实测风场在数值天气预报中的应用

曾 庆 存

（中国科学院大气物理研究所）

一、初始场的误差

我国有较稠密的高空风测站网，相当广大的地区又位于中低纬度带，天气系统在风场中比在气压场中有更明显的反映，使用风场资料在天气预报中有很重要的意义．毫无疑问，在数值天气预告中应用这些实测风场也是很重要的．另方面，为了提高预报效能，则又有必要使用较精确的原始方程式组．但这时如果直接用实测风场作始始场，却会得到紊乱不堪的计算结果．因此必须对问题作深入的研究．

以往人们常常把实测风场的误差看得过于严重．其实风场虽然有相当的误差，但它和温压场的观测误差一样，都具有偶然误差的性质，不是系统误差．故若将实测风场按水平面或三度空间作正交展开，则其长波部分应认为是足够准确的，误差只包括在短波部分之内．可见，要克服计算紊乱，关键在于对风场的短波部分进行适当的处理．同理，也应对温压场的短波部分进行适当的处理．

记“真实的”初始场为 $f_0(x, y, \zeta)$，而观测得到的场为 $\tilde{f}_0(x, y, \zeta)$．这里 x, y 为水平坐标，$\zeta = p/p_s$，p——气压，p_s——地表面气压．记长波部分各为 $f_0^*(x, y, \zeta)$及 $\tilde{f}_0^*(x, y, \zeta)$，而短波部分各为 $f_0'(x, y, \zeta)$及 $\tilde{f}_0'(x, y, \zeta)$．为书写方便起见，以后我们省去下标“○”．初始场 f 的观测误差 $f(x, y, \zeta) - \tilde{f}(x, y, \zeta)$ 沿全区域(V)的均方根值应等于观测的标准误差 ε_f．既然可以认为 $\tilde{f}^*$ 无误差，故有：

$$\|f' - \tilde{f}'\| = \varepsilon_f. \tag{1}$$

其中引入了记号

$$\|f\| \equiv \left\{\frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} f^2(x, y, \zeta)\, d\zeta dx dy\right\}^{1/2}, \tag{2}$$

而 V 就是区域(V)的体积．

显然，沿 x 轴或 y 轴的风速分量 u 及 v 有相同的观测标准误差，而全风速的误差则是它的$\sqrt{2}$倍．今记全风速的观测标准误差为 ε_v．此外，如引入流函数 ψ 及速度势 φ，则有

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{3}$$

再引入记号

$$\|\nabla f\|^2 \equiv \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] d\zeta dx dy = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} [\nabla f \cdot \nabla f]\, d\zeta dx dy, \tag{4}$$

1976 年 5 月 4 日收到．

则可证明，当水平边界条件为周期性条件或刚壁条件时，有

$$\|u'-\hat{u}'\|^2+\|v'-\hat{v}'\|^2=\|\nabla(\psi'-\hat{\psi}')\|^2+\|\nabla(\varphi'-\hat{\varphi}')\|^2. \tag{5}$$

因此应有

$$\|u'-\hat{u}'\|^2+\|v'-\hat{v}'\|^2=\|\nabla(\psi'-\hat{\psi}')\|^2+\|\nabla(\varphi'-\hat{\varphi}')\|^2=\varepsilon_v^2. \tag{6}$$

同理，对于温度场 T 应有：

$$\|T'-\hat{T}'\|^2=\varepsilon_T^2. \tag{7}$$

为简便起见，我们取 p_s 为常数，并将地表气压变化的观测值化为 p_s 面的位势高度 z_s 的"观测值"，记其观测标准误差为 ε_{zs}，则又有：

$$\|z_s'-\hat{z}_s'\|^2=\varepsilon_{zs}^2. \tag{8}$$

(6)—(8)也就是加工整理后的初始场 u, v, T, z_s 等所应满足的限制条件.

条件(6)—(8)也可以作些修改，例如可将等号改为≤. 此外，也还可以认为 $f'-\hat{f}'$ 在全区域内应与 f' 无关，即

$$\iiint_{(V)} f'(f'-\hat{f}')d\zeta dxdy=0. \tag{9}$$

就是可再加入一些限制条件，这时就有

$$\|f'\|^2=\frac{1}{V}\iiint_{(V)} f'\hat{f}'d\zeta dxdy. \tag{10}$$

代入(6)—(8)，就可约简为下列条件

$$\|u'\|^2+\|v'\|^2=[\|\hat{u}'\|^2+\|\hat{v}'\|^2]-\varepsilon_v^2\equiv\sigma_v^2, \tag{6'}$$

$$\|T'\|_t=\|\hat{T}'\|^2-\varepsilon_T^2\equiv\sigma_T^2, \tag{7}$$

$$\|z_s'\|^2=\|\hat{z}_s'\|^2-\varepsilon_{Ts}^2\equiv\sigma_{zs}^2. \tag{8}$$

这时观测场的短波部分 $\hat{f}'(x,y,\zeta)$ 就不显含于限制条件之中，只以"平方范数"的形式进入到 σ_f^2 中去，也可能更为方便. 由此还可看出，限制条件的引入总是使短波部分的"能量"较观测者为小，即总是使加工整理后的初始场较实测场为光滑. 在(6)'—(8)' 中自然应设 $\sigma_v^2>0, \sigma_T^2>0, \sigma_{zs}^2>0$，否则实测场本身应认为足够光滑的，取 $f'=\hat{f}'$ 就行了，由此不会引起麻烦.

