

有限元法在数值天气预报中的应用

孙敬猷 王申林* 沈长泗 陈士杰

(山东大学数学系)

(山东省气象台)

有限元法在结构力学、弹性力学等方面的应用很广^{[1],[2]}。最近几年也有人从理论上探讨有限元法在数值天气预报中应用的可能性。例如工作^{[3],[4],[5]}。

我们用有限元法求得一层辐散相当正压涡度方程的有限元方程(离散化方程)。所采用的网格是不均匀加密的矩形网格(图1)。

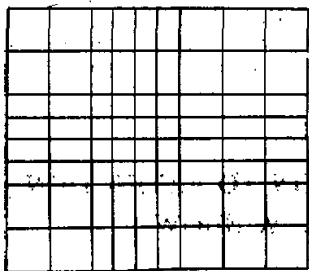


图 1

从计算的结果看,计算是稳定的,而且总的形势与实况比较一致,效果是好的。特别应该指出,我们将通常为了克服非线性不稳定所采用的 Arakawa 守恒格式^[6]推广到一般的任意网格情形,从而解决了任意网格下的守恒格式设计问题。由此可见,无论从实践上还是从理论上,用有限元法作数值天气预报都是一件很有意义的工作。

最近看到^[7]中也讨论了有限元法与 Arakawa 方法的关系。不过,^[7]只考虑了等距矩形网格的情形,是我们的一个特例。

一、用有限元法离散化

为简便起见,只考察一层辐散相当正压涡度方程(简称涡度方程):

$$-\nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{f}{m^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = J \left(\Phi, \frac{m^2}{f} \nabla^2 \Phi + f \right), (x, y) \in G, \quad (1)$$

这里 Φ 为重力位势, gx, m 为地图放大系数, f 为柯氏参数, J 为预报区域 G 的平均柯氏参数, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $J(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$, G 为矩形区域。

按(图1)所示的方式剖分区域 G 。令 $u = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, 并且假定满足边界条件:

$$u|_{\partial G} = 0, \quad (2)$$

这里 ∂G 是区域 G 的边界。

用有限元法求问题(1)(2)的离散化方程(有限元方程),这个问题与在满足条件(2)的某个函数类 H 中求泛函

1977年9月27日收到修改稿。

* 参加这一工作的还有山东大学数学系计算数学专业72级部分工农兵学员。

$$F(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu^2}{m^2} u^2 - 2uJ \left(\Phi, \frac{m^2}{f} \Delta^2 \Phi + f \right) \right] dx dy \quad (3)$$

的极小值等价。

由于剖分中的单元都是矩形, 所以函数类 H 中的任一函数, 在每一个单元 $\square_e$ 上, 都可取为双线性内插函数。设单元 $\square_e$ 的四个顶点分别为 i, j, m, p (图 2), 结点 i 的坐标为 (x_i, y_i) , 单元沿 x 和 y 方向的边长分别为 a 和 b , 不难求出, 在这个矩形单元 $\square_e$ 上的双线性内插函数

$$u(x, y) = (1 - \xi - \eta + \xi\eta)u_i + (\xi - \xi\eta)u_j + \xi\eta u_m + (\eta - \xi\eta)u_p, \quad (4)$$

这里

$$\begin{cases} x = x_i + a\xi, & 0 < \xi < 1, \\ y = y_i + b\eta, & 0 < \eta < 1, \end{cases} \quad (5)$$

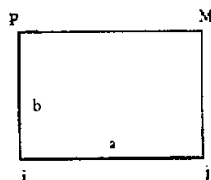


图 2

u_i, u_j, u_m, u_p 分别代表 u 在结点 i, j, m, p 处的值。

用向量符号, 令

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = (N_1, N_2, N_3, N_4) = (1 - \xi - \eta + \xi\eta, \xi - \xi\eta, \xi\eta, \eta - \xi\eta), \quad (6)$$

$$\mathbf{U}_e = (u_i, u_j, u_m, u_p)^T, \quad (7)$$

函数 $\mathbf{N}$ 也称为形函数, T 代表向量的转置, 这时, (4) 即可改写为

$$u(x, y) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{U}_e, \quad (8)$$

这里的乘法是向量的点乘积。如果记

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T = \mathbf{B}(\xi, \eta) \mathbf{U}_e, \quad (9)$$

由(8)和(5)不难求出

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\eta-1}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & -\frac{\eta}{a} \\ \frac{\xi-1}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

