天气过程热力变化有较大差别，计算的垂直运动也不准确。垂直运动的诊断与天气系统尺度有关。大尺度系统以涡旋运动为主，满足准水平，不必要过多考虑浮力和风切作用。因此，出现了准地转条件的垂直运动方程，且在大尺度运动中应用较好。中尺度系统运动中，辐合辐散运动与旋转运动同等重要，垂直运动不能忽略，垂直运动方程在形式上要复杂一些，但其强迫项仍是由涵差的涡度平流及温度平流的拉普拉斯所构成，本质与大尺度系统中的ω方程没有太大差别。小尺度强风暴运动以辐合辐散为主，浮力及风切起着主导作用，其垂直运动方程要复杂得多。但是，由于任何小尺度强对流系统都是在大中尺度背景下发生的，所以背景场强迫的垂直运动仍然存在，完整的垂直运动应考虑不同天气尺度系统调整产生的垂直速度，应联立垂直运动方程组进行计算。本文提出的多效应的新型垂直运动方程，可以较为准确地实现强对流运动中的垂直速度的诊断。

关键词：天气系统，垂直运动，研究进展，新型垂直运动

* 资助项目：国家重点研发计划项目 2018YFC1507104，国家自然科学基金 41875056，42175012，42075013；吉林省科技发展计划项目 20180201035SF；新疆维吾尔自治区引进高层次人才天池计划项目（2019）

Funded by: National Key Research and Development Program (Grant 2018YFC1507104),National Natural Science Foundation of China (Grant 41875056,42075013); Science and Technology Project of Jilin Province(Grant 20180201035SF), Special Fund Project of Urumqi Institute of Desert Meteorology (Grant IDM2019007), Xinjiang Uygur Autonomous Region Tianchi Project for Introducing High-level Talents (2019)

Research progress of vertical motion and new vertical motion equation

Gao Shoutig[1,2,3], Zhou Yushu[1,2,8], Zhang Wancheng[4], Zhang Zhe[5], Zhou Guanbo[6], Li Chiqin[7], Zeng yong[8]

1 Key Laboratory of Cloud–Precipitation Physics and Severe Storms, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

3 Mountain Climate and Resources Laboratory of Guizhou Province，Guiyang 550002

4 Yunnan Research Institute of Meteorology, Kunming 650034

5 Institute of Gographic Sciences and Natural Resources Research，Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101

6 National Meteorology Center， Beijing 100081

7 Jiangsu Meteorological Observatory, Nanjing 210008

8 Institute of Desert Meteorology, China Meteorological Administration, Urumqi 830002

Abatract: This article reviews and summarizes the research progress of atmospheric equation of vertical motion, as it plays a vital role in the occurrence and development of weather systems (especially of the small and medium-scale systems). Conservation of mass, the vertical motion can be calculated by the integration of continuity equation, but this algorithm requires accurate calculation of divergence, which is difficult to implement. The adiabatic method to calculate vertical motion is not accurate either because the based assumption of adiabatic internal changes in atmosphere does not agree to the thermal variations in real atmosphere. The diagnosis of vertical motion is related to the atmospheric scales, while the large-scale system is dominated by vortex motion and meets the quasi-horizontal motion, not to mention the little consideration of buoyancy as well as wind shear effect. For that reason, the vertical motion equation which takes account of the first law of thermodynamics, the atmospheric state equation, hydrostatic equilibrium and quasi-geostrophic condition is preferably applied in large-scale motion.

The equation of vertical motion is more complicated in a meso-scale system due to the equally importance between the convergent or divergent motion as well as the rotational motion. Likewise, the vertical motion cannot be ignored. But the forcing term is still composed by the vorticity advection variation with height and the Laplace of temperature advection, thus it essentially has little distinction with the ω equation in a

large-scale system. Convergent and divergent motion are predominant in a strong small-scale storm motion, with the buoyancy and wind shear playing the leading role, and the equation of vertical motion is much more complicated. However, the vertical motion forced by the background field still exists since none of the strong small-scale convective systems can occur in its isolation from the large or medium-scale background field. Thus the complete vertical motion should consider the vertical velocity generated by the adjustment of weather systems with different scales, namely, the combination of the vertical motion equations should be conducted for the calculation. The new equation of vertical motion with multiple effects can make the diagnostic analysis on the vertical velocity more precise in a strong convective system with small scale.

Key Words：Synoptic system，Vertical motion，Research progress，New vertical motion equation

前言

大气运动方程中有一个难以直接测量的量，就是大气的垂直运动。与水平风速直接可以测量不同，垂直风速至今没有好的仪器可以直接测量而得到，都是用不同的诊断手段来计算获得。由于诊断方程是在不同条件下获得的，所以不同诊断方程计算出来的垂直运动的值并不完全相同，难以确信哪个诊断结果是正确的。大气中的垂直运动十分重要，是引起大气变化的最重要因素之一。在大尺度运动中，它可以调节准地转平衡，调节湿度场与温度场之间的配合。在中尺度运动中，它可把水汽输送到高层，在不同层次上使水汽发生相态变化而成云致雨。在小尺度运动中，它可以维持小尺度系统运动的生命史，使旋转系统得以继续维持或使重力波系统得以传播。所以，要发展一个较为全面而准确的垂直运动的诊断方程尤为重要。为此，本文通过梳理垂直运动方程的研究进展，可使我们更清楚地认识垂直运动计算与诊断的研究过程所存在的进步与不足，为推导更为客观全面的垂直运动方程提供新的方法和思路。

因为垂直运动在天气变化中有着重要的作用，所以它的计算与诊断很早就受到重视与关注。早在上世纪 50 年代就有科学家从事垂直运动观测及诊断研究。Panofsky（1951）探讨了大尺度垂直运动的诊断；Miller et al.（1953）研究了大