二、能 量 方 程

引入 ψ 及 φ，并在上述边界条件下，可证总动能 E 可分解为涡旋场的动能 E_ψ 及散度场的动能 E_φ 两部分之和

$$\begin{aligned}E&\equiv\iiint_{(V)}\frac{1}{2}(u^2+v^2)d\zeta dxdy\\&=\iiint_{(V)}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]d\zeta dxdy+\iiint_{(V)}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\zeta dxdy\\&=E_\psi+E_\varphi,\end{aligned} \tag{11}$$

而涡度 Ω 及散度 D 就是

$$\Omega\equiv\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\Delta\psi,\quad D\equiv\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\Delta\varphi, \tag{12}$$

$$\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

如再应用正交展开，就还有

$$E_\varphi = E_\varphi^* + E_\varphi' = E_{\varphi^*} + E_{\varphi'} \tag{13}$$

等等。这里 E_φ^* 及 E_φ' 分别表示长波及短波分量的总能量，即

$$E_\varphi^* = E_{\varphi^*} = \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{2}(\nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi^*) d\zeta dx dy, \tag{14}$$

$$E_\varphi' = E_{\varphi'} = \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{2}(\nabla\varphi' \cdot \nabla\varphi') d\zeta dx dy. \tag{15}$$

无论 E_ψ，还是 E_φ，都包含有慢波及快波两部分，在非线性情况下，我们无法完全把它们区分开来。但快波必有散度，故若使散度场的能量及其随时间的变化受到限制，则快波不会太显著。此外，动能和位能之间的转换必须通过散度场作中介。因此，保留初始散度场的长波部分对于预报天气系统的发展率是有意义的。故要使初始场既有足够的精度，又不引起计算紊乱，关键在于对 φ' 或 E_φ' 及其时间变化作适当的限制。有时对 ψ' 等亦可作些限制。

对运动方程取散度运算，得到散度随时间的变率，它是 u, v, z（或即 u, v, T, z_s）的函数，即

$$\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = L(u, v, z) = L(\psi, \varphi, T, z_s). \tag{16}$$

作正交展开，记函数 L 的短波部分为 L'，则有：

$$\frac{\partial\Delta\varphi'}{\partial t} = L'. \tag{17}$$

此外，可证

$$I \equiv \frac{\partial E_\varphi'}{\partial t} = -\iiint\limits_{(V)} \varphi' \frac{\partial\Delta\varphi'}{\partial t} d\zeta dx dy = -\iiint\limits_{(V)} \varphi' L' d\zeta dx dy, \tag{18}$$

$$J \equiv \frac{\partial^2 E_\varphi'}{\partial t^2} = -\iiint\limits_{(V)} \left[\varphi' \frac{\partial L'}{\partial t} + L' \frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right] d\zeta dx dy, \tag{19}$$

$$K \equiv \frac{\partial^3 E_\varphi'}{\partial t^3} = -\iiint\limits_{(V)} \left[\varphi' \frac{\partial^2 L'}{\partial t^2} + 2\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\frac{\partial L'}{\partial t} + L' \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\right] d\zeta dx dy. \tag{20}$$

故若初始时刻有 $\varphi' = 0$，则有 $E_\varphi' = \partial E_\varphi'/\partial t = 0$；若 $L' = 0$，则即使 $\varphi' \neq 0$，仍可使 $\partial E_\varphi'/\partial t = 0$；若 $\varphi' = L' = 0$，则有 $\partial\varphi'/\partial t = 0$ 以及 $E_\varphi' = \partial E_\varphi'/\partial t = \partial^2 E_\varphi'/\partial t^2 = \partial E_\varphi'/\partial t^3 = 0$，这样的初始场并不含有明显的快波，不会导至计算紊乱。如果 ψ^*，φ^* 及 z^* 取观测值，而 ψ'，φ' 及 z' 取满足上述条件的，则所得的 $\psi = \psi^* + \psi'$，$\varphi = \varphi^* + \varphi'$，$z = z^* + z'$ 在一般情况下不一定能满足限制条件(6)—(8)或(6)′—(8)′。下面我们将区分几种情况分别进行处理。

顺便指出，用 E_φ，φ，L 分别替换(18)—(20)中的 E_φ'，φ' 及 L'，公式仍对。可见取地转近似($\varphi = 0$)或平衡方程近似($\varphi = L = 0$)，亦可保证计算不紊乱，但这样的风场的准确度是不够高的。