把(3)中的积分写成每个单元 $\square_e$ 上积分的总和, 并且利用(8)和(9), 可得

$$F(u) = \sum_e \mathbf{U}_e^T \iint_{\square_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx dy \mathbf{U}_e + \sum_e \mathbf{U}_e^T \iint_{\square_e} \frac{\mu^2}{m^2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx dy \mathbf{U}_e - 2 \sum_e \mathbf{U}_e^T \iint_{\square_e} J \left(\Phi, \frac{m^2}{f} \nabla^2 \Phi + f \right) \mathbf{N}^T dx dy. \quad (11)$$

利用(10)和(5)可以算出上式中的第一个积分。

$$\mathbf{K}' = \iint_{\square_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx dy = \begin{pmatrix} \frac{b}{3a} + \frac{a}{3b} & -\frac{b}{3a} + \frac{a}{6b} & -\frac{b}{6a} + \frac{a}{6b} & \frac{b}{6a} - \frac{a}{3b} \\ & \frac{b}{3a} + \frac{a}{3b} & \frac{b}{6a} - \frac{a}{3b} & \frac{b}{6a} + \frac{a}{6b} \\ & & \frac{b}{3a} + \frac{a}{3b} & -\frac{b}{3a} + \frac{a}{6b} \\ & & & \frac{b}{3a} + \frac{a}{3b} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

对称

如果 $\frac{\mu^2}{m^2}$ 是常数, 利用(6)和(5), 类似地可以算出第二个积分

$$\mathbf{K}_1' = \iint_{\Omega} \frac{\mu^2}{m^2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx dy = \begin{pmatrix} \frac{I}{9} & \frac{I}{18} & \frac{I}{36} & \frac{I}{18} \\ & \frac{I}{9} & \frac{I}{18} & \frac{I}{36} \\ & & \frac{I}{9} & \frac{I}{18} \\ \text{对称} & & & \frac{I}{9} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

这里 $I = \frac{\mu^2}{m^2} ab$. 为了求出(11)中的第三个积分, 令

$$\zeta = \frac{m^2}{f} \nabla^2 \Phi + f, \quad (14)$$

同时, 假定函数 Φ 和 ζ 也用形如(4)的双线性插值函数表示, 即在单元 Ω_e 上

$$\begin{cases} \Phi(x, y) = (1 - \xi - \eta + \xi\eta)\Phi_i + (\xi - \xi\eta)\Phi_j + \xi\eta\Phi_m + (\eta - \xi\eta)\Phi_p, \\ \zeta(x, y) = (1 - \xi - \eta + \xi\eta)\zeta_i + (\xi - \xi\eta)\zeta_j + \xi\eta\zeta_m + (\eta - \xi\eta)\zeta_p, \end{cases} \quad (15)$$

这里带下标的量是对应函数在下标那个结点处的值. 利用(15)和(5)计算出雅可比

$$\begin{aligned} J(\Phi, \zeta) = \frac{1}{ab} [& (1 - \eta)(\Phi_i \zeta_j - \zeta_i \Phi_j) + (\eta - \xi)(\Phi_i \zeta_m - \zeta_i \Phi_m) \\ & + (\xi - 1)(\Phi_i \zeta_p - \zeta_i \Phi_p) + \xi(\Phi_j \zeta_m - \zeta_j \Phi_m) \\ & + (1 - \xi - \eta)(\Phi_j \zeta_p - \zeta_j \Phi_p) + \eta(\Phi_m \zeta_p - \zeta_m \Phi_p)]. \end{aligned} \quad (16)$$

由(16)和(5), 算出(11)中的第三个积分

$$\mathbf{b}_e = \iint_{\Omega_e} J(\Phi, \zeta) \mathbf{N}^T dx dy = (b_i, b_j, b_m, b_p)^T, \quad (17)$$

这里

$$\begin{cases} b_i = \frac{1}{6} (\Phi_i \zeta_j - \zeta_i \Phi_j) - \frac{1}{6} (\Phi_i \zeta_p - \zeta_i \Phi_p) + \frac{1}{12} (\Phi_j \zeta_m - \zeta_j \Phi_m) \\ \quad + \frac{1}{12} (\Phi_j \zeta_p - \zeta_j \Phi_p) + \frac{1}{12} (\Phi_m \zeta_p - \zeta_m \Phi_p), \\ b_j = \frac{1}{6} (\Phi_i \zeta_j - \zeta_i \Phi_j) - \frac{1}{12} (\Phi_i \zeta_m - \zeta_i \Phi_m) - \frac{1}{12} (\Phi_i \zeta_p - \zeta_i \Phi_p) \\ \quad + \frac{1}{6} (\Phi_j \zeta_m - \zeta_j \Phi_m) + \frac{1}{12} (\Phi_m \zeta_p - \zeta_m \Phi_p), \\ b_m = \frac{1}{12} (\Phi_i \zeta_j - \zeta_i \Phi_j) - \frac{1}{12} (\Phi_i \zeta_p - \zeta_i \Phi_p) + \frac{1}{6} (\Phi_j \zeta_m - \zeta_j \Phi_m) \\ \quad - \frac{1}{12} (\Phi_j \zeta_p - \zeta_j \Phi_p) + \frac{1}{6} (\Phi_m \zeta_p - \zeta_m \Phi_p), \\ b_p = \frac{1}{12} (\Phi_i \zeta_j - \zeta_i \Phi_j) + \frac{1}{12} (\Phi_i \zeta_m - \zeta_i \Phi_m) - \frac{1}{6} (\Phi_i \zeta_p - \zeta_i \Phi_p) \\ \quad + \frac{1}{12} (\Phi_j \zeta_m - \zeta_j \Phi_m) + \frac{1}{6} (\Phi_m \zeta_p - \zeta_m \Phi_p). \end{cases} \quad (18)$$

