

正压大气中的螺旋行星波

巢纪平 叶笃正

(中国科学院地理研究所) (中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文对天气图上常见的螺旋状的行星波(Rossby波)的形式、发展以及其它方面的动力学性质作了理论分析,并讨论了它在维持大气环流中所起的作用。

一、引 言

大气环流的基本状态是极地的纬向气流,并在纬向气流上迭加了种种不均匀的波动。Rossby^[1]最早研究了其中的行星波。行星波理论已成为近代天气预报、数值预报和大气环流研究的基础。三十多年来,在动力气象学中行星波理论虽已有了重大的进展,例如关于它的能量频散过程^[2]、在正压和斜压大气中的不稳定性^[3,4]等,但一般研究它的都是对称的正弦波,即波的等位相线,或相当于天气图上观测到的槽、脊线,是沿经线方向的(即南北走向)。然而,在实际大气中的行星波波型一般在高纬度其槽线呈西北—东南走向,而在中、低纬度则自东北向西南倾斜,亦即波的等位相线具有螺旋状的结构。

正弦和螺旋行星波,不仅在几何形状上有所不同,主要的还在于它们的动力学性质是很不一样的。因此在影响天气的类型以及构成大气环流的很多现象中所起的作用也将会有不少差别。例如,为了维持大气环流的平均状态,需要有一种过程把低纬东风带从地球得到的角动量,在高空大量地向中、高纬输送,同时极地东风带从地球得到的少量的角动量也要输送到西风带去,总的来说,角动量的这种南北输送是依靠大型水平涡旋来完成的,这种大型水平涡旋就是观测到的行星波。Starr曾指出(见[5]),为了能把低纬的角动量输送到较高的纬度,槽脊线需要从东北向西南倾斜,使在一个波长范围内,沿纬向风速 u 和经向风速 v 之间有净的正相关,即 $\overline{uv} > 0$,而纯粹对称的正弦波其 $\overline{uv} = 0$,不能起到南北输送角动量的作用。叶笃正进而指出^[5],若从大气中的涡度平衡出发,要使中纬度西风得到加强,则不仅要槽线倾斜,还要槽线的倾斜度向北减小,为使极地东风带得到的少量角动量向南输送到西风带,则槽线需呈微弱的西北—东南向,因此槽线需呈上述的螺旋状。可见,正弦和螺旋行星波在维持大气环流中所起的作用是很不一样的。

一般来说,在一基本流场中,一个扰动的位相速有两部分,一是基本流速的本身,二是由动力学制约引起的附加项。如基本场是绕一极点旋转的,而其角速 Ω 又是随 r (以极点为中心)增加或减少的函数,,则其上的扰动将是螺旋状。这种现象大至银河系的旋臂^[6,7],小至台风中的雨带无不如此。本文将用一简单的正压模式,对大气中螺旋状行星

1976年12月7日收到

波的形成、发展和能量的频散等性质在理论上给以初步的分析。

二、基本方程和螺旋波的表达

取原点在极地的极坐标系 (r, θ) , r 指向低纬为正, θ 逆时针为正, 相应的空气运动速度为 (u, v) 。

在这个坐标系中, 旋转地球大气的运动方程和连续性方程分别为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{u}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{v}{r}\right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

式中 p, ρ 分别为空气的压力和密度, f 为柯里奥利参数。

设大气运动的基本状态为梯度风平衡, 即

$$\Omega^2 r + f\Omega r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (4)$$

其中 Ω 为基本气流的旋转角速度。在这基本环流上迭加了一小扰动, 即

$$v = \Omega(r) \cdot r + v', \quad u = u', \quad p = P(r) + p' \quad (5)$$

线性化方程组为(略去“,”号)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u}{\partial \theta} - (2\Omega + f)v = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{K^2}{2\Omega} + f\right)u = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (8)$$

式中

$$K^2 = (2\Omega)^2 \left(1 + \frac{r}{2\Omega} \frac{d\Omega}{dr}\right)$$

而

$$\frac{K^2}{2\Omega} = \left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{1}{r} \frac{d\Omega r^2}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dM}{dr}$$

