# 适用于数值预告及客观分析的平滑算子的研究

伍 荣 生

（南京大学气象系）

**提 要**

通常的过滤二格距波长波动的平滑算子具有以下几个缺点，(1)进行一次平滑运算则能使除二格距波动以外的波动强度有不同程度的削弱，对于中短波而言，影响更大．(2)如果要减低波动强度削弱的程度，可以利用多点平滑算子，但这将引入边界如何处理的麻烦，而且边界误差将传入域内．(3)利用平滑后的物理量来计算差分，则有较未经平滑的差分为大的截断误差．本文就是为了克服上述缺点而设计了一个简便的平滑算子，并给出了数值例子，证明它是有一定成效的．

## 一、引 言

在数值预告中，二格距波长的波动往往是一种干扰，如不设法过滤，则将严重地影响计算工作的顺利进行，但目前的通用滤波方法具有一定的缺点，例如进行一次平滑运算，虽然能够过滤掉二格距的噪波，但是同时又削弱了其余波动的强度，为了使其余波动削弱程度有所减低，则须进行多次平滑[1]，这不但费时，而且由于每平滑一次就会引起边界的缩小，这样就又引起了如何处理边界值的问题，边界的损差又会传入域内．除此之外，在作数值预告时，利用平滑后的物理场来计算差分来替代原来方程组中的微分，将会引起较未经平滑的物理场的差分为大的误差，这在一定程度上会影响到预告的正确性．因此设计一个平滑算子，通过一次运算就能达到过滤二格距波动的目的又完全不削弱其余波动的强度，这对于数值预告和客观分析来说是有好处的，它可以避免了上述缺点．这就是本工作的目的．

在本文中，首先将 Fjörtoft 的平滑算子加以改进，将它与 Shapiro 的方法统一起来，然后，讨论这些平滑算子的缺点，提出了克服这些缺点的平滑算子，并用一理想的数据来进行分析比较，证明它是有效的．

## 二、对于平滑算子的一些分析与讨论

为了方便起见，在此节中，我们只讨论一维的问题，二维情况完全相似，故从略．

---

1976 年 12 月 21 日收到．

设有一物理量 $f$，它呈波动形式，即

$$f = A\exp(iKx) \tag{1}$$

其中 $A$ 为振幅，以后的讨论中，均取作 1；$K$ 为波数，$K = 2\pi/L$，$L$ 为波长．将(1)式对 $x$ 微分二次，则有

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -K^2f \tag{2}$$

利用此关系，Fjörtoft[2] 提出了平滑算子为：

$$\bar{f} = f + \frac{1}{K_0}\frac{d^2f}{dx^2} \tag{3}$$

其中 $K_0$ 为所欲过滤的波动波数．将(2)式代入(3)式，就有：

$$\bar{f} = Rf \tag{4}$$

$$R = \left(1 - \left(\frac{K}{K_0}\right)^2\right) \tag{5}$$

$R$ 表示通过平滑运算后波动强度的变化，从(4)(5)两式可见，当 $K = K_0$ 时，$R = 0$，即达到了过滤的目的，但对于那些 $K$ 小于 $K_0$ 的波动而言，$R$ 小于 1，即通过平滑运算后将使其振幅削弱，削弱的强度为 $(K/K_0)^2$．由于我们所欲过滤的是二格距波动，$K \leqslant K_0$，所以对于那些 $K > K_0$ 的情况就不再讨论了．

在实际工作中，Fjörtoft 是以差分来代替微分，这样(3)式写成

$$\bar{f}_i = f_i + \frac{1}{K_0^2h^2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) \tag{6}$$

其中 $i$ 为格点数，$h$ 为网格距离，我们可以看到，由于差分与微分之间的误差，使得(6)式的平滑算子实际上并不能过滤二格距波长的波动，将(1)式代入(6)式，很易求得：

$$R = 1 + \frac{1}{(K_0h)^2}2(\cos Kh - 1) \tag{7}$$

当 $K = 2\pi/2h$ 时，即为二格距波动时，$R = 1 - \frac{4}{\pi^2}$，不能得到过滤．我们采用调整系数办法，将(6)式改写成：

$$\bar{f}_i = f_i + A(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) \tag{8}$$

