非纬向基流上的斜压扰动

林一骅 [1,2]
1、LASG　中国科学院大气物理研究所，北京 100029
2、中国科学院大学地球与行星科学学院，北京 100049

2022-05-01 T 13:00

摘要

本文基于能量方法研究了时间平均的非纬向基流的稳定性以及该基流上斜压扰动的发展，并探讨了经向基本气流对于扰动发展的作用。从广义能量方程得到了时间平均的非纬向基流的稳定性条件，并用扰动能量方程研究了正压发展（衰减）和斜压发展（衰减）的扰动的结构以及其与基流的配置关系。研究发现，以急流轴为中心，对于正压发展的扰动，其流线在水平面上向基本气流来流方向的上游倾斜，而对于正压衰减的扰动，其流线在水平面上向基本气流来流方向的下游倾斜。对流层大气中，斜压发展的扰动，其流线在垂直剖面上随高度增加向基本气流来流方向的上游倾斜，而斜压衰减的扰动，其流线在垂直剖面上随高度增加向基本气流来流方向的下游倾斜。经向基本气流的存在会促进并加强扰动的发展，令扰动更加不稳定。

关键词： 非纬向基本流 稳定性 斜压扰动 发展 经向基本气流

Baroclinic Disturbances in Nonzonal Flow

Lin Yihua[1,2]
1 LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029
2 College of Earth and Planetary Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

Abstract The development of the disturbance and stability of the time-averaged non-zonal basic flow in a baroclinic atmosphere are investigated by energy method. More attention is paid to the problems on the role of the meridional base flow to

[1] **作者简介** 林一骅，男，1966 年出生，研究员，主要从事地球流体力学与海洋环流数值模拟研究。E-mail：linyh@lasg.iap.ac.cn

the development of the disturbance. The sufficient condition for stability and the necessary condition for instability of the time-averaged non-zonal basic flow are obtained from the generalized energy equation. With the axis of jet stream as the center, for the barotropic developing(decaying) disturbance, the perturbation streamlines must be tilting (on average) towards the upstream(downstream) direction of the basic flow on the horizontal plane.In the troposphere, for the baroclinic developing(decaying) disturbance, the perturbation streamline must be sloping upward and tilting (on average) towards the upstream(downstream) direction of the basic flow on the vertical section. The existence of the meridional basic flow will promote and strengthen the development of the disturbance, making the developing disturbance more unstable.

Keywords Nonzonal flow, stability, baroclinic disturbances, development，meridional flow

1 引言

中纬度天气系统的发展，可以看成天气尺度扰动通过正压机制和斜压机制从行星尺度的的基本气流即中纬度行星风带获得能量进而发展的过程。正压不稳定与斜压不稳定理论就是为解决这一问题而建立和完善起来的，这些经典工作既是大气海洋动力学的重要成果（Charney，1947；Eady，1949；Kuo，1949，1973；Fjørtoft，1950；Green；1960），也是流体力学动力不稳定理论在地球流体力学领域的应用与拓展（Rayleigh，1880；Lin，1945；Drazin 和 Reid，2004）。

上述研究工作大都取平直的基本气流即纬向平均的基本气流，这通常是为数学上容易处理而做的简化。实际的基本气流因为行星尺度槽脊的存在，是蜿蜒曲折的，具有显著的纬向非均匀性。由于数学处理上的困难，对于非纬向均匀气流的稳定性问题的研究较少。叶笃正（叶笃正，1964）研究了正压大气波状基本流上扰动的动力学问题，重点探讨了不同扰动之间的相互作用和制约关系，揭示了诸如新波激发等现象。Blumen（Blumen，1968）使用变分方法研究了斜压准地转流动的非线性稳定性问题，得到一组较为普遍的判据。曾庆存（曾庆存，1979）使用 WKBJ 方法研究了大气中快波与慢波的相互作用，在此基础上使用 WKBJ 方法针对正压大气非均匀基流上扰

动的演变进行了深入系统的研究，并取得一系列成果（Zeng and Lu，1980；卢佩生和曾庆存，1981；卢佩生，1981；曾庆存和卢佩生，1983；Zeng et al，1986a,b）。Pedlosky（Pedlosky，1987）则针对二层模式使用标准模方法研究了斜压非纬向流动的稳定性，发现非纬向基本流比纬向基本流更容易出现不稳定。这些工作加深了对于非均匀基流的稳定性的认识，揭示了非均匀基流上扰动的演变的过程和机理。不过这些工作大多针对正压大气进行，Bulumen 和 Pedlosky 的工作虽然针对斜压情况，且前者的工作具有一般性，但是无法直接用来研究基本流的结构与扰动的结构之间的关系，也就无法通过基本流的结构、扰动的结构以及二者的配置来判断扰动的发展；后者的工作是针对非常特殊的基本流进行的，所得结果缺乏一般性。