其中 M 为基本气流的相对角动量。因此

$$\frac{K^2}{2\Omega} + f \equiv \zeta_0$$

为基本气流的绝对涡度。

由方程组(6)–(8)得到涡度方程

$$\frac{\partial r\zeta}{\partial r} + \Omega \frac{\partial r\zeta}{\partial \theta} + \frac{d\zeta_0}{dr}(ru) = 0 \quad (9)$$

式中

$$\zeta \equiv \frac{1}{r} \left(\frac{\partial rv}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \quad (10)$$

为扰动运动的相对涡度。引进流函数 ψ ，定义成

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (11)$$

由此

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \theta^2}. \quad (12)$$

于是方程(9)为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \theta^2} \right] - \frac{d\zeta_s}{dr} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad (13)$$

或者,取对数坐标

$$\xi = \ln(r/r_0) \quad (14)$$

上面的方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{d\zeta_s}{d\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad (15)$$

这是我们要研究的基本方程。

取方程(15)的简谐波解

$$\psi \sim e^{i\varphi} \quad (16)$$

式中位相函数

$$\varphi = \omega t + k\xi - m\theta \quad (17)$$

并且

$$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad k = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}. \quad (18)$$

显然,由 $\varphi = \text{常数}$,得到

$$\theta = \frac{1}{m}(\omega t + k\xi) + \text{常数} \quad (19)$$

这表明,于对任何指定时刻 t , 当频率 ω 固定时,有

$$\theta = \frac{1}{m} k \ln r + C(t) \quad (20)$$

由此可见,等位相线(例如槽、脊线)是一簇对数螺旋曲线,并且当 $k > 0$ 时, θ 将随 ξ 的增加而增加,此为导式(leading)对数螺旋,亦即槽、脊线自西北伸向东南;当 $k < 0$ 时, θ 将随 ξ 的增加而减小,此为曳式(trailing)对数螺旋,亦即槽脊线自东北伸向西南。因此形为(16)的解表征了一类螺旋波。

引进特征量 Ω^* , ϕ^* , f^* , 相应的无量纲量为

$$\tilde{t} = \Omega^* t, \quad \tilde{\varphi} = \varphi / \phi^*, \quad \tilde{\xi}_s = \xi_s / f^*, \quad \tilde{\Omega} = \Omega / \Omega^* \quad (21)$$

基本方程(15)的无量纲形式为(略去“ $\sim$ ”号)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\theta}^2} \right) - \frac{f^*}{\Omega^*} \frac{d\zeta_s}{d\tilde{\xi}} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\theta}} = 0 \quad (22)$$

现设波振幅是时间和经向距离的缓变函数,则形为(16)的解可以写成

$$\phi = \Psi(T, R) e^{i\varphi} \quad (23)$$

式中

$$T = \varepsilon t, R = \varepsilon \xi \quad (24)$$

$\varepsilon = Q^*/f^* \ll 1$, 为一小参数. 假设 ω, k 也是 R, T 的缓变函数, 则(22)式可写成

$$\begin{aligned} & \left[i(\omega - mQ) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \right] \left[-(k^2 + m^2)\Psi + \varepsilon i \left(2k \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial k}{\partial R} \Psi \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \right] \\ & + im \frac{d\zeta_s}{dR} \Psi = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

这是当解取形式(23)时, 所要研究的基本方程.

在以下的分析中, 并将解按 ε 的幂次展开为

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \dots \quad (26)$$

三、频散关系和波振幅方程

将(26)式代入方程(25)得到零级近似方程为

$$i \left[-(\omega - mQ)(k^2 + m^2) + m \frac{d\zeta_s}{dR} \right] \Psi_0 = 0 \quad (27)$$

由于 $\Psi_0 \neq 0$, 所以有频散关系

$$\omega = mQ + \frac{m}{k^2 + m^2} \frac{d\zeta_s}{dR} \quad (28)$$

或者令

$$Q_p = \frac{\omega}{m} \quad (29)$$

Q_p 为沿 θ 方向波的相速度, 由此有

$$Q_p = Q + \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{d\zeta_s}{dR} \quad (30)$$

这是螺旋行星波的位相速公式, 也就是在所取的基本气流中的 Rossby 波速公式.

