

闪电通道的径向扩展

孙景群

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文从流体力学欧拉运动方程、连续方程和能量守恒方程出发,理论分析闪电通道的径向扩展,研究闪电冲击波的形成机制。

一、引 言

据观测,云地闪电通道中约有 10^4 — 10^5 安培的峰值电流通过,持续时间仅几十微秒^[1]。这样,在短时间内闪电通道中释放出大量的焦耳热,形成一个温度高达 10^4 K量级的等离子区^[2],从而出现冲击波。闪电后的雷声就是冲击波衰减为声波的结果。

闪电冲击波可能对雷雨云中云滴的蒸发、碰并、破碎、冻结和电化等微观物理过程产生影响^[3],闪电冲击波又是雷的成因,而雷的频谱特征则往往与云中存在冰雹与否有关^[4]。此外,无雷声的近闪曾有过一些观测记载,这说明若条件不具备,闪电也可能不产生冲击波。

为研究闪电冲击波的形成机制,曾利用长火花放电模拟云地闪电,进行闪电冲击波的实验研究^[5]。本文则试图通过闪电通道径向扩展的理论分析,考察形成闪电冲击波诸因子的作用,为进一步研究闪电冲击波的各种效应提供依据。

二、模式和基本方程

闪电通道除惯性力外,还受到两个力的作用:闪电电流产生的磁场对通道的箍缩力,即洛伦兹力(以下称“磁收缩力”);通道高压区向外的膨胀压力(以下称“通道压力”)。磁收缩力和通道压力梯度力的合力大小和方向决定了通道扩展(或收缩)加速度的大小和方向。当通道界面成为不可穿透时,它便像活塞一样压缩着通道周围的大气,因此当通道界面在大气中以超声速运动时,就会产生冲击波。

假设云地闪电的通道是一根光滑而轴向均匀的垂直圆柱体,并且是轴对称的,不考虑云地影响。通道由电子、离子和中性粒子组成。实验表明,火花放电通道中的电子、离子和中性粒子达到热平衡的时间为 10^{-7} 秒^[6],远小于云地闪击过程的特征时间。因此,在考

虑通道介质的运动状态时,不必区别对待电子、离子和中性粒子,而把通道中粒子当作一整体。

在柱坐标 (r, φ, z) 中,令通道中粒子的速度分量为

$$v_r = u(r, t), \quad v_z = \text{常数}, \quad v_\varphi = 0,$$

式中 t 为时间坐标。

对于单位体积元的闪电通道介质,在柱坐标中其运动方程、连续方程、状态方程和能量方程可写作

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + f_m \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r)}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu} \rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \mathcal{P} \quad (4)$$

式中 p 、 ρ 和 T 分别为通道介质的压力、密度和热平衡温度。 c_v 是通道介质的克分子定容比热。 μ 是通道介质的克分子量。 \mathcal{P} 是扣除了热辐射、热传导等能量损耗后的焦耳热功率。 f_m 是等效地作用在通道介质的洛伦兹力。

设 $j(r, t)$ 为闪电电流密度,因 $i_z = j(r, t)$, $i_\varphi = j_r = 0$, 所以磁场 $H_\varphi = H(r, t)$, $H_r = H_z = 0$ 。又因

$$H(r, t) = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r r j(r, t) dr$$

故有

$$f_m(r, t) = - \frac{4\pi j(r, t)}{c^2 r} \int_0^r r j(r, t) dr \quad (5)$$

式中 c 为光速。

将方程沿闪电通道截面平均,获得闪电通道扩展的简化方程。

1. 运动方程 将运动方程(1)在单位长度通道中,对通道截面取平均,可得

$$\int_0^a \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial r} \right] 2\pi r dr = - \int_0^a \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r dr + \int_0^a f_m 2\pi r dr \quad (6)$$

式中 a 为闪电通道半径。

火花放电实验表明,在火花通道内界面处的介质密度远大于火花通道中心的介质密度^[4]。故可设闪电通道介质的密度分布为

$$\rho = \rho_a(t) \left(\frac{r}{a} \right)^m \quad r \leq a \quad (7)$$

式中 ρ_a 是通道内界面处的介质密度, m 是常数。

同理可设通道内介质速度的分布为

$$u = u_a(t) \left(\frac{r}{a} \right)^n \quad r \leq a$$

u_a 是通道内界面处的介质速度, n 是常数。

磁收缩力 f_m 与通道内的电流密度 $j(r, t)$ 有关。可以证明, 闪电通道内的趋肤效应可忽略, 则电流密度与 r 无关, 即 $j(r, t) = j(t)$ 。