气候学研究表明，在目前全球变暖的背景下，南北温差会有所减小，而海陆温差会有所增加。这很可能会导致中纬度行星风带出现纬向基本风场减弱而经向基本风场加强的趋势，基本气流更加弯曲，大槽大脊更加显著，槽脊数量也可能增加。其结果是经向气流加强，而且经向基本气流在行星风带中所占的比重也增加，甚至会增加极端天气发生的可能性（Francis 和 Vavrus，2015）。由此看来，进一步研究斜压非纬向气流的稳定性以及斜压非纬向气流上扰动的发展规律，探讨经向基本气流的作用，对于深入认识斜压非纬向基本气流的动力过程以及理解全球变暖背景下极端天气事件发生的机理都有重要意义。

本文尝试基于能量方法研究时间平均的非纬向基本气流的稳定性问题，探讨斜压非纬向基本气流上扰动发展的条件，并着重关注经向基本气流的作用。能量方法基于不计强迫和耗散情况下大气运动总能量守恒这一基本原则，把扰动的发展和衰减视为整个大气系统中基本气流能量与扰动能量之间的转换过程。如果通过某种机制，基本气流能量转变为扰动能量，则扰动发展；反之，若扰动能量转变为基本气流的能量，则扰动衰减。相比标准模方法只能有效运用于线性问题，能量方法的优点是既可用于研究线性问题，又可用于研究非线性问题，并可与变分方法等数学方法相结合，广泛用于不稳定问题的研究（Joseph，1966；曾庆存，1979；Pedlosky，1987；Xiang 和 Mu，1997；Xiang 和 Sun，2002；Drazin 和 Reid，2004）。以下将从基本方程出发，导出广义能量方程，给出斜压非纬向气流的稳定性条件，再基于能量学方法研究斜压非纬向基本气流上扰动的发展演变，尤其是经向基本气流的作用，最后对所得结论进行总结，并结合全球变暖背景下的极端天气事件加以讨论。

2 基本方程

天气尺度扰动的演变通常可以忽略外源强迫以及耗散，这样描述斜压大气大尺度运动的准地转位势涡度方程可以写成

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 \tag{1}$$

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$，$u$、$v$ 分别为东西方向和南北方向的风速，q 是位势涡度，其表达式为

$$q = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

f_0 为科氏参数，$\beta = \frac{\partial f}{\partial f}$ 是科氏参数随纬度的变化，N 为浮力频率，此处设为常量；$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$，$\psi$ 是地转流函数。

相应的热力学方程为

$$\frac{Db}{Dt} + wN^2 = 0 \tag{2}$$

其中浮力 $b = f_0\frac{\partial \psi}{\partial z}$，$w$ 是垂直风速。与方程（1）、（2）相对应，大气运动在东西方向满足周期边界条件，南北方向满足刚壁边界条件，垂直方向亦满足刚壁边界条件即

$$\begin{gathered} u|_{x=0} = u|_{x=L} \\ v = 0,\ \text{当} y = y_1,\ y = y_2 \\ w = 0,\ \text{当} z = 0,\ z = H \end{gathered}$$

其中 L 为所研究区域东西方向的长度或者一个波包的长度，y_1、y_2 为南北边界的坐标，H 为大气上边界的高度，通常取在对流层顶处或者取在大气上界，即 $z \to \infty$ 处。南北边界条件可表为流函数形式，垂直边界条件可以通过热力学方程（2）表出

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{x=L} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,\ \text{当} y = y_1,\ y = y_2 \tag{4}$$

$$\frac{Db}{Dt} = 0,\ \text{当} z = 0,\ z = H \tag{5}$$

把方程（1）对于时间平均的基本气流线性化，可得

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial q'}{\partial y} + u'\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0$$

或者通过地转流函数写成 Jacobi 形式

$$\frac{\partial q'}{\partial t}+J\left(\bar{\psi},q'\right)+J\left(\psi',\bar{q}\right)=0 \tag{6}$$

其中 $\bar{u}=\bar{u}\left(x,y,z\right)=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}$，$\bar{v}=\bar{v}\left(x,y,z\right)=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}$ 分别为纬向和经向的基本气流；$u'=u'\left(x,y,z;t\right)=-\frac{\partial\psi'}{\partial y}$，$v'=v'\left(x,y,z;t\right)=\frac{\partial\psi'}{\partial x}$ 则为纬向和经向的扰动风速；$\psi'=\psi'\left(x,y,z;t\right)$ 为扰动地转流函数，$\bar{\psi}=\bar{\psi}\left(x,y,z\right)$ 则是基流的地转流函数；J 为 Jacobian 算子。$\bar{q}$ 和 q' 分别为基流的位势涡度和扰动位势涡度，其表达式如下

$$\bar{q}=f_0+\beta y+\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial y^2}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial z^2}$$
$$q'=\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}$$

与（2）相应的线性化热力学方程可以写成

$$\frac{\partial b'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial b'}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial b'}{\partial y}+u'\frac{\partial\bar{b}}{\partial x}+v'\frac{\partial\bar{b}}{\partial y}+w'N^2=0$$