尺度垂直运动和天气变化的关系。Battan（1964）和 O’Neill (1966）研究了了垂直运动与降水的关系；Lsteef（1967）则是给出了对流层内垂直运动与涡度及散度的关系；Bullock et al.（1969）研究了大气能量场中垂直运动的重要作用，Trenberth（1978）讨论了诊断型准地转 ω 方程的解释，认为对流层中部的上升运动产生与热成风引起的涡度平流发生气旋性旋转有关；O’ Brien（1970）进行了垂直运动的求解，Smith （1971）通过运动学方法计算垂直运动，还比较了由运动学方法计算的垂直运动与用 ω 方程诊断的垂直运动之间的差别（Smith and Lin，1978）；Dunn（1991）分析了垂直运动的演变特征；Durran（1987）开始探讨天气尺度的垂直运动在业务预报中的诊断应用；Holton（1979）给出准地转条件下垂直运动的诊断关系，Hoskins and Draghici（1977）及 Hoskins（1978）对垂直运动诊断方程还给出了新的表达方法；Hoskins（1977）指出了非地转的垂直运动强迫；Nieman（1990）进一步给出了非地转垂直运动的诊断关系；Pauley（1988）和 Pauley et al.（1992）在提出非地转垂直运动计算方法基础上，还进行了准地转垂直运动与非地转垂直运动之间的比较。Chew et al.（1985）研究了垂直运动与热成风平衡之间的关系；Barnes（1985）通过弱强迫对流探究了 ω 方程的诊断；Tintore（1990）从中尺度动力学角度讨论了垂直运动发展；Viudez and Tintore（1996）进一步讨论了广义 ω 方程的性质。后来， Mathur and Brill（1999）分析中尺度模式中倾斜垂直运动演变特征时指出，湿大气中对称不稳定能量释放会激发出强上升运动。赵瑞星和陶诗言（1990）在比较三种求解 ω 场的模式时也指出，在进行中尺度垂直运动诊断时，最好用中尺度的 ω 诊断方法而不是非线性和非绝热的 ω 诊断方法。所有这些研究都加深了对大气垂直运动的认识及其重要作用的理解。为清晰分析垂直运动研究的历史与现状做出了贡献，也为本文分析垂直垂直运动计算的发展及对不同尺度进行垂直运动诊断提供了明确线索。

本文结构安排如下：第一节为连续方程计算法垂直运动，第二节为绝热法，第三节为静力平衡条件下垂直运动计算，第四节为大尺度准地转条件下的垂直运动计算，第五节为中尺度系统中垂直运动的计算，第六节为小尺度强风暴中的垂直运动的诊断与计算，第七节为新型垂直运动诊断方程及联立方程组介绍，最后给出结论和讨论。

一、由连续方程计算垂直运动

气象分析惯用气压坐标系，在这个坐标系中，连续性方程变得简单（Dutton，1976），可写为

$$\nabla_H.\vec{V}+\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{p}}=0 \tag{1}$$

对连续性方程进行积分，则有

$$\omega(x,y,\mathrm{p})-\omega(x,y,\mathrm{p}^*)=-\int_{\mathrm{p}^*}^{\mathrm{p}}\nabla_H.\vec{V}d\mathrm{p}' \tag{2}$$

这里p^*是地表气压。$p^*=p_0(x,y)$，p'是积分哑变量，于是有

$$\omega(x,y,\mathrm{p})=\omega(x,y,p_0)+\int_{p}^{p_0}\nabla_H.\vec{V}d\mathrm{p}' \tag{3}$$

这种对垂直运动的计算一直被气象学者所使用。但因为

$$\omega(p_0)=\frac{dp}{dt}|_{z=0}=\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\mathrm{p}\right)=0 \tag{4}$$

如果没有坡度，地球表面的速度 u，v，w 一定是零。于是有

$$\omega(x,y,\mathrm{p})=\frac{\partial p}{\partial t}|_{z=0}+\int_{p}^{p_0}\nabla_H.\vec{V}d\mathrm{p}' \tag{5}$$

这种垂直运动的算法有一个明显的缺点在于，必须准确地计算水平散度，而从观测资料中准确计算水平散度极其困难，因为这种计算十分敏感于风速和风向的微小变化。如果地表不平坦，有山或斜坡，就更没法准确计算了。

二、垂直运动的绝热算法

通常，大尺度运动在大气内部认为是绝热的。这种前提又给垂直运动的计算提供了一种方法（Dutton,1976），即利用

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+\overrightarrow{V_H}\cdot\nabla_{h}\theta+w\frac{\partial\theta}{\partial z}=0 \tag{6}$$

由（6）式可得 w 为

$$w=-\frac{\frac{d\theta}{dt}-\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vec{V}_{h}\cdot\nabla_{h}\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial z}} \tag{7}$$

由于绝热假定，所以$\frac{d\theta}{\partial t}=0$，于是有

$$w_i=\frac{-\frac{\partial\theta}{\partial t}-\overrightarrow{V_H}\cdot\nabla_{h}\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial z}} \tag{8}$$

w_i代表绝热或者等熵条件下的垂直运动。

但完整的垂直运动应为

$$w = w_i + \frac{d\theta}{\partial t}\bigg/\frac{\partial\theta}{\partial z} += w_i + w_d \tag{9}$$

$w_d = \frac{d\theta}{\partial t}\bigg/\frac{\partial\theta}{\partial z}$，通常情况下是$w_d \ll w_i$，但在水汽凝结后，在风暴区及锋区也经常是非绝热的，在这些地区有着较大的热量交换，w_d不再是小量。绝热法对垂直运动的计算有较大误差。

以上两种对垂直运动的算法都是从单一方程出发并在一定假定条件下求得。通过连续性方程对垂直运动的算法是假定了质量守恒，这在干空气中是成立的，但在湿空气中由于水汽凝结产生云滴或雨滴，会由水滴的下落而引起质量的不守恒，使该算法在这些水汽凝结区出现明显偏差。同样，绝热算法用了绝热假定，在水汽凝结区热量交换较大的风暴区也不适用。在研究垂直运动计算的过程中，人们逐渐认识到垂直运动的计算具有复杂性。首先，在大气运动方程组里，垂直运动分别出现在不同方程里，比如大气动量方程中有垂直运动，连续性方程中有垂直运动，同时热力方程中也有垂直运动。从数学求解的角度看，既然三个方程中都有垂直运动，就应三个方程联立通过消元法或其他手段共同求出垂直运动，这样垂直运动才会满足三个方程，出现一致的协调性。用单一方程求解有明显缺陷。另一方面，学者们也逐渐认识到大气运动是有不同尺度运动的区分，有大尺度运动、中尺度及小尺度，甚至有微尺度运动。不同尺度下，大气方程组又具有不同的简化形式，从这个角度看不需要求得统一的垂直运动，而是针对不同运动尺度求解不同运动尺度下对应的垂直运动方程。正是有了这样的认识，Dutton（1976）首先在静力平衡假定条件下来求解垂直运动，他认为大中尺度运动都是满足静力平衡的，在静力平衡条件下求解垂直运动就会有广泛的适用性。

三、静力平衡条件下垂直运动计算

由热力学第一定律可知

$$c_v\frac{dT}{\partial t} + p\frac{d\alpha}{dt} = T\frac{ds}{dt} \tag{10}$$

利用状态方程$p = \rho RT$及静力平衡方程$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$，则(10)式可写为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \overrightarrow{V_H}\cdot\nabla p - w\rho g - \frac{C_P}{C_V}\frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{p}{C_V}\frac{ds}{dt} \tag{11}$$