三、实测风场的整理·正交展开

整理初始风场的目的是为了实用，故当用正交展开时，可以截取有限项之和，弃掉尺度较小的部分．设 m, n 表示水平方向的“波数”，k 为垂直方向的“波数”，设短波部分取为相当于 $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$, $n_1 \leqslant n \leqslant n_2$, $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ 的项，相应的展开系数为 ψ'_{mnk}, φ'_{mnk}, T'_{mnk} 及 $(z'_s)_{mn}$；而实测场短波部分的展开系数则为 $\hat{\psi}'_{mnk}$, $\hat{\varphi}'_{mnk}$, $\hat{T}'_{mnk}$ 及 $(\hat{z}'_s)_{mn}$. 实测场中一般可有 $m > m_2$, $n > n_2$, $k > k_2$ 的分量．于是(6)—(8)就变为系数 $(\psi'_{mnk} - \hat{\psi}'_{mnk})$, $(\varphi'_{mnk} - \hat{\varphi}'_{mnk})$, $(T'_{mnk} - \hat{T}'_{mnk})$ 及 $(z'_s)_{mn} - (\hat{z}'_s)_{mn}$ 的二次齐次式．今以 ψ'_{mnk} 及 φ'_{mnk} 为坐标组成一个 $2(m_2 - m_1)(n_2 - n_1)(k_2 - k_1)$ 维的空间 X，统一记其坐标为 X_i，例如 ψ'_{mnk} 对应于 $1 \leqslant i \leqslant (m_2 - m_1)(n_2 - n_1)(k_2 - k_1)$，而 φ'_{mnk} 则对应于 $(m_2 - m_1)(n_2 - n_1)(k_2 - k_1) + 1 \leqslant i \leqslant 2(m_2 - m_1)(n_2 - n_1)(k_2 - k_1)$. 记由 T'_{mnk} 或 $(z'_s)_{mn}$ 为坐标分别组成的空间为 Y 及 Z，其坐标亦改记为 Y_i 及 Z_i. 于是(6)—(8)又可写成

$$\sum_i a_i^2(X_i - \hat{X}_i)^2 = \varepsilon_v^2 - (\|\nabla\hat{\psi}''\|^2 + \|\nabla\hat{\varphi}''\|^2) \equiv \hat{\varepsilon}_v^2, \tag{21}$$

$$\sum_i b_i^2(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \varepsilon_T^2 - \|\hat{T}''\|^2 \equiv \hat{\varepsilon}_T^2, \tag{22}$$

$$\sum_i c_i^2(Z_i - \hat{Z}_i)^2 = \varepsilon_{z_s}^2 - \|\hat{z}''_s\|^2 \equiv \hat{\varepsilon}_{z_s}^2 \tag{23}$$

其中 $\hat{X}_i$, $\hat{Y}_i$ 及 $\hat{Z}_i$ 为相应的观测值，而 $\hat{\psi}''$, $\hat{\varphi}''$, $\hat{T}''$ 及 $\hat{z}''_s$ 则为观测场中 m, n, k 中有一个满足 $m > m_2$, $n > n_2$, $k > k_2$ 的分量，并取 $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$, $c_i \geqslant 0$, 又 $\hat{\varepsilon}_v^2$, $\hat{\varepsilon}_T^2$ 及 $\hat{\varepsilon}_{z_s}^2$ 均应不为负．

由(21)—(23)可见，待求量 X_i 是位于 X 空间内以 $\hat{X}_i$ 为中点的某个超椭球面上，半轴长各为 $\hat{\varepsilon}_v/a_i$; Y_i 及 Z_i 则分别是在 Y 或 Z 空间内以 $\hat{Y}_i$ 或 $\hat{Z}_i$ 为中点的超椭球面上．

在(16)中，函数 L 既有关于 z, u, v 的线性项，也有关于 u, v 的二次项．但在实际工作中总可合适地选取 (m_1, m_2), (n_1, n_2) 及 (k_1, k_2)，使得在 L' 中表示 u', v' 的二次项所激发出来的波动不在区间 (m_1, m_2), (n_1, n_2), (k_1, k_2) 之内，于是在所取的表示短波的部分之内，L'_{mnk} 就只含有 z'_{mnk}, u'_{mnk}, v'_{mnk} 或即 X_i, Y_i 及 Z_i 的线性项，即

$$L'_i \equiv L'_{mnk} = (l_0)_i + \sum_j (l_1)_{ij}X_j + \sum_j (l_2)_{ij}Y_j + \sum_j (l_3)_{ij}Z_j, \tag{24}$$