沿经向的群速度为

$$C_s = -\frac{d\omega}{dk} \quad (31)$$

正值指向低纬. 由(30)式得到

$$C_s = \frac{2mk}{(k^2 + m^2)^2} \frac{d\zeta_s}{dR} \quad (32)$$

一级近似方程为

$$\begin{aligned} & i \left[-(\omega - mQ)(k^2 + m^2) + m \frac{d\zeta_s}{dR} \right] \Psi_1 - \left[\frac{\partial}{\partial T} ((k^2 + m^2)\Psi_0) \right. \\ & \left. + (\omega - mQ) \left(2k \frac{\partial \Psi_0}{\partial R} + \frac{\partial k}{\partial R} \Psi_0 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

考虑到(28)和(32)式, 得到

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial T} + C_s \frac{\partial \Psi_0}{\partial R} = -\frac{1}{2} C_s \frac{\partial \ln k}{\partial R} \Psi_0 - \frac{\partial \ln(k^2 + m^2)}{\partial T} \Psi_0 \quad (34)$$

或者乘以 Ψ_0 后, 有

$$\frac{\partial \Psi_0^2}{\partial T} + C_g \frac{\partial \Psi_0^2}{\partial R} = -C_g \frac{\partial \ln k}{\partial R} \Psi_0^2 - \frac{\partial \ln(k^2 + m^2)}{\partial T} \Psi_0^2 \quad (35)$$

由于波动的能量正比于波的振幅平方,即 $E \propto \Psi_0^2$, 所以这是波能量变化方程。

将方程(35)改写成

$$\frac{\partial \ln(k \Psi_0^2)}{\partial T} + C_g \frac{\partial \ln(k \Psi_0^2)}{\partial R} = -\frac{\partial \ln \left(\frac{k^2 + m^2}{k} \right)}{\partial T} \quad (36)$$

也可以写成

$$\frac{\partial(k \Psi_0^2)}{\partial T} + C_g \frac{\partial(k \Psi_0^2)}{\partial R} = -\left(\frac{k}{k^2 + m^2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{(k^2 + m^2)^2}{k} \right) \Psi_0^2 \quad (37)$$

量 $k \Psi_0^2$ 可以解释成单位波长中的能量。可见当波列以群速度沿经向方向传播时,其单位波长中能量所以有变化,是由于经向波数和纬向波数随时间有改变而引起。

在大气中, $|k|$ 平均在 2 附近, m 在 6 附近, 如果 k 和 m 的时间变化很小, 那么方程(37)右端可以略去, 在这种情况下简化成

$$\frac{\partial(k \Psi_0^2)}{\partial T} + C_g \frac{\partial(k \Psi_0^2)}{\partial R} = 0 \quad (38)$$

这表明波列以群速度传播时,单位波长中的能量近似地守恒。

在定常情况下,由(38)式进而有

$$k \Psi_0^2 = \text{常数} \quad (39)$$

即单位波长中的能量将不随纬度而改变。

四、结果讨论

根据上面的理论分析,可以作出几点讨论:

1. 位相速和波形

在绕极传播的波列中,等位相线(例如槽、脊线)将以(30)式的相速度移动,这样等位相线的形状将随时间变化,并趋向位相速随纬度的分布,因此,由位相速随纬度的分布可以间接地推测等位相线的形状。

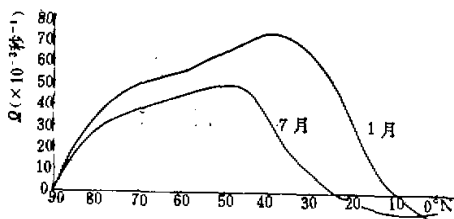


图 1 500 毫巴 Q 随纬度分布。

图 1 是 500 毫巴 1 月和 7 月 Q 随纬度的分布,再考虑 f 随纬度的变化后,可以算出绝对涡度梯度 $d\zeta_a/d\lambda$ 的分布,计算表明,绝对涡度梯度在各个纬度皆取负值(图 2)。这样由(30)式可见,局地的位相速皆小于同纬度气流的角速度。图 3a 和 b 分别为 $|k|$ 平均取 1、 m 取 3(图 3a)和 $|k|$ 平均取 2、 m 取 6(图 3b)情况下 1 月份的位相速。由此推测出在高纬度是导波,在较低纬度是曳波。1 月份西风角速度极值在 40°N 附近,在 $|k| = 1$ 、 $m = 3$