为估计闪电通道中的趋肤效应, 引入趋肤时间^[7]

$$\tau = \frac{a^2}{4D}$$

a 仍为通道半径, D 为磁场“扩散”系数, 可表为

$$D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

式中 σ 为闪电通道的电导率。设通道截面上电场强度 E 为常数时, 可用闪电电流强度 I 来表征通道中平均电导率

$$\sigma = \frac{I}{\pi a^2 E}$$

最后可得趋肤时间

$$\tau = \frac{I}{c^2 E}$$

取 $I = 10^5$ 安培, $E = 10^4$ 伏特/厘米, 求得 $\tau = 10^{-8}$ 秒, 远小于闪击过程的特征时间。因此, 闪电通道中趋肤效应可以忽略。

将 ρ 、 u 和 f_m 的表式代入(6)式, 并利用连续方程(2), 可推得

$$\frac{m+2}{n+m+2} \frac{d}{dt} (Mu_s) = -\frac{4I^2}{3ac^2} + 2\pi a(\bar{p} - p_s) \quad (8)$$

式中 M 是单位长度闪电通道介质的质量, I 为闪电电流强度, p_s 为通道内界面处的压力, \bar{p} 为闪电通道的平均压力, 并定义为

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \int_0^a p dr \quad (9)$$

设通道界面扩展速度即为通道内界面处的介质速度, $\frac{da}{dt} = u_s$, 则由质量守恒定律

$$\rho_s \left(u_s - \frac{da}{dt} \right) = \rho'_s \left(u'_s - \frac{da}{dt} \right)$$

式中 u'_s 、 ρ'_s 分别为闪电通道外界面处的环境大气介质速度和密度。于是有

$$u_s = u'_s = \frac{da}{dt}$$

这表明闪电通道内、外界面处的介质速度, 和通道界面的扩展速度三者相等。因此, 通道中电离气体质量守恒, 通道界面可看作一个不可穿透的物质面, 并有表式

$$M = \int_0^a 2\pi r \rho dr = \pi a_0^2 \rho_0$$

式中 a_0 、 ρ_0 分别为通道初始半径和初始密度。

于是方程(8)最后可化为

$$\frac{m+2}{n+m+2} M \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4I^2}{3ac^2} + 2\pi a(\bar{p} - p_s) \quad (10)$$

(10)式就是闪电通道扩展的简化方程。

2. 状态方程 当闪电通道内的气压小于 100 个大气压时^[3], 采用理想气体模式不会引起多大误差. 同时考虑到闪电通道介质处于热平衡状态, 则有状态方程

$$p = \frac{1}{\mu} \lambda \rho R T \quad (11)$$

式中 R 为气体常数, λ 是一个与离解度和电离度有关的系数. 对于完全电离的双原子分子气体, $\lambda = 4$. 火花放电实验表明, 当通道温度达 4×10^4 K 时, 通道完全电离^[5]. 因此, 闪电通道介质的系数 λ 近乎介于 1 至 4 之间.

3. 平均压力 \bar{p} 从能量方程 (4) 出发, 对闪电通道截面取平均, 来求取闪电通道的平均压力.

为了考虑因热辐射、热传导等引起的焦耳热耗损, 又不使问题复杂化, 将 \mathcal{P} 写成

$$\mathcal{P} = \eta_1 E. \quad (12)$$

$$\eta = \eta_1 \eta_2$$

式中 $\eta_1 < 1$, 称作热耗损系数, 它表示闪电通道中释放的焦耳热扣除了热耗损外, 尚保留在通道中的百分数. η_2 是一调节电场强度 E_0 大小的系数.

将 (12) 式代入 (4) 式, 并利用 (11) 式, 则可得

$$\frac{dp}{dt} - D_1 \frac{d \ln \rho}{dt} p = D_2 j \quad (13)$$

式中

$$D_1 = 1 + \frac{\lambda R}{c_s}$$

$$D_2 = \frac{\lambda R \eta E_0}{c_s}$$

方程 (13) 的解为

$$p = \rho^{D_1} \int_0^t D_2 j \rho^{-D_1} dt + \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{D_1} p_0 \quad (14)$$

引入 ρ 的分布公式 (7), 并利用 (9) 式关于平均压力 \bar{p} 的定义, 可得

$$\bar{p} = \frac{D_1}{\pi a^{D_1(m+2)}} \int_0^t I a^{D_1(m+2)-2} dt + \frac{\left(1 + \frac{m}{2}\right)^{D_1}}{D_1 m + 1} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{2D_1} p_0 \quad (15)$$

式中系数 D_1 、 D_2 与离化气体的克分子定容比热 c_s 有关. 火花放电通道中离化气体的克分子内能公式为^[6]

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\theta - 1} \times \frac{p}{\rho} \quad (16)$$

当气体介质的密度与温度满足:

$$\begin{cases} 10^{-4} < \frac{\rho}{\rho_0} < 10 \\ 10^4 \text{ K} < T < 3 \times 10^4 \text{ K} \end{cases} \quad (17)$$

则 (16) 式中的 θ 为常数. 对于空气介质, $\theta = 1.22$.