这时(11)即可改写成

$$F(u) = \sum_e U_e^T K_1^e U_e + \sum_e U_e^T K_0^e U_e - 2 \sum_e U_e^T b_e,$$

这里 K_1^e , K_0^e 和 b_e 分别由公式(12), (13)和(17)决定。如果引进单元刚度矩阵

$$K^e = K_1^e + K_0^e, \quad (19)$$

则上式又可写成

$$F(u) = \sum_e U_e^T K^e U_e - 2 \sum_e U_e^T b_e. \quad (20)$$

如果引进总刚度矩阵 K 和对应的 b , 则(20)可写成

$$F(u) = U^T K U - 2 U^T b, \quad (21)$$

这里 U 是由 u 在所有结点处的值所组成的列向量:

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_L)^T, \quad (22)$$

L 是结点总数(包括边界结点)。总刚度矩阵 K 是正定、对称、稀疏、带状的。很明显,二次型(21)取极小值,当且仅当向量 U 满足方程组

$$K U = b. \quad (23)$$

方程组(23)就是所求的有限元方程。

如果 O 点是内结点, 则(23)中对应 O 点的方程只与以 O 点为公共顶点的四个相邻矩形九个顶点处 u 的值有关。如图3所示, 对应的方程就是

$$\sum_{i=0}^8 K[i] u_i = b[0], \quad (24)$$

这里系数

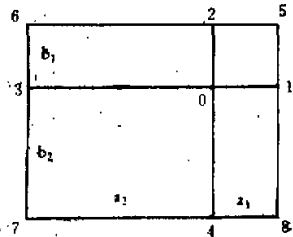


图 3

$$\left\{ \begin{aligned} K[0] &= \frac{b_1}{3a_1} + \frac{a_1}{3b_1} + \frac{b_1}{3a_2} + \frac{a_2}{3b_1} + \frac{b_2}{3a_2} + \frac{a_2}{3b_2} + \frac{b_2}{3a_1} + \frac{a_1}{3b_2} \\ &\quad + \frac{1}{9} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4), \\ K[1] &= -\frac{b_1}{3a_1} + \frac{a_1}{6b_1} - \frac{b_2}{3a_1} + \frac{a_1}{6b_2} + \frac{1}{18} (I_1 + I_4), \\ K[2] &= \frac{b_1}{6a_1} - \frac{a_1}{3b_1} + \frac{b_1}{6a_2} - \frac{a_2}{3b_1} + \frac{1}{18} (I_1 + I_2), \\ K[3] &= -\frac{b_1}{3a_2} + \frac{a_2}{6b_1} - \frac{b_2}{3a_2} + \frac{a_2}{6b_2} + \frac{1}{18} (I_2 + I_4), \\ K[4] &= \frac{b_2}{6a_2} - \frac{a_2}{3b_2} + \frac{b_2}{6a_1} - \frac{a_1}{3b_2} + \frac{1}{18} (I_3 + I_4), \\ K[5] &= -\frac{b_1}{6a_1} - \frac{a_1}{6b_1} + \frac{I_1}{36}, \\ K[6] &= -\frac{b_1}{6a_2} - \frac{a_2}{6b_1} + \frac{I_2}{36}, \\ K[7] &= -\frac{b_2}{6a_2} - \frac{a_2}{6b_2} + \frac{I_3}{36}, \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K[8] &= -\frac{b_2}{6a_1} - \frac{a_1}{6b_2} + \frac{I_4}{36}, \end{aligned} \right.$$

$$I_1 = \frac{\mu^2}{m^2} a_1 b_1, \quad I_2 = \frac{\mu^2}{m^2} a_2 b_1, \quad I_3 = \frac{\mu^2}{m^2} a_2 b_2, \quad I_4 = \frac{\mu^2}{m^2} a_1 b_2,$$