再利用连续性方程$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\nabla\cdot\vec{V}=0$，(11)式变为

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial t}+\overrightarrow{V_H}\cdot\nabla \mathrm{p}-\mathrm{w\rho g}+\frac{C_P}{C_V}\mathrm{p}\left(\nabla_H\cdot\vec{V}+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)=\frac{p}{C_V}\frac{ds}{dt} \tag{12}$$

由静力平衡条件$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z}=-\mathrm{\rho g}$，则气压可以求得

$$\mathrm{p}=\int_z^{\infty}\mathrm{\rho g dz} \tag{13}$$

这里认为在大气层顶气压为零。

对（13）式进行时间微分得

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial t}=\int_z^{\infty}\mathrm{g}\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{dz}=-\int_z^{\infty}\mathrm{g}(\nabla.\rho\vec{V})\mathrm{dz}=-\int_z^{\infty}\mathrm{g}(\nabla_H.\rho\vec{V})\mathrm{dz}+\mathrm{g\rho W} \tag{14}$$

在大气层顶，有条件 $\rho\mathrm{W}=0$，于是方程（12）可写为

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}=-\nabla_H.\vec{V}+\frac{C_v}{C_p}\frac{1}{p}\left(\int_z^{\infty}g\nabla_H\cdot\rho\vec{V}\,dz'-\overrightarrow{V_H}\cdot\nabla p+\frac{p}{C_V}\frac{ds}{dt}\right) \tag{15}$$

如果认定在下边界$w_{z=0}=0$,则(15)可写为

$$\mathrm{w}=\int_0^z\left[-\nabla_H.\vec{V}+\frac{C_v}{C_\mathrm{p}}\frac{1}{p}\left(\int_{z'}^{\infty}g\nabla\cdot\rho\vec{V}\,dz''-\overrightarrow{V_H}\cdot\nabla p+\frac{p}{C_V}\frac{ds}{dt}\right)\right]dz' \tag{16}$$

方程（16）是在静力平衡条件下的垂直运动表达式。

四、大尺度准地转条件下的垂直运动

大尺度运动过程中，静力平衡始终保持成立。当我们引入地转位势ϕ之后，其定义为$\phi=\int_0^z gdz$。由状态方程知$\alpha=\frac{RT}{p}$。于是有$d\phi=-(\frac{RT}{p})dp$。这样可得到静力方程为

$$\frac{\partial\phi}{\partial p}=-\alpha \tag{17}$$

由热力学第一定律知

$$C_p\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}=\dot{Q} \tag{18}$$

对（18）式两边同除以温度T，则有

$$C_p\frac{dlnT}{dt}-R\frac{dlnp}{dt}=\frac{\dot{Q}}{T} \tag{19}$$

则（19）式可写为

$$\frac{dT}{dt}-\frac{RT}{C_pp}\frac{dp}{dt}=\frac{\dot{Q}}{C_p} \tag{20}$$

因为$\frac{dp}{dt}=\omega$，（20）式可进一步写为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-S_p\omega=\frac{\dot{Q}}{C_p} \tag{21}$$

这里$S_p=-T\frac{\partial ln\theta}{\partial p}$，利用（17）式，则（21）式可进而写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)-\sigma\omega=\frac{\alpha}{C_p}\frac{dS}{dt} \tag{22}$$

这里$\frac{dS}{dt}=\frac{\dot{Q}}{T}$，$\sigma=-\frac{\alpha}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}$，$\theta$是位温。

利用地转风近似有

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)=\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right) \tag{23}$$

在绝热条件下，（22）式可进而写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)=-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)+\sigma\omega \tag{24}$$

气压坐标系中的涡度方程可写为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\vec{V}\cdot\nabla(\zeta+f)-\omega\frac{\partial\zeta}{\partial p}-(\zeta+f)\nabla\cdot\vec{V}+\left(\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) \tag{25}$$

利用地转风近似平流项中的实际风，并忽略相对的小量ω及含ω的项，则（25）式可近似为

$$\frac{\partial\zeta_g}{\partial t}=-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla(\zeta_g+f)-f_0\nabla\cdot\overrightarrow{V_H} \tag{26}$$

这里$\zeta_g=\nabla^2\phi/f_0$，因为$\overrightarrow{V_g}=\vec{k}\times\nabla\phi/f_0$，又由于$\nabla\cdot\overrightarrow{V_H}=-\frac{\partial\omega}{\partial p}$，则准地转涡度方程可写为

$$\frac{\partial\zeta_g}{\partial t}=-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla(\zeta_g+f)+f_0\frac{\partial\omega}{\partial p} \tag{27}$$

定义地转位势倾向为$\chi=\frac{\partial\phi}{\partial t}$，由（24）式知

$$\frac{\partial\chi}{\partial p}=-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)-\sigma\omega \tag{28}$$

把$\chi=\frac{\partial\phi}{\partial t}$代入（27）式后有

$$\nabla^2\chi=-f_0\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\phi+f\right)+f_0^2\frac{\partial\omega}{\partial p} \tag{29}$$

对（28）式取拉普拉斯运算，则有

$$\nabla^2\frac{\partial\chi}{\partial p}=-\nabla^2\left[\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\right]-\sigma\nabla^2\omega \tag{30}$$

这里的σ认为是常数。

对（29）式对p进行微分，则有

$$\frac{\partial}{\partial p}(\nabla^2\chi) = -f_0\frac{\partial}{\partial p}[\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla(\frac{1}{f_0}\nabla^2\phi + f)] + f_0^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} \tag{31}$$

从（30）式及（31）式中可消去χ，则可得

$$(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2})\omega = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}[\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla(\frac{1}{f_0}\nabla^2\phi + f)] + \frac{1}{\sigma}\nabla^2[\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla(-\frac{\partial\phi}{\partial p})] \tag{32}$$

方程（32）就是诊断准地转条件下的ω方程（Holton，1979）。虽然此ω方程在大学教科书教学及实际天气预报中有广泛应用，但必须看到它也还存在的几方面不足。其一就是关于稳定度参数σ。如果遇到$\sigma \le 0$，则整个方程对ω的计算失效（Yuan et al., 2014），因此，在中性区及不稳定区，ω计算不出来。在水平面上会出现ω的不连续，这些区域不可能得到水平层次上ω的光滑分布。其二是ω方程右边两项都涉及到4阶导数微分，这在利用离散格点资料计算时会带来很明显的误差，ω本来就比较小，有时甚至会出现误差大于真值的情况，导致计算失败（Yuan et al., 2014；Dunn, 1991）。其三是诊断ω方程中的右侧两项会出现相互抵消的现象，这样计算出来的ω在 500hPa 上会出现值很小的现象，这与物理上估计 500 hPa 左右的ω应达到最大明显矛盾。从物理上分析，应是地表ω为零，在对流层顶的ω也应近似于零（因有对流层顶的存在）。而 500hPa 附近ω应为最大值，可用此ω方程进行诊断时，由于方程右侧项的相互抵消作用而使大气中层 500 hPa 附近的ω近乎于零（Yuan et al., 2014）。得出较准确的ω方程，应选用如下推导过程。