其中 $(l_0)_i$, $(l_1)_{ij}$ 等为系数，它们是已知量 $\hat{\psi}^*$, φ^*, $\hat{z}^*$ 的函数．

如令 $L'_{mnk} = 0$, 则由(24)可解出 Y_i

$$Y_i = (r_0)_i + \sum_j (r_1)_{ij}X_j + \sum_j (r_2)_{ij}Z_j,$$

代入(22)得

$$\sum_i\Big[\sum_j b_i(r_1)_{ij}X_j + \sum_j b_i(r_2)_{ij}Z_j - (b_i\hat{Y}_i - b_i(r_0)_i)\Big]^2 = \hat{\varepsilon}_T^2. \tag{25}$$

其几何意义就是 X 及 Z 合组成的空间中的一个超椭球面．

能否取 $\varphi' = 0$ 及 $L' = 0$ 就看其几何形势(21)—(23)及(25)是否相容．为简单计，

我们先设地面天气图已作了足够好的光滑处理，且认为无误差，即 $\varepsilon_{Z_i}^2=0$，从而可取 $Z_i=0$. 关于地面天气图的加工处理，这是和考虑地形影响的方法紧密地联系在一起的，已不是本文的范围了. 若

$$e_v\equiv\varepsilon_v^2-[(\|\nabla\hat{\phi}''\|^2+\|\nabla\hat{\varphi}''\|^2)+\|\nabla\hat{\varphi}'\|^2]\geqslant 0, \tag{26}$$

则令 $\varphi'=0$ 是与(21)相容的. 取 $\varphi'=0$，则由X中取出由 ϕ'_{mnk} 所组成的 $(m_2-m_1)(n_2-n_1)(k_1-k_1)$维子空间，引入

$$\xi_i=\frac{a_i}{e_v}(X_i-\hat{X}_i), \tag{27}$$

故在 ξ 空间内待求量 ξ_i 位于以原点为中心半径为 1 的超球面上

$$\sum_i\xi_i^2=1. \tag{28}$$

而(25)则表示 ξ 空间内另一个超椭球面，即

$$\sum_i\left\{\sum_j\left(\frac{b_i}{a_i}\right)\left(\frac{e_v}{\hat{\varepsilon}_T}\right)(r_1)_{ij}\xi_j-\left[b_i\hat{Y}_i-b_i(r_0)_i-\sum_j\left(\frac{b_i}{a_i}\right)\left(\frac{e_v}{\hat{\varepsilon}_T}\right)(r_1)_{ij}\hat{X}_j\right]\right\}^2=1. \tag{29}$$

引入方阵 $\mathbf{R}$ 及单列矩阵 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$

$$\begin{cases}\mathbf{R}\equiv\{r_{ij}\},\ r_{ij}=(b_i/a_i)(e_v/\hat{\varepsilon}_T)(r_1)_{ij},\\ \boldsymbol{\xi}\equiv[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots]^*,\\ \boldsymbol{\eta}\equiv[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i,\cdots]^*,\\ \eta_i=\dfrac{b_i}{\hat{\varepsilon}_T}[\hat{Y}_i-(r_0)_i]-\sum_j\left(\dfrac{b_i}{a_i}\right)\left(\dfrac{e_v}{\hat{\varepsilon}_T}\right)(r_1)_{ij}\hat{X}_j,\end{cases} \tag{30}$$

则(29)可写成

$$(\mathbf{R}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})^*(\mathbf{R}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})=1, \tag{31}$$

其中星号表转置矩阵. 可见此椭球之中点坐标 $\boldsymbol{\xi}_0$ 就是

$$\boldsymbol{\xi}_0=\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\eta}. \tag{32}$$

其中 $\mathbf{R}^{-1}$ 为逆矩阵. 由点 $\boldsymbol{\xi}_0$ 至原点(即球面(28)的球心)的直线和椭球(31)交于点 $\boldsymbol{\xi}$，则有

$$(\xi)_i/(\xi_0)_i=(\xi)_1/(\xi_0)_1, \tag{33}$$

其中 $(\xi_0)_i$ 及 $(\xi)_i$ 各为点 $\boldsymbol{\xi}_0$ 及 $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ 的坐标分量. 代入(31)得

$$\sum_i\left[\sum_j r_{ij}\frac{(\xi_0)_j}{(\xi_0)_1}(\xi)_1-\eta_i\right]^2=1. \tag{34}$$

它是 $(\xi)_1$ 的二次代数方程，有两个根，其绝对值较小的一个所对应的交点（记作 $\boldsymbol{\xi}_1$）就是该椭球面距原点较近的交点，我们称之为内交点；而绝对值较大者称为外交点 $\boldsymbol{\xi}_2$. $(\xi)_1$ 决定后，由(33)就可求出其余坐标 $(\xi)_i$ 了. 记内外交点与原点的距离各为 ρ_1 及 ρ_2，即

$$\rho_s=(\boldsymbol{\xi}_s^*\boldsymbol{\xi}_s)^{1/2},\ s=1,2. \tag{35}$$

情况一：若(26)满足，且

$$\rho_1\leqslant 1\leqslant\rho_2, \tag{36}$$

则椭球面(31)和球面(28)有公共点，可取 $\varphi'=0$ 及 $L'=0$. 但除(36)中只有一边取等

号外，公共点不只一个，故还可以对待求量 ψ' 及 T' 作更多的限制，例如取

$$S \equiv \frac{\partial^4 E'_\varphi}{\partial t^4} = \text{最小}, \tag{37}$$

或者取

$$S \equiv \alpha\|\Delta\psi'\|^2 + \beta\|\Delta T'\|^2 = \text{最小}. \tag{38}$$