其中 $A$ 为待定系数，此时有

$$R = 1 + 2A(\cos Kh - 1) \tag{9}$$

因此，要使得(8)式能过滤二格距的波动，须

$$1 - 4A = 0$$

即 $A = 1/4$，这与 Shapiro[1] 的结果是一致的，从(9)式可见，其余波动通过平滑运算将有不同程度的削弱．

由于在(5)式中，其余波动的削弱强度为 $(K/K_0)^2$，所以我们如果能够设计平滑算子的 $R$ 为

$$R = 1 - (K/K_0)^{2n} \qquad n \geqslant 1 \tag{10}$$

则由于 $K/K_0 < 1$，所以 $n$ 愈大，$(K/K_0)^{2n}$ 越小，也就是说削弱得越小，因此，我们很易推广(3)式为：

$$\bar{f} = f + (-1)^{n+1} \frac{d^{2n} f}{d x^{2n}} \tag{11}$$

显然(11)式的 $R$ 值即为(10)式.

下面就从 $n = 2$ 的例子来加以说明，$n = 3, 4, \cdots$ 的结果完全仿此可以求得.

同上述方法，将(11)式写成:

$$\bar{f}_i = f_i + A((f_{i+2} + f_{i-2}) - 4(f_{i+1} + f_{i-1}) + 6f_i) \tag{12}$$

$A$ 为待定常数，在过滤二格距波长的波动条件下，与上述方法完全相同，可求得 $A = -\frac{1}{16}$. 我们很易证明它与 Shapiro 用较麻烦的方法所论证的二次平滑的结果是一致的[1].

利用(12)式来进行平滑要用到五点数据，可以称为五点格式，仿此，可求得七点，九点，……格式，当然，所需要的点越多，即(11)式中的 $n$ 越大，结果当然越好，但是边界的缩小也就越多，这就引起了边值处理的问题. 这就是上述平滑算子所存在的不能得到很好解决的问题.

除了上述问题外，我们还可以看到，利用平滑场来计算差分，将会引起较大的误差. 利用(4)式，可得:

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_i = R\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_i \tag{13}$$

我们用[ ]示差分，( )示微分，利用(1)式得:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = iKf_i \tag{14}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = \frac{1}{h}\sin(Kh)\cdot if_i = Q\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i \tag{15}$$

其中

$$Q = \frac{1}{Kh}\sin(Kh) \tag{16}$$

将(15)式代入(13)式，即得:

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_i = RQ\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i \tag{17}$$

$Q$ 表示未经平滑的初场的差分与微分的近似程度，$RQ$ 为平滑场的差分与微分的近似程度，由于 $R \leqslant 1$，故平滑后的差分较原来场的差分的近似程度要差，特别对于中短波而言，其误差就更大. $Q$ 及 $RQ$ 的数值见表 1. 例如对于十格距波长的波动而言，三点格式平滑场的差分，较理想值要低 16% 左右，而对于六格距波长的波动，就差得较大了，差 38% 左右，由此可见，在日常的数值预告中，利用平滑来进行差分计算，是不十分合适的，这将会引起较大的误差.

**表 1 不同格式的平滑场的差分近似程度**

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 10 | 15 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q$ | 0.00 | 0.41 | 0.63 | 0.83 | 0.93 | 0.97 | 0.98 | 1.00 |
| 三点格式 $RQ$ | 0.00 | 0.10 | 0.30 | 0.62 | 0.84 | 0.93 | 0.96 | 1.00 |
| 五点格式 $RQ$ | 0.00 | 0.18 | 0.43 | 0.78 | 0.92 | 0.97 | 0.98 | 1.00 |

$Q$, $RQ$ 的意义见公式(16)，$n$ 为波长的格矩数.