在准地转假定下，热力学方程在绝热条件可写为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_h\theta - w\frac{d\overline{\theta}}{dz} \tag{33}$$

θ就是扰动位温。涡度方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta_g + f) = -\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_h(\zeta + f) + f\frac{\partial w}{\partial z} \tag{34}$$

这里实际上利用了包辛尼斯克近似。

由静力平衡$\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} = -\rho_0 g$，可知扰动气压为

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho_0}{\overline{\theta}}\theta g \tag{35}$$

这里p与θ分别为扰动气压和扰动位温。ρ_0是参数密度为常数且ζ_g可写为

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 f}\nabla_h^2 p \tag{36}$$

利用（35）及（36）式可把（33）式（34）式改写为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\overline{\theta}}{\rho_0 g}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{37}$$

$$\frac{\partial\zeta_g}{\partial t}=\frac{1}{\rho_0 f}\nabla_h^2\frac{\partial p}{\partial t} \tag{38}$$

利用（37）与（38）式，对（33）式进行$\frac{g}{f\overline{\theta}}\nabla^2$运算，并对（34）进行$\frac{\partial}{\partial z}$运算，运算后两式相减，便可消去气压倾向而得

$$\nabla_h^2 w+\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{g}{\overline{\theta}N^2}\nabla_h^2(-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_h\theta)-\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}(-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_h\zeta) \tag{39}$$

这就是在z坐标系中准地转条件下的ω方程（Holton and Hakim，2013）。利用和约定法则，有$\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\theta=u_{gi}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$，于是（39）式可写为

$$\tilde{L}w=\frac{g}{\overline{\theta}N^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(-V_{gj}\frac{\partial\theta}{\partial x_j})-\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial x_3}(-V_{gj}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}) \tag{40}$$

这里$z=x_3,i,j$取值为 1 和 2，并且$\tilde{L}=\nabla_h^2+\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

进而，有

$$\tilde{L}w=\frac{g}{\overline{\theta}N^2}\frac{\partial}{\partial x_i}(-\frac{\partial V_{gj}}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}-V_{gj}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j})-\frac{f}{N^2}(-\frac{\partial V_{gj}}{\partial x_3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}-V_{gj}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta}{\partial x_3}) \tag{41}$$

从地转涡度定义$\zeta_g=\frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}$及静力平衡公式$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_3}=\frac{g}{\overline{\theta}}\theta$，可发现$\frac{\partial\zeta}{\partial x_3}=\frac{g}{f\overline{\theta}}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}$，这里$\zeta_g$被$\zeta$来代替作为高度近似。（41）式可写为

$$\tilde{L}w=\frac{g}{\overline{\theta}N^2}(-\frac{\partial^2 V_{gj}}{\partial x_i^2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}-2\frac{\partial V_{gj}}{\partial x_i}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j}-V_{gj}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2})+\frac{f}{N^2}(\frac{\partial V_{gi}}{\partial x_3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}+V_{gj}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{g}{f\overline{\theta}}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}) \tag{42}$$

从（42）式可以看到，由于f、$\overline{\theta}$和 g 均不是 x_j 的函数，可以从微分中提出来，再展开括号并把括号前的系数乘进去，则方程右侧两括号中的最后一项大小相等，符号相反，是相消的，（42）可写为：

$$\tilde{L}w=\frac{g}{\overline{\theta}N^2}(-\frac{\partial^2 V_{gj}}{\partial x_i^2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}-2\frac{\partial V_{gj}}{\partial x_i}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j})+\frac{f}{N^2}\frac{\partial V_{gi}}{\partial x_3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j} \tag{43}$$

利用一致性关系（读者可证）

$$\frac{g}{\overline{\theta}N^2}\frac{\partial^2 V_{gj}}{\partial x_i^2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}=\frac{f}{N^2}\frac{\partial V_{gi}}{\partial x_3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j} \tag{44}$$

则知（43）可进而写为

$$\tilde{L}w=-2\frac{g}{N^2\overline{\theta}}(\frac{\partial V_{gj}}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j})=2\nabla_h\cdot\vec{Q} \tag{45}$$

这里$\vec{Q}=-\frac{g}{N^2\overline{\theta}}\frac{\partial V_{gj}}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}$为$\vec{Q}$矢量，且

$$\vec{Q} = -\frac{g}{N^2\bar{\theta}}(Q_1, Q_2) = -\frac{g}{N^2\bar{\theta}}(\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y})$$

或

$$\vec{Q} = -\frac{g}{N^2\bar{\theta}}(\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial x} \cdot \nabla_h \theta, \frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial y} \cdot \nabla_h \theta) \tag{46}$$

利用（44）去代替（41）的第一项，则进而有

$$\tilde{L}w = 2\frac{f}{N^2}\frac{\partial V_i}{\partial x_3}\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + E \tag{47}$$

这里$E = -2\frac{g}{\bar{\theta}N^2}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}$是变形。注意到$\frac{\partial V_i}{\partial x_3}$是热成风则（47）式可写为

$$\tilde{L}w = -\frac{2}{N^2}[-\overrightarrow{V_T} \cdot \nabla_h (f\zeta_g)] + E \tag{48}$$

这里$\overrightarrow{V_T}$是热成风。方程（48）是准地转ω方程的 Sutcliffe 形式。Sutcliffe 是准转理论的奠基者，他最早提出基于准地转理论的ω方程对大尺度准地转运动的垂直运动进行诊断是有效的（Sutcliffe, 1947），但由于传统的ω方程右侧的强迫项不是 Galilean 不变量，且强迫项的两项有相互抵消作用，所以实际用起来比较麻烦。对垂直运动的诊断最好用Q矢量形式表达ω方程的强迫项，因为在Q矢量强迫项中，不含有相互抵消作用的部分，且表达形式简单，容易计算且计算较准确。

五、中尺度系统中垂直运动的计算

中尺度系统的特点是，在垂直方向它仍然满足静力平衡，但垂直运动速度要比大尺度系统中的垂直速度大一个量级。因此，在简化运动方程时，要适当保留含有垂直运动的项，而不像大尺度运动系统中那样，含垂直运动的项被略掉了。同时，中尺度系统中，除涡度旋转表现明显外，辐散辐合作用也很明显。所以，在中尺度垂直运动方程中，既要考虑涡度的作用也要考虑散度的作用。基于以上这些考虑，下面进一步推证中尺度系统中的垂直运动方程。