前者是对快波作进一步抑制，后者则是对运动场的尺度作限制，其中 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ 为两经验常数. (38)为二次泛函. 要求出满足 $\varphi' = 0$, $L' = 0$ 及(38)的 ψ', T' 是比较容易的. 这样的初始场不会使计算紊乱.

情况二：若(26)满足，(36)不满足，则可取 $\varphi' = 0$，但不能令 $L' = 0$，因(31)与(28)无公共点. 这时可令所求的初始场为 $\varphi' = 0$，而 ψ' 及 T' 则满足

$$S \equiv \alpha\|\Delta\psi'\|^2 + \beta\|\Delta T'\|^2 + \gamma J(\psi', 0, T', 0) = \text{最小}. \tag{39}$$

其中 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$ 为经验常数，而泛函 J 由(19)给出. 因动能总大于零，今 $E'_\varphi = \partial E'_\varphi/\partial t = 0$，故必有 $J(\psi', 0, T', 0) \geqslant 0$，亦即 S 为正定泛函，极小值是存在的.

也可以取作

$$S \equiv \alpha\|\Delta\psi'\|^2 + \beta\|\Delta T'\|^2 + \gamma\|L'\|^2 = \text{最小}. \tag{40}$$

因 $\|\partial\Delta\varphi'/\partial t\|^2$ 比 $\partial^2 E'_\varphi/\partial t^2$ 在空间(而非时间)上为更高阶的微商的范数，故对 $\|\partial\Delta\varphi'/\partial t\| = \|L'\|$ 作控制可以得到更为光滑的结果.

情况三：若(26)不满足，则不能取 $\varphi' = 0$. 令以 ψ' 和 φ' 为坐标组成 $2(m_2 - m_1)(n_2 - n_1)(k_2 - k_1)$ 维空间 X，按(27)式引入变量 ξ，则在此新空间内，待求量 ξ_i 位于以原点为中心的半径为 1 的 $2(m_2 - m_1)(n_2 - n_1)(k_2 - k_1)$ 维空间内的超球面上；而 $L' = 0$ 则为此空间内的一个超椭球面. 求出其中心与原点的连线上和椭球面的内外两交点，记其与原点的距离各为 s_1 及 s_2. 则当

$$s_1 \leqslant 1 \leqslant s_2, \tag{41}$$

$L' = 0$ 是与(21)相容的. 这时可由(25)消去 T'，求满足

$$\begin{cases} L' = 0, \\ S \equiv \alpha\|\Delta\varphi'\|^2 + \beta\|\Delta\psi'\|^2 + \gamma\|\Delta T'\|^2 + \delta\cdot[J(\psi', \varphi', T', 0)]^2 = \text{最小} \end{cases} \tag{42}$$

的 ψ', φ' 及 T'，用作初始场. 这时有 $\|\partial\Delta\varphi'/\partial t\| = \partial E'_\varphi/\partial t = 0$.

情况四：若(26)及(41)都不满足，则既不能取 $\varphi' = 0$，也不能取 $L' = 0$，只能取

$$S \equiv \alpha\|\Delta\varphi'\|^2 + \beta\|\Delta\psi'\|^2 + \gamma\|\Delta T'\|^2 + \delta\cdot\|L'\|^2 + \varepsilon J^2 = \text{最小}. \tag{43}$$

α, β, γ, δ, ε 等经验常数也可以由某些理论上的考虑加以确定.

所有上面几种情况中，问题都归结为求正定泛函 S 的条件极小值. 即使在取 $L' = 0$ 的情况下，由于按(25)可消去 Y，故所有情况都可归结为变分法中的“等周问题”. 但这里等周条件不止一个，等周条件又是正定二次型，而泛函 S 则可能是较复杂的，故比较简便的解法是先从等周条件中消去一些未知数，再直接用“最速下降法”来求泛函的极小值，详见下节.

四、有 限 差 方 法

上节提出的方法应该说是严谨的，如在预报模式中也相应地用了正交展开，则应用起

来也是方便的。假如在预报模式中不应用正交展开，例如对于局地区域的预报，往往以用网格点方法较为方便，这时如在求初始场时用正交展开就不方便，一则由于往返作正交展开工作量比较大，二则在较复杂情况下微商关系的协调不等价于差分关系的协调. 可见这时以避开直接的正交展开且求与预报方程相协调的差分形式下的泛函的极小值为宜. 为此可以提出“近似正交”的概念，把上节的方法进行适当的简化.