方程(24)的右端项

$$b[0] = \frac{1}{12} (G_0^{++} + G_0^{+x} + G_0^{x+}), \quad (26)$$

这里

$$\left\{ \begin{aligned} G_0^{++} &= (\Phi_1 - \Phi_3)(\zeta_2 - \zeta_4) - (\Phi_2 - \Phi_4)(\zeta_1 - \zeta_3), \\ G_0^{+x} &= \Phi_1(\zeta_5 - \zeta_8) - \Phi_3(\zeta_6 - \zeta_7) - \Phi_2(\zeta_5 - \zeta_6) + \Phi_4(\zeta_8 - \zeta_7), \\ G_0^{x+} &= \zeta_2(\Phi_5 - \Phi_6) - \zeta_4(\Phi_8 - \Phi_7) - \zeta_1(\Phi_5 - \Phi_8) + \zeta_3(\Phi_6 - \Phi_7). \end{aligned} \right. \quad (27)$$

很明显,方程(24)的系数(25)与矩形的边长有关。在等距网格: $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = h$ 时,方程(24)的左端与 Helmholtz 方程的带平均的九点差分格式相当,而方程(24)的右端和 Arakawa 守恒格式差不多。

求解方程组(24)时,首先要利用初始高度场求出 Φ_k 以及 ζ_k , 然后利用公式(27)和(26)求出方程(24)的右端项 $b[0]$ 。为了求出 ζ_k , 可以利用 Φ_k 和三次 Spline 插值函数按行按列分别求出 Φ 对 x 和 y 的二阶导数在结点处的值,而按公式(14)确定 ζ_k 。(不用 Spline 函数也可求出 ζ_k , 这时可利用公式(25), 取 $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0$, 求出对应的 $K[i]$, 然后按公式 $(\nabla^2 \Phi)_0 = \sum_{i=0}^8 \frac{4K[i]}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)} \Phi_i$ 求出 $\nabla^2 \Phi$ 在结点处的值,再利用公式(14)求出 ζ_0 , 这里 O 为任一内结点。和有限差分不同,对于边界结点可以求出 ζ 的值)。

二、预报实例

按上述方法,对正压涡度方程进行空间离散化后,再用通常在数值天气预报中所采用的三步法外推求出所需的预报场。在计算时,所取的不均匀加密网格如图(4)所示,其中大格距为 540 公里,加密格距为 270 公里。时间步长为半小时。求解时,不加空间平滑。计算结果证实,所采用的格式是稳定的,得到的 48 小时预报图与实况基本上一致。

图 4、图 5、图 6 是一次伴有大风与暴雨的江淮气旋过程。这次气旋的发生与发展是与西藏高原低槽东移相联系的。图 7、图 8 分别是 24 小时和 48 小时预报图。在这两张图上,上述低槽的东移和实况基本一致。但,在 24 小时预报图上没有报出与西南低涡相应的闭合系统。48 小时预报图上低槽北端表现不明显。当然,仅仅根据 500 毫巴的预报图要准确地作出气旋的预报还是比较困难的。但是,这两张预报图对于判断这次气旋的发展,无疑是有很大的参考价值的。同时,从总体上看,总的形势的预报基本上与实况一致。

1975 年 9 月下旬还作过两次试报。这两次试报的结果都与实况比较一致。9 月 28 日到 9 月 30 日的 48 小时预报图上,报出了新产生的东移闭合系统。根据这张预报图,结合预报员的经验,外推未来一至三天的天气演变趋势,预报出一次连续三天的阴雨过程。