在 P 坐标系中，绝热无摩擦条件下的垂直涡度方程可写为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y}) - \omega\frac{\partial \zeta}{\partial p} + (\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}) - (f + \zeta)(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) \tag{49}$$

对大尺度运动，涡度的量级为$10^{-5}/s$，而散度的量级为$10^{-6}/s$，加之垂直运动只有厘米量级，所以涡度方程被简化为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y}) - v\frac{\partial f}{\partial y} - f(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) \tag{50}$$

然而在中尺度运动系统中，涡度的量级为$10^{-4}/s$，散度的量级也达到$10^{-4}/s$，

且$\frac{\partial w}{\partial z}$~$10^{-4}/s$，所以中尺度系统中的垂直涡度方程可简化如下：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-\overrightarrow{V_H}\cdot\nabla_H\zeta-\omega\frac{\partial \zeta}{\partial p}+(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p})-(f+\zeta)(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}) \quad （51）$$

对中尺度系统，除连续性方程外，水平平流仍可用地转风来代替实际风。因此，垂直涡度$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$也可用地转风来代替，使得$\zeta$可表示为$\zeta_g=\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}$，于是（51）式可写为

$$\frac{\nabla_p^2}{f}\frac{\partial \phi}{\partial t}=-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_H\zeta_g-\omega\frac{\partial \zeta_g}{\partial p}+(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial p})+(f+\zeta_g)\frac{\partial \omega}{\partial p} \quad （52）$$

这里利用了连续性方程$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial \omega}{\partial p}$，及$\overrightarrow{V_g}=-\frac{1}{f}\nabla_p\phi\times\vec{k}$，$\phi$是位势高度，绝热条件下的热流量方程可写为（朱乾根等，2000）

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_H\frac{\partial \phi}{\partial p}=-\sigma\omega \quad （53）$$

这里$\sigma=-\frac{RT}{\theta p}\frac{\partial \theta}{\partial p}$为静力稳定度。

对公式（52）和（53）做运算操作$f\frac{\partial}{\partial p}(52)-\nabla^2(53)$，则有

$$\left[\left(f^2+f\zeta_g\right)\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\sigma\nabla_H^2\right]\omega-f\frac{\partial^2\zeta_g}{\partial p^2}\omega+f\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial p}\right)$$
$$=f\frac{\partial}{\partial p}[\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_H\zeta_g]-\nabla_H^2[\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla_H\frac{\partial \phi}{\partial p}] \quad （54）$$

方程（54）是适合于进行中尺度系统垂直运动诊断的方程。如果不用地转风$\overrightarrow{V_g}$去代替实际风，利用方程（51）和热流量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\overrightarrow{V_H}\cdot\nabla_H T-(\frac{\sigma p}{R})\omega=0 \quad （55）$$

则可得到广义ω方程（Krishnamuri, 1968；Pauley and Nieman, 1992；$R\ddot{a}is\ddot{a}$nen, 1995）如下：

$$\nabla^2(\sigma\omega)+f(\zeta+f)\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}-f\frac{\partial^2\zeta}{\partial p^2}\omega+f\frac{\partial}{\partial p}\left[\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial p}\wedge\nabla\omega\right)\right]=$$

$$f\frac{\partial}{\partial p}[\vec{V}\cdot\nabla(\zeta+f)]+\frac{R}{p}\nabla^2(\vec{V}\cdot\nabla T)+f\frac{\partial}{\partial p}(\frac{\partial \zeta}{\partial t})+\frac{R}{p}\nabla^2(\frac{\partial T}{\partial t}) \quad （56）$$

对比方程（56）与方程（54），便可知道在方程（54）中是用准地转涡度ζ_g代替实际涡度，且在平流项中用地转风来代替实际风。而在方程（56）中用的是实际涡度和实际的风。且与方程（54）相比，方程（56）右侧多的两项为$f\frac{\partial}{\partial p}(\frac{\partial \zeta}{\partial t})$

与$\frac{R}{p}\nabla^2(\frac{\partial T}{\partial t})$。方程（56）可作为中尺度系统的垂直运动诊断方程，但方程中含$\frac{\partial \zeta}{\partial t}$与$\frac{\partial T}{\partial t}$的时间导数项，在用实际资料计算时也难以算准。因为时间导数项的大小严格依赖于时间步长的大小，取的时间步长不同，会得到明显不同的计算结果，也造成对垂直运动诊断的误差。正因这个原因，由于方程（54）相对比较简便，造成的误差也不一定大，用其诊断中尺度的垂直运动，可实现较好的诊断效果。

六、小尺度强风暴中的垂直运动的诊断与计算

小尺度强风暴系统中的垂直运动主要受浮力作用及风切变的影响。依据 Bluestein（2013）的做法是把小尺度系统认定为与科氏力无关的系统，且在短暂瞬间可认为定常流场。

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r}=\nabla(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V})\cdot d\vec{r}+[(\nabla\Lambda\vec{V})\Lambda\vec{V}]\cdot d\vec{r}=-\alpha_0\nabla p'd\vec{r}+Bdz \quad (58)$$

这里B是浮力。p'是扰动气压，α_0是比容。由于$[(\nabla\Lambda\vec{V})\Lambda\vec{V}]\cdot d\vec{r}=0$，所以对(58)式两边积分有

$$\int\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}|\vec{V}|^2)dx+\int\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}|\vec{V}|^2)dy+\int\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{2}|\vec{V}|^2)dz=-\int\alpha_0((\frac{\partial p'}{\partial x})dx+(\frac{\partial p'}{\partial y})dy+(\frac{\partial p'}{\partial z})dz)+\int Bdz \quad (59)$$

(59)式可写为

$$\int d(\frac{1}{2}|\vec{V}|^2)+\alpha_0\int dp'-\int Bdz=0 \quad (60)$$

即

$$\frac{1}{2}\left|\vec{V}_f\right|^2-\frac{1}{2}\left|\vec{V}_i\right|^2+\alpha_0\ p_i'-\int B\mathrm{dz}=0 \quad (61)$$

这里下标 f 与 i 分别表示终态与初态。Bluestein（2013）认为，在远离风暴中心的初态$p'_i=0$，$B=0$，即没有扰动气压及浮力存在。同时，由于假设终态风速引起的动能是初态的一倍，即$|\vec{V_f}|^2\approx 2\left|\vec{V}_i\right|^2$。由公式(61)，有

$$\alpha_0 p'_f=-\frac{1}{2}\left|\vec{V}_i\right|^2 \quad (62)$$

这是空气质点在大气中层满足的条件。所以可记$\alpha_0 p'=-\frac{1}{2}|\vec{V_m}|^2$。考察另一质点从边界层顶出发且在强对流区中，在风暴中心，自然是垂直运动成为其风速。也就是$|\vec{V_f}|^2=\frac{1}{2}\omega_m{}^2$。这里的 m 代表大气中层。这样一来，利用（61）及（62）