其 Jacobi 形式则为

$$\frac{\partial b'}{\partial t}+J\left(\bar{\psi},b'\right)+J\left(\psi',\bar{b}\right)+w'N^2=0 \tag{7}$$

其中 $b'=f_0\frac{\partial\psi'}{\partial z}$ 为浮力扰动，$\bar{b}=f_0\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}$ 为背景场浮力，w' 为扰动垂直速度，$N^2=\frac{d\bar{b}}{dz}$，N 为浮力频率。

对应于线性化方程（6）、（7）的边界条件为

$$u'|_{x=0}=u'|_{x=L};\ \bar{u}|_{x=0}=\bar{u}|_{x=L}$$
$$v'=0;\ \bar{v}=0,\ 当y=y_1,\ y=y_2$$
$$w'=0,\ 当z=0,\ z=H$$

水平边界条件可以写成流函数形式，垂直边界条件可以通过热力学方程（7）表出

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y}|_{x=0}=\frac{\partial\psi'}{\partial y}|_{x=L};\ \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}|_{x=0}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}|_{x=L} \tag{8}$$
$$\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0;\ \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}=0,\ 当y=y_1,\ y=y_2 \tag{9}$$
$$\frac{\partial b'}{\partial t}+J\left(\bar{\psi},b'\right)+J\left(\psi',\bar{b}\right)=0,\ 当z=0,\ z=H \tag{10}$$

我们将从基本方程（6）、（7）与边界条件（8）、（9）和（10）出发来研究非均匀基本流上斜压扰动发展，先在大气上边界为 H 的情况导出广义能量方程，然后再讨论 $z\to\infty$ 的情况。

3　广义能量方程

并用 $-\psi'$ 乘以式（6）等号两边，计及边界条件（8）、（9）和（10），经过一些偏微分运算及积分运算，不难得到如下扰动能量方程

$$
\begin{aligned}
\frac{dE'}{dt} &= \frac{d}{dt}\iiint_\Omega \mathcal{E}dxdydz \\
&= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right] dxdydz \\
&+ \frac{f_0^2}{N^2}\iiint_\Omega \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right] dxdydz \\
&+ \iiint_\Omega \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right)^2\right] dxdydz \\
&+ \frac{f_0^2}{N^2}\iint_S \left(\psi'\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial z}\right)_{z=H} dxdy + \frac{f_0^2}{N^2}\iint_S \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)_{z=H} dxdy \\
&- \frac{f_0^2}{N^2}\iint_S \left(\psi'\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial z}\right)_{z=0} dxdy - \frac{f_0^2}{N^2}\iint_S \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy
\end{aligned} \tag{11}
$$

其中 E' 为扰动能量，$\mathcal{E}$ 则为扰动能量密度，其表达式为

$$
\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)^2\right] \tag{12}
$$

$\Omega = S \times [0, H]$ 是积分区域，$S = [0, L] \times [y_1, y_2]$ 为 Ω 的水平范围，H 为积分区域的高度。

因 $\bar{q}$ 为 $\bar{\psi}$ 的函数，即 $\bar{q} = \bar{q}\left(\bar{\psi}\right)$，反过来，$\bar{\psi}$ 自然也是 $\bar{q}$ 的函数，即 $\bar{\psi} = \bar{\psi}\left(\bar{q}\right)$，函数 $\bar{\psi}\left(\bar{q}\right)$ 关于 $\bar{q}$ 的微商为 $\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}$。前述线性化位涡方程两边同乘以 $\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}$，有

$$
\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u}\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{v}\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial q'}{\partial y} + u'\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + v'\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0
$$

即

$$
\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u}\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{v}\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial q'}{\partial y} + u'\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = 0
$$

或者写成 Jacobi 形式

$$
\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}\frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}J\left(\bar{\psi}, q'\right) + J\left(\psi', \bar{\psi}\right) = 0 \tag{13}
$$

式（13）两边同乘以 q'，并计及边界条件（8）、（9）和（10），经过一些偏微分运算及积分运算，易得到如下广义扰动位涡拟能方程

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\mathcal{Z}}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} \mathcal{Z} dxdydz &= \frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}} q'^2 dxdydz \\
&= -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right] dxdydz \\
&- \frac{f_0^2}{N^2}\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right] dxdydz \\
&- \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right)^2\right] dxdydz \\
&- \frac{f_0^2}{N^2}\iint_{S}\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)_{z=H} dxdy \\
&+ \frac{f_0^2}{N^2}\iint_{S}\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy
\end{aligned} \tag{14}
$$

再用 $\frac{f_0}{N^2}\psi'$ 乘以（10）式的等号两边，并在水平区域 S 上积分，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{f_0^2}{N^2}\iint_{S}\left(\psi'\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial z}\right)_{z=H} dxdy \\
&+ \frac{f_0^2}{N^2}\iint_{S}\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)_{z=H} dxdy = 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{f_0^2}{N^2}\iint_{S}\left(\psi'\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial z}\right)_{z=0} dxdy \\
&+ \frac{f_0^2}{N^2}\iint_{S}\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy = 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