## 三、平滑算子的设计

现在我们将用不同于上述方法来进行考虑. 如果，我们能够利用简便的方法将物理量 $f$ 中所包含的二格距波长的波动提出，将原来的 $f$ 场减去这二格距波长的波动，那么便可以达到既过滤了此二格距波长的波动又可以使其余的波动完全不受运算的影响，这样就可以克服了上节所述的一些缺点.

基于以上想法，我们利用离散的付氏变换方法来设计平滑算子.

设有 $N$ 个格点（$N$ 为偶数），每个格点上的 $f$ 值为 $f_j$, $j=0, 1, \cdots N-1$. 利用离散付氏变换，对此数据进行波谱分析[3]，离散付氏变换的正反关系式为：

$$F_k=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} f_j W^{-jk} \qquad k=0, 1, \cdots N-1 \tag{18}$$

$$f_j=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} F_k W^{jk} \qquad j=0, 1, \cdots N-1 \tag{19}$$

其中

$$W^{jk}=\exp\left(\frac{2\pi i}{N} jk\right) \tag{20}$$

二格距波动的波谱为：

$$F_{\frac{N}{2}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} f_j W^{-j\frac{N}{2}} \tag{21}$$

由于二格距波动具有特别简单的关系式，即：

$$W^{-j\frac{N}{2}}=\exp(\pi i j)=\begin{cases}1 & j=0, 2, \cdots \text{偶数}\\ -1 & j=1, 3, \cdots \text{奇数}\end{cases} \tag{22}$$

因此(21)式就可以写成非常简单的关系式：

$$F_{\frac{N}{2}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}(f_{2j}-f_{2j+1}) \tag{23}$$

因此，在 $j$ 点上二格距波长的波动数值为：

$$\begin{aligned} f_{j\frac{N}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} F_{\frac{N}{2}} W^{j\frac{N}{2}} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}(f_{2j}-f_{2j+1}) W^{j\frac{N}{2}} \end{aligned} \tag{24}$$

所以将原来的 $f_j$ 值减去 $f_{j\frac{N}{2}}$，便可以达到过滤二格距波动的目的. 因此，我们定义的平滑算子为：

$$\bar{f}_j=f_j-\frac{1}{N}\left(\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}(f_{2j}-f_{2j+1})\right)W^{j\frac{N}{2}} \tag{25}$$

(25)式还可以写成便于计算的形式：

$$A=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}(f_{2j}-f_{2j+1}) \tag{26}$$

$$\begin{cases}\bar{f}_j = f_j - A & j=0,2,\cdots\text{偶数}\\ \bar{f}_j = f_j + A & j=1,3,\cdots\text{奇数}\end{cases} \tag{27}$$

在计算时，首先将偶数点上的物理量的和减去奇数点上的和，再除以$N$便求得了$A$，再将偶数点上的值减去$A$，将奇数点上的值加上$A$便求得了相应点上的平滑后的值.

以一个乘和加的运算作为一个单位，则利用(26)、(27)式来求平滑场须$2N$个单位，而对于三点或五点格式(不计边界插值)则须$3(N-2)$及$5(N-4)$个运算单位. 因此，用上述求平滑场较三点五点格式要省时，特别对于$N$较大时，尤其如此.(26),(27)式的主要优点还在于克服了上节所述的一些缺点，这可证明如下:

设有一波数为$K$的波动，振幅为1，则通过(25)式或(26)、(27)式的平滑运算，其值变为:

$$\begin{aligned}\bar{f}_i &= W^{iK} - \frac{1}{N}W^{i\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}(W^{2jK} - W^{(2j+1)K})\\ &= W^{iK} - \frac{1}{N}(1-W^K)W^{i\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}W^{2jK}\end{aligned} \tag{28}$$

因为当$K \neq \frac{N}{2}$时，有:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}W^{2jK} &= (1 + W^{2K} + W^{4K} + \cdots + W^{2(\frac{N}{2}-1)K})\\ &= \frac{1-W^{NK}}{1-W^{2K}} = 0\end{aligned} \tag{29}$$