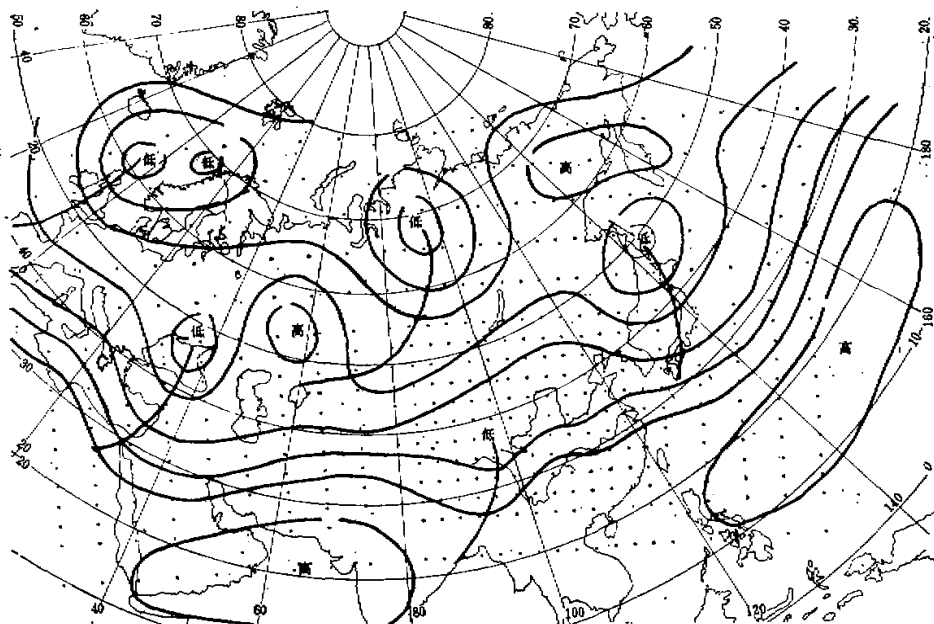


图 4 1973 年 4 月 28 日 20 时(北京时) 500 毫巴等压面图

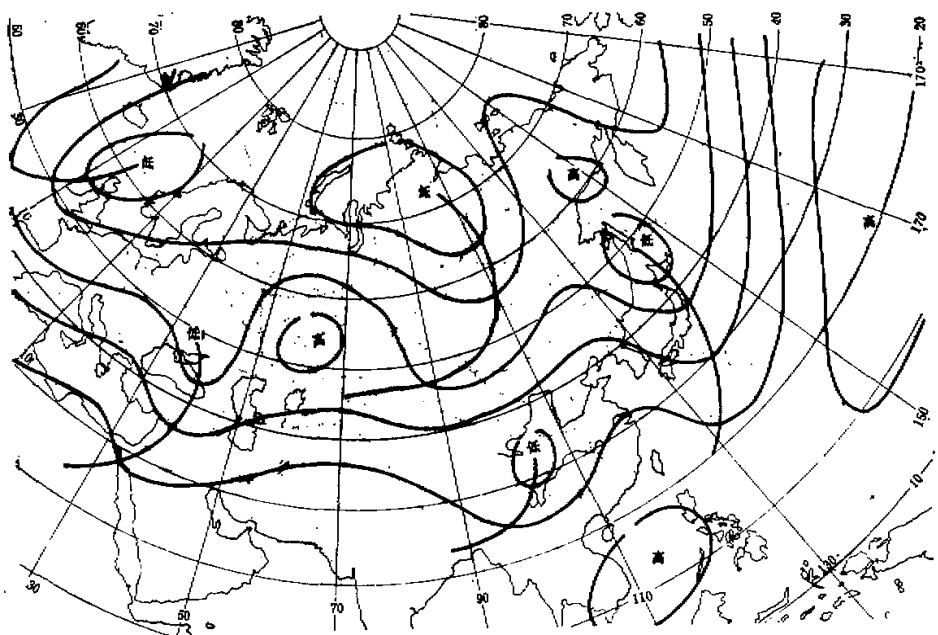


图 5 1973 年 4 月 29 日 20 时(北京时) 500 毫巴等压面图

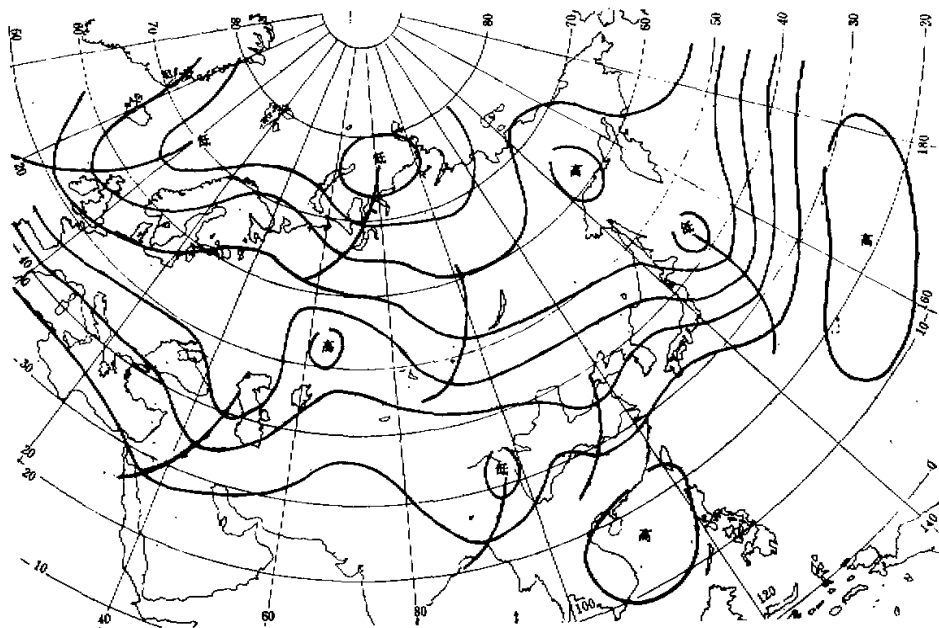


图 6 1973 年 4 月 30 日 20 时(北京时) 500 毫巴等压面图

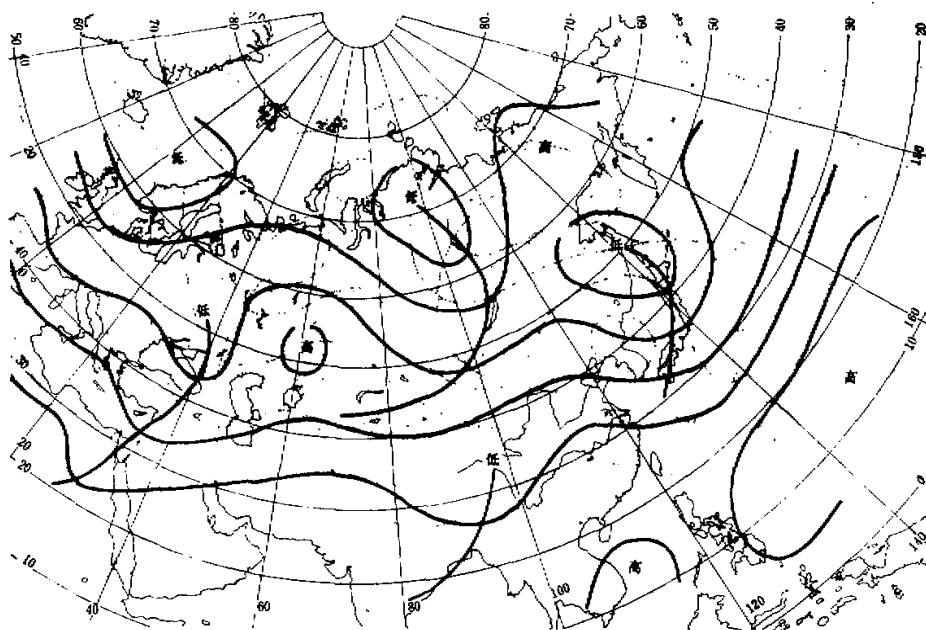


图 7 1973 年 4 月 29 日 20 时(北京时) 500 毫巴 24 小时预报图