以 $\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}$ 同乘（10）式两边并利用 Jacobin 算子的性质，有

$$
\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{\partial b'}{\partial t} + \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}} J\left(\bar{\psi}, b'\right) + J\left(\psi', \bar{\psi}\right) = 0, \ \text{当} z = 0,\ z = H \tag{17}
$$

再以 $\frac{f_0}{N^2}b'$ 乘以（17）式两边，在水平区域 S 上积分可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S}\left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=H} dxdy \\
&+ \frac{f_0}{N^2}\iint_{S}\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x} b' - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y} b'\right)_{z=H} dxdy = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S}\left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=0} dxdy \\
&+ \frac{f_0}{N^2}\iint_{S}\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x} b' - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y} b'\right)_{z=0} dxdy = 0
\end{aligned}
$$

计及 $b' = f_0\frac{\partial\psi'}{\partial z}$，则有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=H} dxdy\\ &-\frac{f_0^2}{N^2}\iint_S \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)_{z=H} dxdy = 0\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=0} dxdy\\ &-\frac{f_0^2}{N^2}\iint_S \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy = 0\end{aligned} \tag{19}$$

把（11）、（14）、（15）和（19）四式相加，再减去（16）和（18）两式可得

$$\frac{d}{dt}\left[\iiint_\Omega (\mathcal{E}+\mathcal{Z})\, dxdydz - \iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=H} dxdy + \iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=0} dxdy\right] = 0 \tag{20}$$

或者

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = 0 \tag{21}$$

其中 $\tilde{E}$ 具有能量量纲，可称作广义能量，为一守恒量，其表达式为

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \iiint_\Omega (\mathcal{E}+\mathcal{Z})\, dxdydz - \iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=H} dxdy + \iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=0} dxdy\\ &= \iiint_\Omega \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2 + \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}}q'^2\right] dxdydz\\ &\quad - \iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=H} dxdy + \iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0 b'^2}{2N^2}\right)_{z=0} dxdy\end{aligned} \tag{22}$$

若把（18）、（19）两式等号右端第一项可分别记为

$$\frac{\partial E'_{BT}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0^2 b'^2}{2N^2}\right)_{z=H} dxdy$$

$$\frac{\partial E'_{BS}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\frac{f_0^2 b'^2}{2N^2}\right)_{z=0} dxdy$$

其中 E'_{BT} 与 E'_{BS} 分别为上下边界处的广义边界位能，体现了上下边界上的水平浮力梯度即温度梯度的影响，也就是斜压性的影响。这样（20）或（21）式亦可表示为

$$\frac{d}{dt}\left(E' + \tilde{\mathcal{Z}} - E'_{BT} + E'_{BS}\right) = 0 \tag{23}$$

（23）给出广义能量守恒关系，反映了扰动能量、扰动广义位涡拟能以及广义边界位能之间的关系，就其物理实质而言，这反映了扰动能量与大气内部的位涡、大气的斜压性（表现为上下边界上的水平浮力梯度即温度梯度）之间的动力学关系。

4 流动的稳定性

若流动稳定，则要求扰动能量 E' 总为有界；反之，若扰动能量 E' 无界，则流动为不稳定。由（20）式或（23）式可知，若满足

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}} > 0,\ \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\right)_{z=H} < 0,\ \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\right)_{z=0} > 0 \tag{24}$$

的条件，则扰动能量 E' 为有界。（24）式是扰动基本流动稳定的充分条件（Blumen，1968；Gill，1982；Vallis，2017），只不过 Blumen 针对非线性问题使用了 Arnold 的变分方法得到，我们针对线性问题，使用的方法更加直观，而且还可以用来讨论基本流和扰动之间的相互作用。（24）既然是基本流稳定的充分条件，那么只有该条件得不到满足时，基本流才有可能出现不稳定，也就是说，该条件的破坏是流动不稳定的必要条件。

$\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}} > 0$ 反映的是大气内部基本流的结构与基本流位涡之间的关系，体现大气内部的动力过程；$\left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\right)_{z=H} < 0$ 和 $\left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\right)_{z=0} > 0$ 分别反映了大气上边界和下边界的流场与浮力场即温度场之间的关系，体现了边界上大气斜压性的影响。若不考虑经向基流，即令 $\bar{v}=0$，则（24）式可表为

$$\frac{\partial\bar{\psi}/\partial y}{\partial\bar{q}/\partial y} > 0,\ \left(\frac{\partial\bar{\psi}/\partial y}{\partial\bar{b}/\partial y}\right)_{z=H} < 0,\ \left(\frac{\partial\bar{\psi}/\partial y}{\partial\bar{b}/\partial y}\right)_{z=0} > 0,$$

或者

$$\frac{\bar{u}}{\partial\bar{q}/\partial y} < 0,\ \left(\frac{\bar{u}}{\partial\bar{b}/\partial y}\right)_{z=H} > 0,\ \left(\frac{\bar{u}}{\partial\bar{b}/\partial y}\right)_{z=0} < 0, \tag{25}$$