式则可得

$$\frac{1}{2}{\omega_m}^2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{V_0}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{V_m}|^2+\int_{边界层}^{中层}B\mathrm{dz} \tag{63}$$

又因$CAPE_m=\int_{边界层}^{中层}B\mathrm{dz}$。这里$CAPE$就是由浮力积累的不稳定能量。于是得到：

$$\omega_m=(2CAPE_m+|\overrightarrow{V_0}|^2+|\overrightarrow{V_m}|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{64}$$

从（64）式可看出，强风暴中的垂直速度主要取决于浮力效应及上下风速的能量积累。

由于 Bluestein（2013）在推导强风暴中垂直运动的计算过程有一些人为假定，比如认为$|\vec{V_f}|^2\approx 2\left|\vec{V_i}\right|^2$。所以其结果有一定的误差。后来，高守亭等（2018，2019）进一步放宽假定条件，得到了与（64）略有不同的强风暴中垂直运动的计算，其表达式为：

$${\omega_m}^2=2cape+\left|\vec{V_i}\right|^2+\alpha|\overrightarrow{V_m}|^2 \tag{65}$$

由以上回顾，可以清晰地认识到垂直运动的计算与诊断是与天气系统的尺度有关。对大尺度系统，其垂直运动的计算及诊断，使用准地转条件下的ω方程就可以了。不必要过多考虑浮力和风切的作用。而中尺度系统中的垂直速度不再是小量，在涡度方程中不能把垂直速度忽略掉，所以其垂直运动的诊断与计算在形式上更复杂一些，但其强迫项仍是由涵差的涡度平流及温度平流的拉普拉斯所构成。在本质上，与大尺度系统中的ω方程没有太大差别。只有在小尺度强风暴中，浮力及风切起着主导作用，所以，由于中小尺度系统与大中尺度系统垂直运动的强迫项有本质差异，导致垂直运动的计算差距很大。

七、新型垂直运动诊断方程及联立方程组

就大尺度及中尺度系统中的垂直运动而言，前人推导出的准地转 ω 诊断方程及中尺度广义垂直运动诊断方程都具有严谨性、科学性和适用性。唯有小尺度的强风暴系统中的垂直运动诊断，前人虽有推导，但显示出很多不合理不恰当的地方。这里以 Bluestein（2013）推导的垂直运动方程为例来说明推导过程的不足。他的推导从下式开始

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{dt}}\cdot d\vec{r}=\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)\cdot d\vec{r}+\left[(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]\cdot d\vec{r}=-\alpha_0\nabla p'\cdot d\vec{r}+Bdz \tag{66}$$

（原文中 4.13 式，书中 171 页）。这里分析$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{dt}}\cdot d\vec{r}$，因为

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot d\vec{r}+\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)\cdot d\vec{r}+\left[(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]\cdot d\vec{r}\neq\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)\cdot d\vec{r}+\left[(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]\cdot d\vec{r}$$

（67）

这里$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot d\vec{r}$项不能无理由省略，在小尺度运动方程中$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$的变化往往很大，省略了$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$项就意味着是定常运动，这在迅速变化的风暴系统中设为定常运动显然不合适。再者，认为在风暴区风速是远离风暴区速度的两倍也具有很大的人为性。为了得到一个新的风暴系统中的垂直运动诊断方程，本章依据如下新思考而进行。从完整的运动方程出发，有如下公式

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{g}-f\vec{k}\times\vec{V}\tag{68}$$

（68）式可进一步写为

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=-\alpha_0\nabla p'+\vec{B}-f\vec{k}\times\vec{V}\tag{69}$$

这里p'是扰动气压即$p=p_0+p'$，$\vec{B}=-\frac{\rho'}{\rho_0}g\vec{k}$为浮力。

（69）式可改写为

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}=-\alpha_0\nabla p'+\vec{B}-f\vec{k}\times\vec{V}\tag{70}$$

或写为

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)+\left[(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]-\alpha_0\nabla p'+\vec{B}-f\vec{k}\times\vec{V}\tag{71}$$

对（71）式两边取散度则有

$$\frac{\partial\nabla\cdot\vec{V}}{\partial t}=\nabla\cdot\nabla(\frac{1}{2}|\vec{V}|^2)+\nabla\cdot\left[(\nabla\cdot\vec{V})\times\vec{V}\right]-\nabla\cdot\alpha_0\nabla p'+\nabla\cdot\vec{B}+\nabla\cdot f\vec{k}\times\vec{V}\tag{72}$$

由于三维散度$\nabla\cdot\vec{V}=0$是高度近似，故（72）式写为

$$\nabla^2\left(\frac{1}{2}|\vec{V}|^2\right)+\nabla\cdot\left[(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]-\alpha_0\nabla^2p'+\nabla\cdot\vec{B}+\nabla\cdot\left(f\vec{k}\times\vec{V}\right)=0\tag{73}$$

进一步有

$$\frac{1}{2}\nabla^2(w^2+u^2+v^2)=-\nabla\cdot\left[(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]+\alpha_0\nabla^2p'-\nabla\cdot\vec{B}-\nabla\cdot\left(f\vec{k}\times\vec{V}\right)$$

（74）

在风暴中如果主要考虑垂直涡度（这里做了近似处理，不太合理，需要在后续研究中继续改进），有：$\nabla\times\vec{V}=\vec{\xi_z}=\xi_z\vec{k}$，则有

$$\nabla\cdot\left[(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]=\nabla\cdot(\zeta_z\vec{k}\times\vec{V})=\nabla\cdot(-v\zeta_z\vec{z}+u\zeta_z\vec{j})=\frac{\partial u\zeta_z}{\partial y}-\frac{\partial v\zeta_z}{\partial x},$$

且有

$$\nabla\cdot\left(f\vec{k}\times\vec{V}\right)=\nabla\cdot(fu\vec{j}-fv\vec{\imath})=f\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-f\xi_z,$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=\frac{\partial B}{\partial z},$$

这样一来，（74）式可写为

$$\nabla^2w^2=-\nabla^2(u^2+v^2)+\frac{\partial(v\zeta_z)}{\partial x}-\frac{\partial(u\zeta_z)}{\partial y}+\alpha_0\nabla^2p'+f\zeta_z-\frac{\partial B}{\partial z}\qquad(75)$$