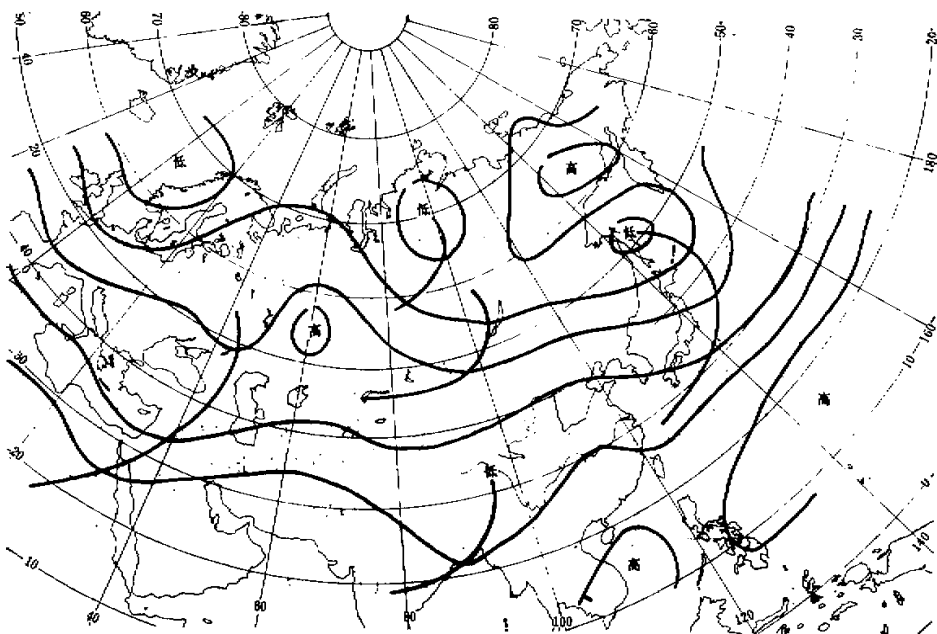


图 8 1973 年 4 月 30 日 20 时(北京时间) 500 毫巴 48 小时预报图
预报与实况符合。

三、Arakawa 守恒格式的推广与能量守恒

利用有限元法可以将 Arakawa 守恒格式推广到任意网格的情形。不失一般性,可以假定单元都是矩形,但所得的结论和论证的方法对任意单元都是成立的。

对于任一结点 O , 定义

$$J_0 = \frac{\sum_{\square_r} \iint_{\square_r} J(\Phi, \zeta) N_r(\xi, \eta) dx dy}{\sum_{\square_r} \iint_{\square_r} N_r(\xi, \eta) dx dy} \quad (28)$$