（25）式若计入一参考气流 $\bar{u}_r$，即为 Pedlosky 的结果（Pedlosky，1964a,b；1987）。若计及中纬度对流层大气基本流动为西风，无论大气内部还是上下边界，均有 $\bar{u}>0$，则有 $\partial\bar{q}/\partial y$、$-\left(\partial\bar{b}/\partial y\right)_{z=H}$ 和 $\left(\partial\bar{b}/\partial y\right)_{z=0}$ 三者同号，此即所谓 Charney—Stern 条件（Green，1960；Charney 和 Stern，1962）。

若考虑 $z\to\infty$ 的情况，则（10）在上边界处不再适合，合适的边界条件应为单位面积气柱的能量为有界（曾庆存，1979；Zeng，1983）

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\right] dz < \infty \tag{26}$$

或者少欠严格但更加直观的所谓辐射边界条件（Pedlosky，1987），即

$$\iint_S w'\psi' dxdy = 0,\ \text{当}z \to \infty \tag{27}$$

亦或把大气上界的垂直边界条件取为（Marchuk，1974）

$$w' = 0,\ \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,\ \text{当}z \to \infty \tag{28}$$

在（26）、（27）或（28）作为上边界条件的情况下（关于大气上边界条件的详细论证见曾庆存，1979），大气上边界处的广义边界位能 E'_{BT} 为零，大气上边界对于大气内部没有影响，这样基本流动稳定的充分条件即（24）式简化为

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{q}} > 0,\ \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{b}}\right)_{z=0} > 0 \tag{29}$$

从（24）或（29）出发，针对只依赖于 y、z 的基本气流 $\bar{u}(y,z)$，可以得出关于斜压不稳定的经典结果（Holton，2004）。

5 扰动发展与经向基本流的影响

计及（15）和（16）两式，（11）式可写成

$$\begin{aligned}\frac{dE'}{dt} =& \iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right] dxdydz\\ &+\frac{f_0^2}{N^2}\iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right] dxdydz\\ &+\iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\right] dxdydz\end{aligned} \tag{30}$$

若扰动发展，则扰动能量将随时间增长，即 $\frac{dE'}{dt} > 0$；反之，若扰动衰减，扰动能量则随时间减少，即 $\frac{dE'}{dt} < 0$。（30）式等号右边有三项，其中第一项是正压过程对于扰动发展的作用，第二项是斜压过程的影响，第三项则是基本流的辐合辐散的影响。其中第三项的作用最为直观，因为 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 = v'^2$ 与 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2 = u'^2$ 均为正定量，所以若纬向基本流和经向基本流辐散，即 $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} > 0$、$\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} > 0$，则扰动发展；反之，若纬向基本流和经向基本流辐合，即 $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} < 0$、$\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} < 0$，则扰动衰减。由于 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 均为地转流，其整体散度为零，所以该项对于扰动能量随时间的变化贡献很小，几乎可以忽略。这样以来，（30）式

可近似写成

$$
\begin{aligned}
\frac{dE'}{dt} &\approx \iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right]dxdydz \\
&+\frac{f_0^2}{N^2}\iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right]dxdydz \\
&=-\iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right]dxdydz \\
&-\iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right]dxdydz
\end{aligned}
\tag{31}
$$

又因为

$$
\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)=-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\psi \tag{32}
$$

$$
\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\psi \tag{33}
$$

$$
\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\Big/\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)=-\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi \tag{34}
$$

$$
\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial z}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\Big/\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\psi \tag{35}
$$

这样（31）式可写成

$$
\begin{aligned}
\frac{dE'}{dt} &\approx -\iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\psi+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\psi\right]dxdydz \\
&-\iiint_\Omega \left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi+\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\psi\right]dxdydz
\end{aligned}
\tag{36}
$$

（36）式约等于号右边第一个积分是纬向基本气流对于扰动能量的影响，其中方括号中的第一项为正压过程对扰动的影响，第二项是斜压过程的影响；第二个积分则是经向基本气流对于扰动能量的影响，方括号中的第一项与第二项分别是为正压过程和斜压过程对扰动能量的影响。关于纬向基本气流的影响，曾庆存（曾庆存，1979；Zeng，1983）和 Pedlosky（Pedlosky，1987）等做过详细的讨论，此处为了与经向基本气流做对比，稍作总结，着重讨论经向基本气流的影响。

以北半球中纬度为例，纬向基本风场通常为西风，对于纬向基本流，由（32）式，在急流轴以南，$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}>0$，而 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2$ 为正定，因此只有 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\psi<0$，也就是 ψ' 的等值线即扰动流线呈西北—东南走向，该项的积分才为正，此时纬向基本流的能量会通过正压过程转换为扰动的能量，令扰动发展。反之，若 ψ' 的等值线即扰动流线呈西南—东北走向，即 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\psi>0$，该项的积分为负，此时扰动能量通过正压过程转变为基本气流的动能，扰动衰减，而基