在方程（75）中，只要求出$\alpha_0\nabla^2p'$，则垂直运动w就可以诊断。为求出p'，可以采取 Bluestein（2013）类似的方法，即

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}\right).d\vec{r}+[(\nabla\times\vec{v})\times\vec{v}].d\vec{r}=-\alpha_0\nabla p'\cdot d\vec{r}+Bdz\qquad(76)$$

因为是求气压扰动，它取决于其上整层空气气压的变化，在短的瞬间基本可认为瞬变速度对其上整层空气柱影响不大，可取为定常。于是有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right)^2\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right)^2\cdot dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right)^2\cdot dz=-\alpha_0[(\frac{\partial p'}{\partial x}dx+\frac{\partial p'}{\partial y}dy+\frac{\partial p'}{\partial z}dz]+Bdz\qquad(77)$$

因为$d\vec{r}$与风速方向一致，所以$[(\nabla\times\vec{v})\times\vec{v}].d\vec{r}=0$,。

对方程（77）两边积分，有

$$\int d\frac{1}{2}|\vec{v}|^2=-\alpha_0\int dp'+\int Bdz\qquad(78)$$

即：$\int d\frac{1}{2}|\vec{v}|^2+\alpha_0\int dp'-\int Bdz=0$　　（79）

则有：$\frac{1}{2}|\vec{v_f}|^2-\frac{1}{2}|\vec{v}_i|+\alpha_0p_f'-\alpha_0p_i'-\int B\,dz=0$　　（80）

这里下标f与i分别表示终态与初态。

在初始时可以认定没有气压扰动，$p_i'=0$，则有

$$\alpha_0p_f'=\frac{1}{2}|\vec{v}_i|^2-\frac{1}{2}|\vec{v_f}|^2+\int B\,dz\qquad(81)$$

又因为 $CAPE=\int Bdz$　　（82）

所以，

$$\alpha_0p_f'=\frac{1}{2}|\vec{v}_i|^2-\frac{1}{2}|\vec{v_f}|^2+CAPE\qquad(83)$$

若认为初始动能主要由水平风场决定，即$\frac{1}{2}|\vec{V}_i|=\frac{1}{2}|\vec{V}_{Hi}|$

则方程（83）简化为

$$\alpha_0p_f'=-\frac{1}{2}|\vec{v_f}|^2+CAPE+\frac{1}{2}|\vec{V}_{Hi}|\qquad(84)$$

对（84）两边取梯度后再取散度计算，则有

$$\alpha_0\nabla^2 p_f^{'} = -\frac{1}{2}\nabla^2|\overrightarrow{v_f}|^2 + \nabla^2(CAPE) + \frac{1}{2}\nabla^2|\vec{V}_{Hi}| \tag{85}$$

或写成:

$$\alpha_0\nabla^2 p_f^{'} = -\frac{1}{2}\nabla^2(u^2+v^2+\omega^2) + \nabla^2(CAPE) + \frac{1}{2}\nabla^2(u_i^2+v_i^2) \tag{86}$$

把（86）式代入（75）式并整理，则得到

$$\frac{3}{2}\nabla^2\omega^2 = -\frac{3}{2}\nabla^2(u^2+v^2) + \frac{\partial v\zeta_z}{\partial x} - \frac{\partial u\zeta_z}{\partial y} + f\zeta_z\frac{\partial B}{\partial z} + \nabla^2(CAPE) + \frac{1}{2}\nabla^2(u_i^2+v_i^2) \tag{87}$$

这样一来就有

$$\nabla^2\omega^2 = -\nabla^2(u^2+v^2) + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v\zeta_z}{\partial x} - \frac{\partial u\zeta_z}{\partial y}\right) + \frac{2}{3}f\zeta_z\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{2}{3}\nabla^2(CAPE) + \frac{1}{3}\nabla^2(u_i^2+v_i^2) \tag{88}$$

公式（88）右侧的每项都可直接计算，是风暴级小尺度垂直运动诊断方程。另一方面，任何小尺度强对流系统都是在大中尺度背景下发生的，所以背景场的垂直运动仍然存在。因此，完整的垂直运动的诊断不应是单一垂直运动诊断方程，而应该是不同背景下垂直运动诊断的综合，即应为联立垂直运动诊断方程组，可写为$w = w_1 + w_2$，其中w_1为中小尺度运动系统中的w诊断量，其诊断由公式（88）来确定。w_2为大中尺度背景场下控制的垂直运动诊断量，可由（54）式的方程诊断，方程（88）与（54）联合求解w，则可得到较完整的垂直运动。

这两种尺度的垂直运动计算相结合，可以较好的表征出大气中垂直运动较真实的值，这为强对流、暴雨及暴雪系统中的垂直运动计算提供了科学的计算方法，可在科研与预报业务中应用。

八、结论和讨论

垂直运动在大气演变过程中有重要作用，但由于不能直接观测，只能通过垂直运动方程诊断计算得到。在没有仪器可直接观测垂直速度以前，如何较为准确地诊断出垂直运动是分析大中小尺度天气系统发展演变的重要内容。本文总结了大气垂直运动方程的研究进展，指出天气系统运动的垂直速度计算要考虑天气系统的尺度和运动规律，按照不同尺度天气系统所遵循的规律来进行相应的垂直速度计算。

1、质量守恒的前提下，垂直运动可由连续方程积分计算得到，这个算法需要准确计算散度。由于散度是两个大量的小差，误差量级与散度量级相同，不容易计算正确，导致此方法准确计算垂直运动不容易实现。基于大气内部变化绝热假设的绝热法，由于与实际天气过程热力变化有较大差别，计算的垂直运动也不准确。垂直运动的诊断与天气系统尺度有关。

2、大尺度系统以涡旋运动为主，满足准水平，不必过多考虑浮力和风切作用。因此，准地转条件的垂直运动方程在大尺度系统中应用较好。

3、中尺度系统运动中，辐合辐散运动与旋转运动同等重要，垂直运动不能忽略，垂直运动方程在形式上要复杂一些，但其强迫项仍是由涵差的涡度平流及温度平流的拉普拉斯所构成，本质与大尺度系统中的ω方程没有太大差别。

4、小尺度强风暴运动以辐合辐散为主，浮力及风切起着主导作用，其垂直运动方程要复杂得多。但是，由于任何小尺度强对流系统都是在大中尺度背景下发生的，所以背景场强迫的垂直运动仍然存在，完整的垂直运动应考虑不同天气尺度系统调整产生的垂直速度，应联立垂直运动方程组进行计算，包含多效应的新型垂直运动方程，可以较为准确地实现小尺度强对流运动中的垂直速度的诊断分析。

可是，包含了多效应的新型垂直运动方程，虽然在理论上有进步，但也还存在假设，如风暴中主要是垂直涡度的假定，以及求气压扰动时认为短的瞬间基本可认为瞬变速度定常与实际情况也会有差异。此外，不同尺度的气象要素之间存在相互作用，文中用于计算 w1 的各变量也并不单是由中小尺度系统产生，也会受到大中尺度背景场的影响。同样地，用于计算 w2 的各变量也包含了中小尺度系统的作用。只将 w1 和 w2 直接相加并不完全合理。但是，在目前的条件下还不能把不同尺度系统引起的垂直运动完全分开，但至少考虑到并可实现不同尺度系统对应的垂直运动的计算。因此，在垂直速度能直接观测实现之前，还需要继续发展具备更合理的理论基础的计算方法，以减小误差对实际垂直运动计算的影响。

参考文献：

Battan, L. J., 1964. Some observations of vertical velocity and precipitation sizes in a thunderstorm[J]. *Jonrnal of Applied Meteorology*, 3(4):415-420.