由(16)式,并利用状态方程(11),求得

$$c_v = \frac{\lambda R}{\theta - 1} \quad (18)$$

闪电通道中,电离气体的密度与温度基本满足条件(17)^[2],因此采用(18)式是恰当的。这样 D_1 、 D_2 可写成

$$\begin{aligned} D_1 &= \theta \\ D_2 &= (\theta - 1)\eta E_0 \end{aligned}$$

4. 反压 由动量守恒定律和质量守恒方程

$$\rho'_a \left(\frac{da}{dt} - u'_a \right) (u_a - u'_a) = p_a - p'_a$$

式中 p'_a 为闪电通道外界面处的压力。由于 $u_a = u'_a$, 于是可得

$$p_a = p'_a$$

闪电通道扩展或收缩时,通道界面就像一个柱形活塞,环境大气在通道界面处的反压 p'_a 等于通道内界面处的介质压力 p_a 。因此,式(10)中的 p_a 可近似用匀速运动活塞附近介质的反压 p'_a 表述。

为简便起见,以平面活塞的解析解代替柱形活塞的结果。这一近似在活塞运动速度大于 2 倍声速时,与柱形活塞的相对误差约小于 15%^[10]。活塞运动速度较小时,误差较大,但在此情况下反压所起作用已不显著。

匀速平面活塞附近介质压力的解析表式为^[11]

$$p_a = \begin{cases} \left[1 + \frac{(\gamma+1)\gamma}{4c_1^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{\gamma}{c_1} \frac{da}{dt} \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2} \right] p_0 & \frac{da}{dt} \geq 0 \\ \left[1 + \frac{\gamma-1}{2c_1} \frac{da}{dt} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} p_0 & \frac{da}{dt} \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中 γ 是大气中定压比热与定容比热的比值, c_1 是大气中的声速。虽然闪电通道并非匀速扩展,但(19)式仍给出了反压这一因子的作用。

5. 闪电电流波形 根据实际观测,闪电电流波形的经验解析式可写作^[12]

$$I = I_1(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (20)$$

式中 I_1 、 α 和 β 均为常数。 I_1 决定了电流大小, α 和 β 则决定了电流波形的变化过程。

6. 方程的无量纲化 公式(10)、(15)、(18)、(19)和(20)组成了通道扩展的方程组,现进行无量纲化。引入无量纲半径 x 和无量纲时间 τ

$$a = a_0 x; \quad t = t_* \tau$$

式中 a_0 为通道初始半径。选择时间尺度 t_* 和电流强度尺度 I_* 为

$$t_* = \left(\frac{F \rho_0}{2 p_0} \right)^{\frac{1}{2}} a_0; \quad I_* = \left(\frac{3 \pi c^2 p_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} a_0$$

式中

$$F = \frac{m+2}{n+m+2}$$

速度尺度 u_* 为

$$u_* = \frac{a_0}{t_*} = \left(\frac{2p_0}{F\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

这样,可得闪电通道扩展的无量纲方程

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = - \left(\frac{I(\tau)}{I_*} \right)^2 \frac{1}{x} + \left(\frac{\bar{p}}{p_0} - \frac{p_c}{p_0} \right) x \quad (21)$$

初始条件为

$$\tau = 0; \quad x = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = 0$$

(21)式中

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}}{p_0} &= \frac{q}{x^{D_1(m+2)}} \int_0^x \frac{I(\tau)}{I_*} x^{D_1(m+2)-2} d\tau + \frac{\left(1 + \frac{m}{2}\right)^{D_1}}{D_1 m + 1} \times \frac{1}{x^{2D_1}} \\ q &= \frac{(D_1 - 1)\eta E_0 c}{2p_0} \left(\frac{3\rho_0 F}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{p_c}{p_0} &= \begin{cases} 1 + \frac{(\gamma+1)\gamma}{4} \times \frac{u_*^2}{c_1^2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \gamma \frac{u_*}{c_1} \times \frac{dx}{d\tau} \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16} \times \frac{u_*^2}{c_1^2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2} \frac{dx}{d\tau} \geq 0 \\ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \times \frac{u_*}{c_1} \times \frac{dx}{d\tau} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{dx}{d\tau} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