本气流则得到加强。急流轴以北，$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}<0$，$\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2$ 正定，只有 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\psi>0$，也就是 ψ' 的等值线即扰动流线呈东北—西南走向，该项的积分才为正值，纬向基本流的能量通过正压过程转换为扰动的能量，令扰动发展。若 ψ' 的等值线即扰动流线呈西北—东南走向，即 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\psi<0$，该项的积分为负，扰动能量将通过正压过程转变为基本气流的动能，扰动衰减，基本气流增强。

对于对流层大气,通常有 $\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}>0$,而 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2$ 为正定,因此只有 $(\frac{\partial z}{\partial x})_\psi<0$，也就是 ψ' 的等值线即扰动流线随高度向西倾斜，该项的积分则为正值，此时纬向基本气流的有效位能将转变为扰动能量，扰动将发展。反之，如果 $(\frac{\partial z}{\partial x})_\psi>0$，也就是 ψ' 的等值线即扰动流线随高度向东倾斜，该项的积分则为负值，此时扰动能量将转变为纬向基本气流的位能，扰动将衰减。

现在讨论经向基本气流对于扰动发展和衰减的影响。对于经向基本气流，以北半球中纬度的情况为例，经向基本风场在槽前脊后为南风，槽后脊前则为北风，所以分两种情况来讨论。

首先讨论正压过程的影响。由（34）式，槽前脊后的南风基本风场中，因 $\bar{v}>0$，急流轴以西有 $\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}>0$，而 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2$ 为正定，因此只有 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi<0$，也就是 ψ' 的等值线即扰动流线呈西北—东南走向，此时该项的积分为正，经向基本流的能量通过正压过程转换为扰动能量，令扰动发展；此时对于东北—西南走向的扰动流线即 ψ' 的等值线的扰动，由于 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi>0$，该项的积分为负，扰动衰减。急流轴以东，则有 $\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}<0$，又 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2$ 正定，因而只有 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi>0$，$\psi'$ 的等值线即扰动流线呈东北—西南走向时，该项的积分为正，经向基本流的能量通过正压过程转换为扰动能量，令扰动发展；对于西北—东南走向的扰动流线即 ψ' 的等值线的扰动，由于 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi<0$，该项的积分为负，扰动衰减。

对于槽后脊前的北风基本风场，因 $\bar{v}<0$，急流轴以西，故有 $\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}<0$，而 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2$ 正定，所以只有 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi>0$，即 ψ' 的等值线即扰动流线呈东北—西南走向时，该项的积分为正，经向基本流的能量通过正压过程转换为扰动能量，扰动发展；对于西北—东南走向的扰动流线即 ψ' 的等值线的扰动，由于 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi<0$，该项的积分为负，扰动衰减。急流轴以东，$\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}>0$，$\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2$ 为正定，只有 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi<0$，也就是 ψ' 的等值线即扰动流线呈西北—东南走向，此时该项的积分为正，经向基本流的能量通过正压过程转换为扰动能量，扰动才能发展；此时对于东北—西南走向的扰动流线即 ψ' 的等值线的扰动，由于 $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\psi>0$，该项的积分为负，扰动衰减。

对于斜压过程而言，槽前脊后的南风基本风场中，$\bar{v}>0$，而且 $\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}>0$，而 $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2$ 为正定，因此只有 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\psi<0$，也就是 ψ' 的等值线即扰动流线随

高度向南倾斜，该项的积分则为正值，此时纬向基本气流的有效位能将转变为扰动能量，扰动将发展；反之，若 ψ' 的等值线即扰动流线随高度向北倾斜，此时 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\psi} > 0$，该项的积分则为负值，此时扰动能量将转变为纬向基本气流的位能，扰动将衰减。对于槽后脊前的北风基本风场，$\bar{v} < 0$，$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} < 0$，而 $\left(\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)^2$ 为正定，因此只有 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\psi} > 0$，扰动流函数 ψ' 的等值线即扰动流线随高度向北倾斜，该项的积分为正值，此时纬向基本气流的有效位能将转变为扰动能量，扰动发展；反之，若 ψ' 的等值线即扰动流线随高度向南倾斜，即 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\psi} > 0$，该项的积分则为负值，此时扰动能量将转变为纬向基本气流的位能，扰动衰减。

时间平均的中纬度基本气流，虽然沿流动方向蜿蜒变化，但其拓扑结构在上下游是一致的。在水平面上，风速由急流轴向两侧减小；垂直方向，风速由地面向高空增加（对流层）。基本气流两侧的扰动结构也随着基流的蜿蜒而发生相应的变化，但发展（衰减）的扰动与基本气流的局地配置的拓扑结构在上下游也是一致的。具体来说，以急流轴为中心，正压发展的扰动，其流函数等值线在水平面上向基本气流来流方向的上游倾斜（平均意义上），而正压衰减的扰动，其流函数等值线在水平面上向基本气流来流方向的下游倾斜（平均意义上）；对流层中，斜压发展的扰动，其流函数等值线在垂直剖面上随高度增加向基本气流来流方向的上游倾斜（平均意义上），斜压衰减的扰动，其流函数等值线在垂直剖面上随高度增加向基本气流来流方向的下游倾斜（平均意义上）。