时,导波和曳波的分界线北移到 75°N 左右,并在 50°N 以南,波将自东向西传播。在 $|k| = 2, m = 6$ 时,在 60°N 以北是导波,以南是曳波,在 38°N 以南,波将自东向西传播。图 4 是 7 月份的情况,这时西风角速度在 47°N 左右最大,当 $|k| = 1, m = 3$ 时,在 75°N 以北是导波,即槽、脊线由西北指向东南,在以南是曳波即槽、脊线由东北指向西南;当 $|k| = 2, m = 6$ 时,导波和曳波的分界纬度在 65°N 附近。

除负位相速(自东向西传播的后退波)较偏北外,计算所得的波形和天气图上观测到

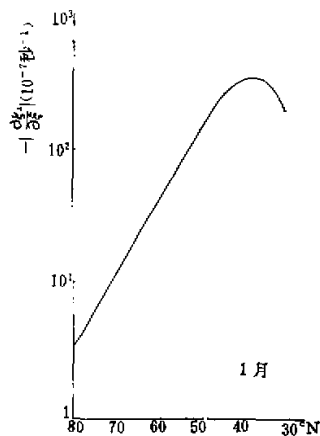


图 2a 500 毫巴 1 月 $-\left|\frac{d\psi_e}{d\xi}\right|$

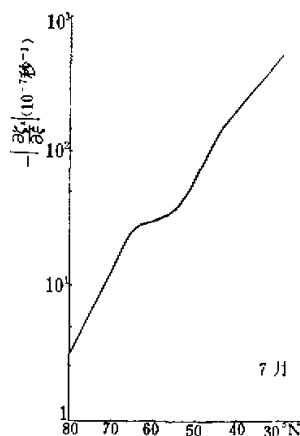


图 2b 500 毫巴 7 月 $-\left|\frac{d\psi_e}{d\xi}\right|$

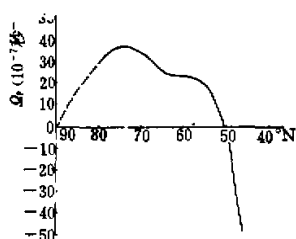


图 3a 500 毫巴 1 月 $Q_p(m=3, |k|=1)$

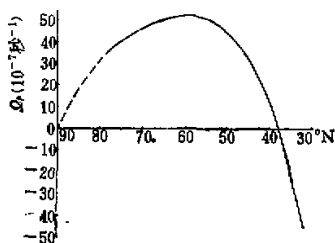


图 3b 500 毫巴 1 月 $Q_p(m=6, |k|=2)$

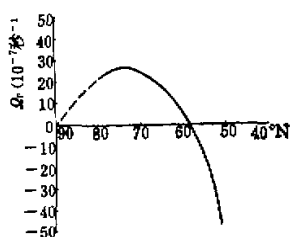


图 4a 500 毫巴 7 月 $Q_p(m=3, |k|=1)$

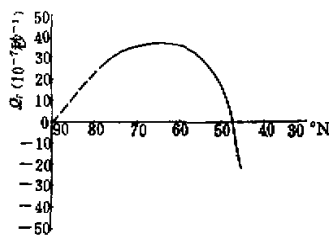


图 4b 500 毫巴 7 月 $Q_p(m=6, |k|=2)$

的槽、脊线的走向是接近的。

2. 群速度和波能量的径向传播

由上面的观测资料,计算出在各个纬度都有 $d\zeta_e/d\xi < 0$, 由(32)式可见,对导式波,能量将从低纬传向高纬,对曳式波,能量将从高纬传向低纬。由上面的计算,在中、高纬是导波,在中、低纬是曳波,而中纬度是斜压性最强的地区,由于斜压不稳定,背景场中储藏的部分内能将通过斜压扰动的发展而被释放出来,这部分释放出来的能量将通过这类螺旋行星波传输到高纬和低纬去。