设在区域(V)上分布着网格点(m, n, k)，相应的点的坐标是$(m\delta x, n\delta y, k\delta\zeta)$，其中$\delta x, \delta y, \delta\zeta$分别为$x, y, \zeta$方向的网格距，$0 \leqslant m \leqslant M, 0 \leqslant n \leqslant N, 0 \leqslant k \leqslant K$. 设在网格点上有实测初始场$(\hat{f})_{mnk}$，而$(\hat{f}^*)_{mnk}$则为其在以$(m, n, k)$为中心沿空间点作平均的值，例如可取水平面周围五点或九点上下三层的加权平均值等等. 如取五点平均，就有

$$\hat{f}^*_{mnk} = \sum_{k'=k-1}^{k+1} a_{kk'}\{b\hat{f}_{mnk'} + c[\hat{f}_{m+1,n,k'} + \hat{f}_{m-1,n,k'} + \hat{f}_{m,n+1,k} + \hat{f}_{m,n-1,k}]\}, \tag{44}$$

$$a_{kk'} \geqslant 0, \ \sum_{k'=k-1}^{k+1} a_{kk'} = 1; \ b \geqslant 0, \ c \geqslant 0, \ b + c = 1.$$

取不同的b值，可消去波长等于一定个数的网格距的波；最好是取不同的b，连续施行上述运算，由此可大体上消去短波部分，所得的$\hat{f}^*$就大体上相当于长波部分，是光滑的；对于长波部分来说误差也是很小的，即可取$f^*_{mnk} = \hat{f}^*_{mnk}$. 所要注意的是，对$\hat{T}$来说不能沿垂直方向按上式直接求平均，只能取$\hat{T}$与某一标准状态的偏差来进行垂直方向的平均. 故若令加工整理后的初始场为f_{mnk}，取作

$$f_{mnk} = f^*_{mnk} + f'_{mnk}, \tag{45}$$

并记

$$\hat{f}'_{mnk} \equiv \hat{f}_{mnk} - \hat{f}^*_{mnk} = \hat{f}_{mnk} - f^*_{mnk}, \tag{46}$$

就应有

$$\|\hat{f}'_{mnk} - f'_{mnk}\|^2 = \varepsilon_f^2, \tag{47}$$

其中记

$$\|f_{mnk}\|^2 \equiv \sum_0^M \sum_0^N \sum_0^K f^2_{mnk}\delta_m \cdot \delta_n \cdot \delta_k \cdot \frac{\delta x\delta y\delta\zeta}{V}. \tag{48}$$

系数$\delta_m\delta_n\delta_k$乘上$\delta x\delta y\delta\zeta$相当于点$(m, n, k)$邻域的元体积. 例如在我们所设计的具有能量守恒的差分格式中，对于区域(V)的内点有$\delta_m\delta_n\delta_k = 1$，在边界面上的点其相应的$\delta$为$1/2$.

既然f'_{mnk}大体上相当于短波，故可认为它与f^*_{mnk}大体上是正交的，就是

$$\sum_0^M \sum_0^N \sum_0^K f^*_{mnk} f'_{mnk}\delta_m\delta_n\delta_k\delta x\delta y\delta\zeta \approx 0. \tag{49}$$

于是上节的方法就大体上可以应用到求$u'_{mnk}, v'_{mnk}, T'_{mnk}$及$(z'_f)_{mnk}$，不过这里$(m, n, k)$是网格点的坐标，而非波数. 关于这些量的限制条件在形式上也和(6)—(8)或(6)′—(8)′相同，只需将范数的定义理解为(48).

在有限差情况下，要利用$\hat{u}'$和$\hat{v}'$求出$\hat{\psi}'$及$\hat{\varphi}'$是容易的，故要作出象(26)那样的公式以便判断能否取$\varphi'_{mnk} = 0$也是不难的. 问题在于有限差情况下L'必定是u', v'的二次代数函数，难于象上节那样作出能否取$L' = 0$的判据. 为此，不引人ψ'及φ'，且直接应用上节情况四的方法较为方便. 设用u^*, v^*, T^*, z^*_f作初值按差分方程算得的散

度的时间变化为 $\delta_t D^*/\delta t$，其中

$$\frac{\partial_t f}{\partial t} \equiv \frac{1}{\delta t}[f(l\delta t) - f((l-1)\delta t)], \tag{50}$$

同理，设用 $u^* + u'$, $v^* + v'$, $T^* + T'$ 及 $z_s^* + z_s'$ 作初值算得的记作 $\delta_t D/\delta t$，则 $\delta_t D/\delta t - \delta_t D^*/\delta t$ 大体上就是上节的 L'. 故问题可归结为在限制条件 (6)—(8) 之下求泛函的极小值问题

$$S(u', v', T', z_s') \equiv \alpha\|D'\|^2 + \beta\|\Omega'\|^2 + \gamma\left|\frac{\delta_t D^*}{\partial t} - \frac{\delta_t D}{\partial t}\right|^2 + \delta\cdot\|\nabla T'\|^2 + \varepsilon\cdot\|\nabla z_s'\|^2$$
$$= 最小. \tag{51}$$