利用(20)式直接知道$W^{NK}=1$，因此可以得到上式，当$K=\frac{N}{2}$时有

$$\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}W^{2jK} = 1 + W^N + \cdots + W^{N(\frac{N}{2}-1)K} = \frac{N}{2} \tag{30}$$

将(29)或(30)式代入(28)式就得

$$\begin{aligned}\bar{f}_i &= W^{i\frac{N}{2}} - \frac{1}{N}(1-W^{\frac{N}{2}})W^{i\frac{N}{2}}\cdot\frac{N}{2}\\ &= W^{i\frac{N}{2}}\left(1-\frac{1}{2}(1-W^{\frac{N}{2}})\right) = 0 \qquad K=\frac{N}{2}\end{aligned} \tag{31}$$

$$\bar{f}_i = W^{iK} = f_i \qquad K \neq \frac{N}{2} \tag{32}$$

这就说明了通过(25)式平滑算子完全过滤了二格距的波动，而其余的波动完全不受影响. 利用(32)式也可以证明:

$$\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_i = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i \tag{33}$$

这就说明利用(25)式所求得的平滑场来计算差分其误差相同于原来场的差分误差，不像三点格式或五点格式，会使其误差增大，这也就是本算子的一个优点.

## 四、二维的平滑算子

二维平滑算子实际上就是一维问题的推广，二维的离散付氏变换正反关系式为：

$$f_{jl}=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}F_{k,m}W^{kj+ml}\qquad \begin{array}{l} j=0,1,\cdots N-1,\\ l=0,1,\cdots M-1,\end{array}\tag{34}$$

$$F_{k,m}=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1}f_{jl}W^{-(kj+ml)}\qquad \begin{array}{l} k=0,1,\cdots N-1\\ m=0,1,\cdots M-1\end{array}\tag{35}$$

其中 $M,N$ 分别为 $y$ 方向和 $x$ 方向的格点数

$$W^{kj+ml}=\exp\left(\frac{2\pi i}{N}Kj+\frac{2\pi i}{M}ml\right)\tag{36}$$

设我们所欲过滤的波动为二格距的噪波，则有

$$F_{\frac{N}{2},\frac{M}{2}}=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1}f_{jl}W^{-\left(\frac{N}{2}j+\frac{M}{2}l\right)}\tag{37}$$

利用(22)式，很易求得：

$$F_{\frac{N}{2},\frac{M}{2}}=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1}((f_{2j,2l}+f_{2j+1,2l+1})-(f_{2j,2l+1}+f_{2j+1,2l}))\tag{38}$$

仿上节，我们定义二维的平滑算子为

$$\bar{f}_{j,l}=f_{j,l}-\frac{1}{MN}W^{-\frac{N}{2}j}W^{-\frac{M}{2}l}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{l=0}^{\frac{M}{2}-1}((f_{2j,2l}+f_{2j+1,2l+1})-(f_{2j,2l+1}+f_{2j+1,2l}))\tag{39}$$

或写成便于计算的形式：

$$A=\frac{1}{MN}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{l=0}^{\frac{M}{2}-1}((f_{2j,2l}+f_{2j+1,2l+1})-(f_{2j,2l+1}+f_{2j+1,2l}))\tag{40}$$

$$\bar{f}_{j,l}=f_{j,l}-A\qquad j,\ l\ \text{同为偶数或同为奇数}$$

$$\bar{f}_{j,l}=f_{j,l}+A\qquad \begin{array}{l} j\ \text{为偶数}\ l\ \text{为奇数或}\\ j\ \text{为奇数}\ l\ \text{为偶数}\end{array}\tag{41}$$

在计算时，也是很方便的，将 $x,y$ 方向同是偶数或同时奇数的点上的值相加，减去 $x$ 方向为偶数(或奇数) $y$ 方向为奇数(或偶数)点的值求和，再除以 $MN$，便求得 $A$，再将同是偶数或同是奇数点上的值减去 $A$，将奇数（或偶数）偶数(或奇数)点上的值加上 $A$ 便求得了平滑后的场.