Barnes, S. L. 1985. Omega diagnostics as a supplement to LFMMOS guidance in weakly forced convective situations[J]. *Mon. Wea. Rev.*, 113:2122-2141.

Bluestein, H. B. 2013. Severe Convective Storms and Tornadoes: Observations and Dynamics[M]. Springer-Praxis Publishing Chichester, UK, pp456.

Bullock, B. R., Horn L. H. and Johnson D. R., 1969. The contribution of infrared cooling to the vertical motion field and its implication in atmospheric energetics[J]. *Mon. Wea. Rev.*, 97: 371-381.

Chew, F., J. M. Bane Jr. and D. A. Brooks. 1985. On vertical motion, divergence and the thermal wind balance in cold-dome meanders: A diagnostic study[J]. *J. Geophys. Res.*, 90:3173-3183.

Durran, D. R., and L. W. Snellman, 1987: The diagnosis of synopticscale vertical motion in an operational environment[J]. *Wea. Forecsting*, 2:17-31.

Dutton A. , 1976. The entropic energy of geophysical fluid systems[J]. Tellus, 28: 138–157.

Dunn,L.B., 1991, Evaluation of Vertical Motion: Past, Present, and Future[J]. Weather and Forecasting, 6:65-75.

高守亭,左群杰,杨帅.2018.龙卷生成动力学初探[J].气象科技进展,8(02):24-27+35.

高守亭,周玉淑.2019.近年来中尺度涡动力学研究进展[J].暴雨灾害,38(05):431-439.

Holton J.R., 1979： An introduction to dynamic meteorology[M], second edition, Academic Press, 391pp.

Hoskins, B. J. and Draghici, I. 1977. The forcing of ageostrophic motion according to the semigeostrophic equations and in an insentropic coordinate model[J]. *J. Atmos. Sci.*, 34(12).

Hoskins, B. J. and Draghici, I. and H. C. Davies, 1978: A new look at the ω-equation[J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 104:31-38.

Holton J.R.and Hakim G.T., 2013, An introduction to dynamic meteorology[M], fifth edition, Academic Press of Elsevier, Boston, USA.

Krishnamurti, T., 1968. A dignostic balane model for studies of weather systems of low and high latituddes [J], *Mon. Wea. Rev.*, 96, 197-207.

Lsteef, M. A., 1967. Vertical motion , divergence, and vorticity in the troposphere over the Caribbean, August 3-5, 1963[J]. *Mon. Wea. Rev.*, 95(11):778-790.

Mathur M. U. and Brill K.F. 1999. Evolution of Slantwise Vertical Motions in NCEP’s Mesoscale Eta Model. *Mon. Wea. Rev.*, 127:5-25.

Miller, A. and Panofsky, H. A., 1953. Large-scale vertical motions and weather in January, 1953[J]. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 39:8-13.

Nieman, S. J., 1990. A diagnosis of non-quasi-geostrophic vertical motion foe a model-simulated rapidly intensifying marine extratropical cyclone. M. S. thesis, Department of Meteorology, University of Wisconsin-Madison, 818pp.

O’Brien, J. J. , 1970. Alternative solutions to the classical vertical velocity problem[J]. *Journal of Applied Meterology*, 9:197-203.

O’neill, T. H. R., 1966. Vertical motion and precipitation computations[J]. *Journal of Applied Meterology*, 5:1595-605.

Panofsky, H. A. 1951. Large-scale vertical velocity and divergence. Compendium of Meteorology, American Meteorological Society, Boston , Mass., 639-646.

Pauley, P, M.， 1988. A Diagnosis of nonquasigeostrophic vertical mption. Preprints, Eigghth Conf. Numerical Weather Prediction, Baltimeore, Amer. Meteor. Soc., 424-428.

Pauley, P, M. and Nieman, S. J. 1992. A comparison of quasigeostrophic and non quasigeostrophic vertical motions for a model-simulated rapidly intensifying marine extratropical cyclone[J], *Mon. Wea. Rev.*, 123: 1108-1134.

*Rä*is*ä*nen, J., 1995. Factors affecting synoptic-scale vertical motions: A satistical study using a generalized omega equation, Mon Weaher Rev, 123, 2447-2460.

Smith P. J. 1971. An analysis of kinematic vertical motions [J] . *Mon. Wea. Rev.*, 99:715-724.

Smith, P. J., and C. P. Lin. 1978: A comparison of synoptic-scale vertical motions computed by the kinematic method and two forms of the omega equations[J]. *Mon. Wea. Rev.*, 106:1687-1694.

Sutcliffe, R. C,1947. A contribution to the problem of development[J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc*, 73: 370-383.

Teukolsky S.A.,Vetterling W.T. and Flannery B.P. 1992. Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing[M]. Cambridge University Press, 933pp.

Tintore, J., Gomis D., Alonso S. and Parrilla S. 1990. Mesoscale dynamics and vertical motion in the Alboran Sea[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 21:811-823.

Trenberth K. E. 1978. On the interpretation of the Diagnostic quasi-geostrophic omegaequation. *Mon. Wea. Rev.*, 106:131-137.

Viudez, A. and Tintore J. 1996. About the nature of the generalized omega equation[J]. *J. Atmos. Sci.*, 53:787-795.

Yuan zhuojian, Qi Jindian, Gao Shouting, Feng yerong, Xu pengcheng and Wu Naigeng. 2014. New evidence for improving omega estimation by explicitly considering horizontal divergence[J]. *Adv. . Atmos. Sci.*, 31: 449-456.

赵瑞星,陶诗言. 1990. 几种ω诊断模式的比较[J]. 应用气象学报, 1:135-141.

朱乾根,林锦瑞,寿绍文,等. 2000. 天气学原理和方法（第三版）[M]. pp649.