比较（36）式约等于号右端的两个积分可以发现，纬向基本气流和经向基本气流的作用是类似的，无论其水平切变还是垂直切变二者的空间结构也是类似的，扰动发展与否决定于切变结构与扰动流线结构的搭配。对于纬向基本气流为正压和斜压发展的扰动，对于同样结构的经向基本气流亦为正压和斜压发展，而同一非纬向的基本气流，其时间平均的纬向分量和经向分量的水平和垂直结构通常是相似的，因此对于固定强度的纬向基本气流，若其为正压发展或斜压发展，那么计入经向基本气流之后，会令扰动的发展得到加强，也就是说，经向基本气流的存在，会令不稳定的扰动更加不稳定，这与前人用标准模法所得结论一致（Pedlosky，1987）。

对于中纬度基本气流，其强度主要由其两侧的温差决定，海陆分布和地形对其空间结构和强度也有影响。依热成风原理，若基本气流两侧温差减小，则其强度会减弱。按目前比较一致的看法，全球变暖的后果是高纬度升温比低纬度显著，陆地升温比海洋显著，这样以来，减小了的南北温差会令纬向基本气流 $\bar{u}$ 及 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ 有所减小，而增大了的海陆温差会令经向基本气流 $\bar{v}$ 及 $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ 有所增加，也就是说带状西风强度减弱，基本气流更加弯曲，其上的槽脊更加显著，甚至槽脊的数量也会增加，基本气流的总长度也会因为其更

加弯曲和可能增加的槽脊数量而增加。从（36）式等号右端第二项的性质以及上述关于经向基本气流对于扰动发展的影响分析可见，经向基本气流的参与，使得具备正压发展机制和斜压发展机制的扰动更容易发展，而且由于全球变暖因素导致的经向基本气流的加强和可能出现的槽脊数量的增加，使得经向基本气流的强度增强，区域增大，更有利于扰动的发展。在一定程度上可以认为，全球变暖等因素导致的经向基本气流强度增强，区域增大，使得中纬度大气更加容易发生不稳定，因而导致中纬度天气系统更加容易发展，甚至增加极端天气事件发生的频数。

6 结论与讨论

本文针对时间平均的非纬向基本气流，从线性化的位势涡度方程出发，结合适当的边界条件，导出扰动能量和广义位涡拟能演变的方程，以及广义能量演变方程。在此基础上，给出了时间平均的非纬向基流稳定的条件，即时间平均的非纬向基流的 Bulumen 判据。该条件是基本流稳定的充分条件，亦是基本流不稳定的必要条件，针对更加特殊的基本流，该条件会退化为 Charney—Stern—Pedlosky 条件或者 Charney—Stern 条件等。Bulumen 的工作是针对非线性基本流动使用变分方法得到，具有更广泛的意义，但是其缺陷在于无法直接用来研究基本流的结构与扰动的结构之间的关系，也就无法通过检视基本流的结构、扰动的结构以及二者的配置来判断扰动的发展。对于正压发展的扰动，以急流轴为中心，其流函数等值线在水平面上向基本气流来流方向的上游倾斜，而对于正压衰减的扰动，以急流轴为中心，其流函数等值线在水平面上向基本气流来流方向的下游倾斜。对流层大气中，斜压发展的扰动，其流函数等值线在垂直剖面上随高度增加向基本气流来流方向的上游倾斜，而斜压衰减的扰动，其流函数等值线在垂直剖面上随高度增加向基本气流来流方向的下游倾斜。从这些简单的结构与配置关系，就可以看出扰动发展或者衰减的属性，这在普通的天气图上就可以实现，非常直观、实用。以往的研究，尤其是能量学研究，主要针对纬向基流进行，本文是对以往工作的推广。

对于非纬向基本气流，因整个基本气流的基本结构是相似的，其纬向部分若满足扰动发展的条件，经向部分往往也满足满足扰动发展的条件，因而对于同样强度的纬向基本气流，经向基本气流的存在会促进并加强扰动的发展，令扰动更加不稳定。这一结论最早由 Pedlosky（Pedlosky，1987）得出，但其工作是在二层模式中并针对非常特殊的基本流使用标准模方法得到的，所得结果缺乏一般性。本文的研究可以看成 Pedlosky 工作的发展和补充。

在全球变暖的背景下，目前比较一致的看法认为南北温差会有所减小，

而海陆温差会有所增加。依热成风原理，中纬度行星风带将会出现纬向基本风场减弱而经向基本风场加强的趋势，西风指数减小，基本气流更加弯曲，大槽大脊更加显著，槽脊数量也可能增加。其结果是两方面的，一是纬向基本气流减弱导致其对扰动发展的贡献减小，扰动更加不易发展，基本气流有更加稳定的趋势；另一方面，由于经向气流的加强以及经向基本气流对于扰动发展的贡献，弥补了纬向基本气流减弱的后果，此外槽脊数量的增加，也令经向基本气流所占的比重增加，这样进一步加强了经向基本气流的贡献，令中纬度行星风带更加不稳定，因而也就更容易生成天气尺度的扰动，甚至产生极端天气事件。

参考文献

Bulumen W.1968. On the stability of quasi-geostrophic flow [J]. J. Atmos. Sci. 25: 929-933.