相似于上节方法，可以证明它可以过滤两格距波动而不影响其余波动.

## 五、数 值 例 子

现设有一函数为：

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{h}x\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{6h}x\right)+6\sin\left(\frac{2\pi}{12h}x\right)\tag{40}$$

它表示 $f$ 值包含了二格距，六格距及十二格距波长的波动，通过平滑运算，理想的结果应该为

$$\bar{f}(x) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{6h}x\right) + 6\sin\left(\frac{2\pi}{12h}x\right) \tag{41}$$

即滤去了二格距的波动，而其余的波动不受影响．现将不同格式的平滑算子的计算结果列表于下．

表 2　不同格式的平滑结果

| 格　点　数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数据 | 4.00 | 4.00 | 5.56 | 3.00 | 5.56 | 4.00 | 4.00 | −3.00 | −6.56 | −11.00 | −6.56 | −3.00 |
| 三点格式平滑结果 | | 4.39 | 4.53 | 4.28 | 4.53 | 4.39 | 2.25 | −2.14 | −6.78 | −8.78 | −6.78 | |
| 五点格式平滑结果 | | | 4.63 | 4.16 | 4.63 | 4.89 | 2.81 | −2.08 | −7.44 | −9.78 | | |
| (27)式平滑结果同理论值 | 3.00 | 5.00 | 4.56 | 4.00 | 4.56 | 5.00 | 3.00 | −2.00 | −7.56 | −10.00 | −7.56 | −2.00 |

从表 2 可见三点格式不如五点格式，而本文所提出的平滑结果与理想值相等．

此外，将(40)式对 $x$ 微分，有

$$2hf' = 2\pi\left(-\sin\frac{\pi}{h}x - \sin\frac{2\pi}{6h}x + \cos\frac{2\pi}{12h}x\right) \tag{42}$$

现将利用不同格式平滑的结果进行差分计算，其结果见表 3．

表 3　不同格式平滑场进行差分计算及理想值的结果

| 格　点　数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2h\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]$三点格式 | | | −0.11 | 0.00 | 0.11 | −2.28 | −6.53 | −9.03 | −6.64 | 0.00 | | |
| $2h\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]$五点格式 | | | | 0.00 | 0.73 | −1.82 | −6.97 | −10.25 | −7.70 | | | |
| $2h\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]$(27)式 | | 1.56 | −1.00 | 0.00 | 1.00 | −1.56 | −7.00 | −10.56 | −8.00 | 0.00 | 8.00 | |
| $2h\frac{\partial f}{\partial x}$ | 6.28 | 0.00 | −2.30 | 0.00 | 2.30 | 0.00 | −6.28 | −10.88 | −8.58 | 0.00 | 8.58 | 10.88 |

从此表中，可见三点格式的误差很大，例如在第 4 点上，依(42)式计算得结果为 2.30，而依本文所求得的平滑场计算结果为 1.00，五点格式为 0.73，三点格式只有 0.11．从此可以说明，在日常的数值预告中，利用三点格式求得的平滑场来进行差分计算，其误差很大，这可能会影响到一些系统预报的正确性．

从上面的例子可以说明本文所提出的(25)式或(39)式作为日常数值预告或客观分析中的平滑算子是合适的，是有成效的．但由于本方法在实际预报中还没有应用，因而其效果尚需进一步检验．

## 参　考　资　料


[1] G. J. Haltiner, Numerical Weather Prediction, Gohn Wiley Sons Inc., 1971.

[2] R. Fjörtoft, On the use of space smoothing in physical weather forecasting, *Tellus*, 1955, 7, pp. 462—480.

[3] W. T. Cochian et al., What is the fast fourier transform?, *IEEE. Trans. AU*-15, 1967, pp. 45—55.