为函数 $J(\Phi, \zeta)$ 在结点 O 处的值,其中 $\square_r$ 是以 O 点为顶点的任一单元,求和号是对所有这样的单元求的。当 $\square_r$ 是矩形单元时,如果 O 点在单元 $\square_r$ 中任“ i ”角时, $N_r = N_1 = 1 - \xi - \eta + \xi\eta$; 如果 O 点在单元 $\square_r$ 中任“ j ”时, $N_r = N_2 = \xi - \xi\eta$; 如果 O 点在单元 $\square_r$ 中任“ m ”时, $N_r = N_3 = \xi\eta$; 如果 O 点在单元 $\square_r$ 中任“ p ”时, $N_r = N_4 = \eta - \xi\eta$ 。对于不是矩形的单元也可作类似的规定。公式(28)是函数 $J(\Phi, \zeta)$ 的高数化公式。

如果 $J(\Phi, \zeta)$ 是雅可比算子,利用公式(16),当 O 点是内结点时,不难求出

$$\sum_{\square_r} \iint_{\square_r} J(\Phi, \zeta) N_r dx dy = \frac{1}{12} (G_0^{++} + G_0^{+x} + G_0^{x+}),$$

这里的 G_0^{++} , G_0^{+x} , G_0^{x+} 与公式(27)所决定的相同。记(28)的分母为 S_0 , 当 O 点是内结点时,

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{\square_i} \iint_{\square_i} N_i(\xi, \eta) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_i} N_i(\xi, \eta) dx dy = \frac{1}{4} (a_1 + a_2)(b_1 + b_2), \end{aligned}$$

这里 a_1 , a_2 和 b_1 , b_2 分别为矩形单元 x 方向和 y 方向的边长(图 9), S_0 就是图 9 中划线部分的面积。由此可知, 当 O 点是内结点时, 由公式(28)和(16)求得 $J(\Phi, \zeta)$ 在 O 点的值:

$$J_0 = \frac{G_0^{++} + G_0^{+x} + G_0^{x+}}{3(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}. \quad (29)$$

很明显, 在等距矩形网格的情形: $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = h$ 时, 公式(29)就是通常所说的 Arakawa 守恒格式^[6]:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{12h^2} (G_0^{++} + G_0^{+x} + G_0^{x+}) \\ &= \frac{1}{3} (J_0^{++} + J_0^{+x} + J_0^{x+}), \end{aligned}$$

图 9

其中

$$J_0^{++} = \frac{1}{4h^2} G_0^{++}, \quad J_0^{+x} = \frac{1}{4h^2} G_0^{+x}, \quad J_0^{x+} = \frac{1}{4h^2} G_0^{x+}.$$

公式(28)是 Arakawa 格式在任意网格的推广。和基于用有限差分求得的 Arakawa 格式不同, 即使是边界结点也可用(28)求出 J 在该结点处的值。

这个推广了的 Arakawa 格式(28)也满足三个守恒关系:

$$\sum_0 J_0 S_0 = 0, \quad (\text{平均涡度守恒}) \quad (30)$$

$$\sum_0 \zeta_0 J_0 S_0 = 0, \quad (\text{均方涡度守恒}) \quad (31)$$

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = 0, \quad (\text{平均动能守恒}) \quad (32)$$

这里, J_0 由(28)决定, S_0 是(28)的分母, ζ_0 是 ζ 在结点 O 处的值, Φ_0 是 Φ 在结点 O 处的值, 求和号是对包括边界结点在内的一切结点求的。

事实上, 由区域 G 上的平均涡度守恒, 得知:

$$\iint_G J(\Phi, \zeta) dx dy = 0.$$

将上述积分改写为在所有单元 $\square_i$ 上积分的总和, 由上式得到:

$$\sum_i \iint_{\square_i} J(\Phi, \zeta) dx dy = 0, \quad (33)$$

这里 $\sum_i$ 是对 G 的所有单元 $\square_i$ 求的。

如果 $\square_e$ 是矩形^{*}), 则 $\sum_{i=1}^4 N_i = 1$; 由此得

$$\iint_{\square_e} J(\Phi, \zeta) dx dy = \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_e} J(\Phi, \zeta) N_i(\xi, \eta) dx dy.$$

由(33)得到

$$\sum_e \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_e} J(\Phi, \zeta) N_i(\xi, \eta) dx dy = 0. \quad (34)$$

现在来证明(30). 由(28)得到

$$\sum_0 J_0 S_0 = \sum_0 \sum_e \iint_{\square_e} J(\Phi, \zeta) N_e(\xi, \eta) dx dy.$$

将上式中的按结点 O 求和换成按每个单元 $\square_e$ 求和, 则得

$$\sum_0 J_0 S_0 = \sum_e \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_e} J(\Phi, \zeta) N_i(\xi, \eta) dx dy.$$

利用(34)得知(30)成立

$$\sum_0 J_0 S_0 = 0.$$

所以, (28)满足平均涡度守恒(30).