3. 螺旋波的维持和发展

在第1点中讨论了在较差转动气流中螺旋波的形成,现进一步讨论维持它的能源。

将方程(38)改写成

$$\frac{\partial(k\Psi_0^2)}{\partial T} + \frac{\partial C_g(k\Psi_0^2)}{\partial R} = k \frac{\partial C_g}{\partial R} \Psi_0^2. \quad (40)$$

设在区域的边界 $R = R_1$ 和 $R = R_2$ 上, $\Psi_0 = 0$, 积分上式得

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{R_1}^{R_2} (k\Psi_0^2) dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial C_g}{\partial R} (k\Psi_0^2) dR \quad (41)$$

如果在同一类波形的区域中,波数 $|k|$ 的径向变化不大,则群速度的变化主要决定于 $d\zeta_e/dR$ 的分布。由图2,由于 $d\zeta_e/dR < 0$, 并愈向低纬其绝对值愈大,所以曳波的群速度为正(指向低纬)同时是辐散的,即 $\partial C_g/\partial R < 0$, 因此如果在整个区域中都为曳波,则由方程(41)得

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{R_1}^{R_2} |k| \Psi_0^2 dR > 0$$

这表明在整个区域中单位波长中的波能量要增加,也即这时曳波可以得到维持和发展。由于群速度辐散是绝对涡度梯度在经向方向的不均匀性造成,所以波发展的能量主要来自基本气流。

反之,对导波,当 $d\zeta_e/dR < 0$ 时, $C_g < 0$, 但后者的绝对值也是辐散的,因此有

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{R_1}^{R_2} |k| \Psi_0^2 dR < 0$$

这表明单纯的导波不能维持。实际上,在天气图上,至少在长时间的平均图上没有观测到大范围的导式波动。

由于整体的曳式波动在区域中的总能量要不断增加,因此要出现一个准平衡状态的波形,必然要在区域中导式和曳式部分兼有,这就是大气中常见的在极区高纬度为导式而在中高纬和低纬为曳式的波形。

4. 大气环流维持的物理图案

根据以上的讨论,可以绘出维持大气环流的一个简单的物理图案。当旋转的地球表面上接受到不均匀分布的太阳辐射后,在辐射平衡条件下形成了纬向的东、西风带。由于斜压不稳定,中纬度西风带中蕴藏的内能将通过扰动的发展而释放出来,由于基本气流角速度的分布和柯里奥利参数随纬度的变化(球面性作用),这些扰动将逐渐演化成导式和曳式的螺旋行星波。通过这类行星波的波动过程,将把中纬度释放出来的能量向高纬和低纬输送。由于能量的不断释放和向外输送,中纬度的西风强度将解弱。但在另一方面,

通过极区为导式和以南为曳式的扰动气流,又要将低纬东风带和极地东风带从地球得到的角动量带到中纬去,并使西风加强。这几种过程相互制约的结果,就出现了长时期所观测到的准平衡态的大气环流图式。

5. 推论

从观测量,旋转银河系中有螺旋状的星系臂,旋转地球大气中有螺旋状的行星波,旋转的台风中也有螺旋状的雨带。这三者的空间和时间尺度相差非常大,其中运动的动力学也有巨大的区别。但三者有一共同特点,即其基本流场都是围绕一点旋转的,而其角速度 Ω 又是 r 的函数(较差转动),这就使得它们都有螺旋状的扰动。由此推理,其它旋转的系统(如中纬度的气旋和雷暴以及龙卷等)中,也将存在螺旋状的扰动,如果它们的位相速随 r 增加或减小的话,随 r 增加将成导式,随 r 减小则呈曳式。

参 考 资 料

- [1] C. G. Rossby, *J. Marine. Res.* 1939, **2**, pp. 38—55.
- [2] T. C. Yeh, (叶笃正) *J. Met.* 1949, **6**, pp. 1—16.
- [3] H. L. Kuo, (郭晓岚) *J. Met.* 1949, **6**, pp. 105—122.
- [4] J. G. Charney, *J. Met.* 1947, **4**, **5**, pp. 135—162.
- [5] 叶笃正、朱抱真,大气环流的若干基本问题,科学出版社,1958.
- [6] C. C. Lin, & H. H. Shu, *Astrophys. J.* 1964, **140**, pp. 646—655.
- [7] 解伯民、巢纪平,旋涡星系密度波的演化,1976,(尚未发表)