其中 ∇ 为差分意义下的拉普拉斯算子；D', Ω' 为由 u', v' 按差分法算得的散度及涡度，例如在内点就有

$$D' \equiv \frac{\delta_x u'}{\delta x} + \frac{\delta_y v'}{\delta y}, \quad \Omega' \equiv \frac{\delta_x v'}{\delta x} - \frac{\delta_y u'}{\delta y}, \tag{52}$$

$$\delta_x(\ ) \equiv \frac{1}{2}[(\ )_{m+1,n,k} - (\ )_{m-1,n,k}], \quad \delta_y(\ ) \equiv \frac{1}{2}(\ )_{m,n+1,k} - (\ )_{m,n-1,k}]. \tag{53}$$

应用最速下降法求出网格点函数 u'_{mnk}, v'_{mnk}, T'_{mnk}, $(z_s')_{mnk}$ 可能比较方便. 首先，对于边界上的点还可以作限制，例如在水平边界上可取 u', v', T', z_s' 都为零，由此消去一些未知量，剩下的量按序号 i 排列之，$i = 1, 2, \cdots, I$. 由(6)可消去一个未知数，不妨取为 v_I'，记相应于序号 $i = I$ 之点的元体积系数为 $(\beta_m\beta_n\beta_k)_I$，就有

$$(v_I' - \hat{v}_I')^2 = \frac{V\varepsilon_v^2}{(\beta_m\beta_n\beta_k)_I\delta x\delta y\delta\zeta} - \sum_{i=1}^{I-1}[(u_i' - \hat{u}_i')^2 + (v_i' - \hat{v}_i')^2]\frac{(\beta_m\beta_n\beta_k)_i}{(\beta_m\beta_n\beta_k)_I}$$
$$- (u_I' - \hat{u}_I')^2. \tag{54}$$

同理有

$$(T_I' - \hat{T}_I')^2 = \frac{V\varepsilon_T^2}{(\beta_m\beta_n\beta_k)_I\delta x\delta y\delta\zeta} - \sum_{i=1}^{I-1}(T_i' - \hat{T}_i')^2\frac{(\beta_m\beta_n\beta_k)_i}{(\beta_m\beta_n\beta_k)_I}, \tag{55}$$

$$[(z_s')_I - (\hat{z}_s')_I]^2 = \frac{V\varepsilon_{zs}^2}{(\beta_m\beta_n\beta_k)_I\delta x\delta y\delta\zeta} - \sum_{i=1}^{I-1}[(z_s')_i - (\hat{z}_s')_i]^2\frac{(\beta_m\beta_n\beta_k)_i}{(\beta_m\beta_n\beta_k)_I}. \tag{56}$$

这样 S 就是 u_i', v_i', T_i', $(z_s')_i$ $(i = 1, 2, \cdots, I-1)$ 及 u_I' 的函数. 容易求出泛函 S 的梯度. 如把 v_I', $T_I'(z_s')_I$ 亦作为自变量看待，S 的偏微商记为$(\partial S/\partial u_i')$等；按(54)—(56)消去 v_I', T_I', $(z_s')_I$ 之后，S 的偏微商记为$[\partial S/\partial u_i']$等，则有

$$\left[\frac{\partial S}{\partial u_i'}\right] = \left(\frac{\partial S}{\partial u_i'}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial v_I'}\right)\frac{\partial v_I'}{\partial u_i'}, \ (i = 1, 2, \cdots, I) \tag{57}$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial v_i'}\right] = \left(\frac{\partial S}{\partial v_i'}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial v_I'}\right)\frac{\partial v_I'}{\partial v_i'}, \ (i = 1, 2, \cdots, I-1) \tag{58}$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial T_i'}\right] = \left(\frac{\partial S}{\partial T_i'}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial T_I'}\right)\frac{\partial T_I'}{\partial T_i'}, \ (i = 1, 2, \cdots, I-1) \tag{59}$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial (z_s')_i}\right] = \left(\frac{\partial S}{\partial (z_s')_i}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial (z_s')_I}\right)\frac{\partial (z_s')_I}{\partial (z_s')_i}. \ (i=1,2,\cdots,I-1) \tag{60}$$

其中 $\partial v_I'/\partial u_i'$, $\partial v_I'/\partial v_i'$, $\partial T_I'/\partial T_i'$, $\partial(z_s')_I/\partial(z_s')_i$ 可由(54)—(56)求得.