Charney J G. 1947. The dynamics of long wave in a baroclinic westerly current [J]. J. Meteor. 4: 135-163.

Charney J, Stern M E. 1962. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere [J]. J. Atmos. Sci.19: 113-126.

Drazin P G, Reid W H. 2004. Hydrodynamic Stability [M]. Cambridge: Cambridge University Press.

Eady E T. 1949. Long waves and cyclone waves [J]. Tellus 1: 33-52.

Fjørtoft, R. 1950. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex [J]. Geofis. Publ.17: 1-52.

Francis J A and Vavrus S J. 2015. Evidence for a wavier jet stream in response to rapid Arctic warming [J]. Environ. Res. Lett. 10 014005

Gill A E. 1982. Atmosphere-Ocean Dynamics [M]. Academic Press.

Green J S A. 1960. A problem in baroclinic stability [J]. Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 92: 335-345.

Holton J R. 2004. An Introduction to Dynamic Meteorology [M]. 4th Edition. Elsevier.

Joseph, D D. 1966. Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy, Arch. Rational Mech. Anal.[M]. 22: 163-184.

Kuo H L. 1949. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere [J]. Journal of Meteorology, 6: 105-122. doi.org/10.1175/1520-0469(1949)006<0105:DIOTDN>2.0.CO;2

Kuo H L. 1973. Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory [J]. Advances in Applied Mechanics, 13: 247-330. doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70145-5

Lin C C. 1945. On the stability of two-dimensional parallel flows. II. Stability in an inviscid fluid [J]. Quarterly of Applied Mathematics, (3)4: 218-234.

卢佩生. 1981. 正压大气中长波的演变 [J]. 气象学报，39(2):141-149. Lu P S.1981. On the evolution process of long waves in the barotropic atmosphere [J]. Acta Meteorologica Sinica, 39(2):141-149.

Marchuk G I. 1974. Numerical Methods in Weather Prediction [M]. Academic Press.

Pedlosky J. 1964a. The stability of currents in the atmosphere and the ocean. Part I [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 21: 201–219.

Pedlosky J. 1964b. The stability of currents in the atmosphere and the ocean. Part II [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 21: 342–353.

Pedlosky J. 1987. Geophysical Fluid Dynamics [M]. New York: Springer-Verlag.

Rayleigh L. 1880. On the stability, or instability, of certain fluid Motions [J]. Proceedings London Mathematical Society, s1-11: 57-72. doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57

Vallis G K. 2017. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics [M]. Cambridge: Cambridge University Press.

Xiang, J, Mu M. 1997. Saturation of nonlinear instability of parallel shear flow [J]. Progress in Natural Science, 7: 239–243.

Xiang, J, Sun L T. 2002. Nonlinear saturation of baroclinic instability in the Phillips model: The case of energy [J]. Adv. Atmos. Sci. 19: 1079–1090. doi.org/10.1007/s00376-002-0066-0

叶笃正. 1964. 波状基本气流中的若干扰动动力学问题 [J]. 气象学报, 34(1):1-10. Yeh T C. 1964. Some aspects of the dynamics of disturbances in a wave-shaped basic westerly current [J]. Acta Meteorologica Sinica, 34(1):1-10.

曾庆存. 1979. 数值天气预报的数学物理基础 [M]. 北京：科学出版社. Zeng Q C. 1979. The Physical-mathematical Basis of Numerical Weather Prediction (in Chinese) [M]. Beijing: Science Press.

Zeng Q C, Lu P S. 1981. Evolutionary process of disturbances in nonuniform bacis current [J]. Scientia Sinica, XXIV(4):508-520.

曾庆存, 卢佩生. 1983. 中纬度天气系统的演变过程 [J]. 气象，9(11):33-39.
Zeng Q C, Lu P S.1983. Evolutionary process of mid-latitude synoptic system [J]. Meteor Mon, 9(11):33-39.
Zeng Q C. 1983. The evolution of a Rossby-wave packet in a three-dimensional baroclinic atmosphere [J]. Journal of Atmospheric Sciences, Journal of Atmospheric Sciences, 40(1): 73-84.
Zeng Q C, Lu P S, Li R F, Yuan C G. 1986a: Evolution of large scale disturbances and their interaction with mean flow in a rotating barotropic atmosphere —part I.[J]. Adv. Atmos. Sci., 3(1): 39-58.
Zeng Q C, Lu P S, Li R F, Yuan C G. 1986b: Evolution of large scale disturbances and their interaction with mean flow in a rotating barotropic atmosphere —part II.[J]. Adv. Atmos. Sci., 3(2): 172-188.