公式(31)和(32)的证明完全类似. 只证一个, 例如证(32).

由区域 G 上的平均动能守恒, 得知

$$\iint_G \Phi J(\Phi, \zeta) dx dy = 0.$$

由此得知

$$\sum_e \iint_{\square_e} \Phi J(\Phi, \zeta) dx dy = 0, \quad (35)$$

这里 $\sum_e$ 是对 G 的所有单元 $\square_e$ 求的,

另一方面, 由(28)得到

$$\begin{aligned} \sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 &= \sum_0 \Phi_0 \sum_e \iint_{\square_e} J(\Phi, \zeta) N_e(\xi, \eta) dx dy \\ &= \sum_0 \sum_e \iint_{\square_e} \Phi_0 J(\Phi, \zeta) N_e(\xi, \eta) dx dy. \end{aligned}$$

将按结点 O 求和换成按每个单元 $\square_e$ 求和, 则不难看出, 上式可改写成

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = \sum_e \sum_{i=1}^4 \iint_{\square_e} \Phi_{ei} J(\Phi, \zeta) N_i(\xi, \eta) dx dy, \quad (36)$$

这里 Φ_{ei} ($i = 1, 2, 3, 4$) 代表 Φ 在单元 $\square_e$ 上对应的 i, j, m, p 角处的值: $\Phi_{e1} = \Phi_i$, $\Phi_{e2} = \Phi_j$, $\Phi_{e3} = \Phi_m$, $\Phi_{e4} = \Phi_p$. 由插值函数, 在 $\square_e$ 上有

*) 形函数的坐标总和恒等于1, 这个性质对任意单元都成立.

$$\sum_{i=1}^4 \Phi_i N_i = N_1 \Phi_i + N_2 \Phi_j + N_3 \Phi_m = N_i \Phi_p = \Phi,$$

所以(36)即是

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = \sum_r \iint_{\Omega_r} \Phi J(\Phi, \zeta) dx dy.$$

由(35)得到

$$\sum_0 \Phi_0 J_0 S_0 = 0.$$

公式(32)得证.

因此公式(28)满足守恒关系式(30)、(31)、(32).

应当指出,在证明(30)、(31)、(32)时,并不一定要求单元是矩形,即使是矩形,也不一定要用双线性内插函数,并且雅可比的具体内插形式也没有用到,由此可见,利用离散化公式(28),可以求许多守恒格式,Arakawa 守恒形式以及在第一节中求出的守恒格式只是(28)的一个很特殊的情形.

由于解决了任意网格的离散化和守恒格式的设计问题,因此,有可能直接利用测站值进行数值天气预报.这可能对提高预报的精度是有帮助的.

公式(28)实质上是 Galerkin 方法的变形,与按一中所用的与变分原理相联系的方法相比,有许多方便之处,可以用于原始方程.

有关用有限元法处理原始方程和直接利用测站值进行数值天气预报的问题,将在另文中总结.

致谢: 本文是山东省气象局和山东大学协作科研项目 1974—1975 年度的工作总结.在开展这一工作的过程中,山东省气象局和山东大学各级领导和同志们,对这一工作给予极大的支持和鼓励.同时,中国科学院大气物理研究所、中央气象局气象科学研究所和北京大学地球物理系的有关同志们,给我们很大的鼓励和帮助;叶笃正先生、冯康先生和廖洞贤同志审阅了原稿,提出不少宝贵的意见;山东省气象局的于庆朗同志、张景华同志协助绘图,特此一并致谢.

参 考 资 料

- [1] 冯 康, 基于变分原理的差分格式, 应用数学与计算数学, 2:4 (1966), 286—292.
- [2] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [3] M. J. P. Cullen, J. Inst. Maths. Applies, 11 (1972), 15—31.
- [4] M. J. P. Cullen, J. Inst. Maths. Applies, 13 (1974), 233—247.
- [5] M. J. P. Cullen, Q. J. B. Met. Soc., Vol. 100, No. 426 (1974), 555.
- [6] A. Arakawa, J. Computational Phys., 1 (1966), 119—143.
- [7] D. C. Jespersen, J. Computational Phys., 16 (1974), 383—390.