设已知近似解 $u_i'^{(\nu)}$, $v_i'^{(\nu)}$, $T_i'^{(\nu)}$ 及 $(z_s')_i^{(\nu)}$，由(54)—(56)可求出 $v_I'^{(\nu)}$, $T_I'^{(\nu)}$, $(z_s')_I^{(\nu)}$,

但定正负号时要注意到前后两次近似值符号的连贯性。设当 u', v', T', (z_s') 取这些近似值时，由(57)—(60)算得之值为 $[\partial S/\partial u_i']^{(\nu)}$ 等等，于是下一级近似解取为

$$\begin{cases} u_i'^{(\nu+1)} = u_i'^{(\nu)} + r\left[\dfrac{\partial S}{\partial u_i'}\right]^{(\nu)}, \\ v_i'^{(\nu+1)} = v_i'^{(\nu)} + r\left[\dfrac{\partial S}{\partial v_i'}\right]^{(\nu)}, \\ T_i'^{(\nu+1)} = T_i'^{(\nu)} + r\left[\dfrac{\partial S}{\partial T_i'}\right]^{(\nu)}, \\ (z_s')_i^{(\nu+1)} = (z_s')_i^{(\nu)} + r\left[\dfrac{\partial S}{\partial (z_s')_i}\right]^{(\nu)}. \end{cases} \tag{61}$$

其中 r 为待求常数. 当 u', v', T' 及 z_s' 取(61)时，则 S 只是待定常数 r 的函数，记作 $S^{(\nu+1)}(r)$；而当 u' 等取第(ν)级近似时 S 的值记为 $S^{(\nu)}$，则取使 $S^{(\nu+1)}(r)$ 达最小值（记作 $S^{(\nu+1)}$）时的 r 值，就可有 $S^{(\nu+1)} \leqslant S^{(\nu)}$，其中符号只当 $[\partial S/\partial u_i']^{(\nu)}$ 等全为零时才成立. 因 $\|\delta_t D/\delta t - \delta_t D^*/\delta t\|^2$ 是四次泛函，即 S 是 r 的四次代数多项式，故 $dS^{(\nu+1)}(r)/dr$ 是 r 的三次多项式，它有一个或三个实根. 如只有一实根 r^*，则它就是所求的 r 值；如有三实根，其中一根 r^* 使 $S^{(\nu+1)}(r^*)$ 有最小值，则取 $r=r^*$ 即为所求. 如 $[\partial S/\partial u_i']^{(\nu)}$ 等全为零，一时难于断定 $S^{(\nu)}$ 是否是极小值，则可稍为改变一个 $u_i'^{(\nu)}$ 值，计算一下改变后的 $S^{(\nu)}$ 值，记作 $S'^{(\nu)}$，比较一下 $S^{(\nu)}$ 与 $S'^{(\nu)}$ 的大小就知道了.

选取合适的初次迭代值 $u_i'^{(0)}$, $v_i'^{(0)}$, $T_i'^{(0)}$ 及 $(z_s')_i^{(0)}$ 也是很重要的，我们建议下面一个均匀光滑化的方法，即取

$$\begin{cases} u_i'^{(0)} = (1-s_1)\hat{u}_i', \quad v_i'^{(0)} = (1-s_1)\hat{v}_i', \\ T_i'^{(0)} = (1-s_2)\hat{T}_i', \quad (z_s')_i^{(0)} = (1-s_3)(\hat{z}_s')_i, \end{cases} \tag{62}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, I)$$

其中系数 $1 \geqslant s_1 \geqslant 0$, $1 \geqslant s_2 \geqslant 0$, $1 \geqslant s_3 \geqslant 0$ 由条件(6)—(8)定出. 因这时有 $u_i'^{(0)} - \hat{u}_i' = -s_1\hat{u}_i'$ 等等，故有

$$\sum_{i=1}^{I}[(\hat{u}_i' - u_i'^{(0)})^2 + (\hat{v}_i' - v_i'^{(0)})^2]\frac{(\beta_m\beta_n\beta_k)_i}{V}\delta x\delta y\delta\zeta$$
$$= s_1^2(\|\hat{u}'\|^2 + \|\hat{v}'\|^2) = \varepsilon_v^2,$$

故得

$$s_1^2 = \varepsilon_v^2/(\|\hat{u}'\|^2 + \|\hat{v}'\|^2). \tag{63}$$

同理得

$$s_2^2 = \varepsilon_T^2/\|\hat{T}'\|^2, \tag{64}$$
$$s_3^2 = \varepsilon_{zs}^2/\|\hat{z}_s'\|^2. \tag{65}$$

这里自然应假定 $\varepsilon_v^2 \leqslant (\|\hat{u}'\|^2 + \|\hat{v}'\|^2)$, $\varepsilon_T^2 \leqslant \|\hat{T}'\|^2$, $\varepsilon_{zs}^2 \leqslant \|\hat{z}_s'\|^2$，否则可取 $u' = v' = 0$ 等等，而 $u = u^*$, $v = v^*$ 等则既是光滑的，又与实测场 $\hat{u}$, $\hat{v}$ 之差平均来说小于标准观测误差了.