方程(21)是一个二阶非线性常微分方程,在给定参量后,可求得闪电通道扩展速度及通道半径随时间变化的数值解。

三、方程的数值解及结果讨论

求方程(21)的数值解时,取如下参数值 $p_0 = 1.21 \times 10^{-3}$ 克/厘米³, $p_0 = 1.01 \times 10^4$ 达因/厘米², $c = 3 \times 10^{10}$ 厘米/秒, $c_1 = 3.42 \times 10^4$ 厘米/秒, $E_0 = 10^4$ 伏特/厘米, $\gamma = 1.4$, $m = 3$, $n = 1$, $\eta = 0.5$, $a_0 = 1, 5, 20$ 厘米。闪电电流波形 $I = I_1(e^{-\alpha\tau} - e^{-\beta\tau})$, 除取平均情况外,还取快过程和慢过程两种极端情况,其中 $I_1 = 3 \times 10^3, 3 \times 10^4, 3 \times 10^5$ 安培,其他参量列于表 1

表 1 不同闪电电流波形的参量

闪电 电流波形	α (秒 ⁻¹)	β (秒 ⁻¹)	闪电电流峰值 出现时间 t_M (微秒)	闪电电流 峰值 I_M	闪电电流半峰 值出现时间 t_H (微秒)	闪电电流强度 为 1/10 峰值 时的出现时间 t_T (微秒)
快过程	8.75×10^4	1.49×10^4	2.02	$0.791 I_1$	10.6	28.9
平均过程	4.40×10^4	4.60×10^3	5.65	$0.707 I_1$	23.6	60.0
慢过程	5.78×10^3	1.01×10^3	30.0	$0.792 I_1$	160	438

计算中时间从 0 到 t_T 为止,此后的过程因闪电电流强度已下降到峰值的十分之一,

不再值得注意了。在上述参量取不同组合情况下,求得方程(21)的数值解,计算结果示于图1—3。

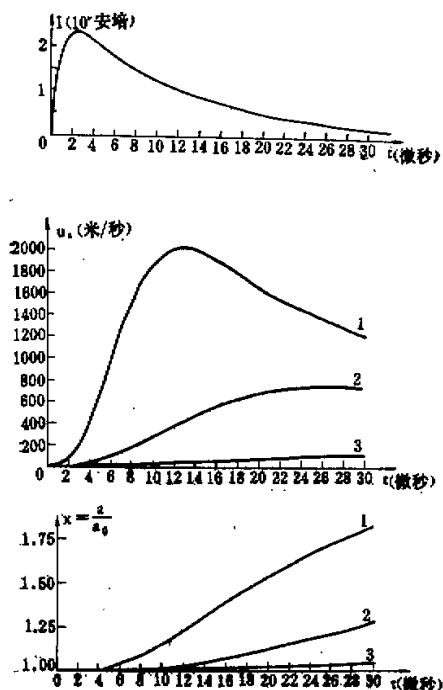


图1 闪电电流波形为快过程时,闪电通道界面扩展随时间的变化

($a_0 = 5$ 厘米。曲线1— $I_1 = 3 \times 10^4$ 安培, 曲线2— $I_1 = 3 \times 10^4$ 安培, 曲线3— $I_1 = 3 \times 10^3$ 安培。)

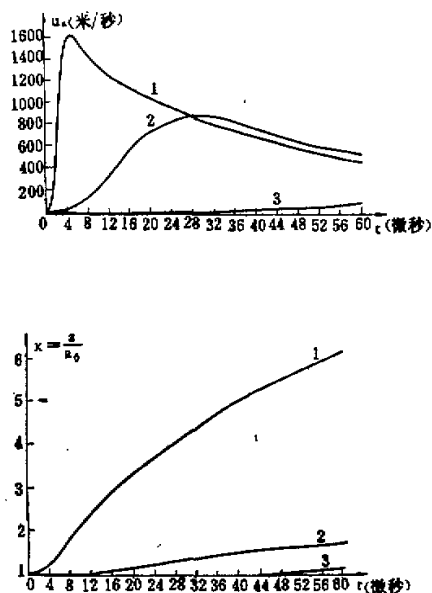


图2 闪电电流波形为平均过程时,闪电通道界面扩展随时间的变化

($I_1 = 3 \times 10^4$ 安培, 曲线1— $a_0 = 1$ 厘米, 曲线2— $a_0 = 5$ 厘米, 曲线3— $a_0 = 20$ 厘米)。

因 m 、 n 对通道扩展影响较小,在此着重讨论闪电电流波形及通道初始半径的作用。

图1表示 $a_0 = 5$ 厘米,闪电电流波形为快过程,而 I_1 取不同值时,闪电通道扩展的情况。 I_1 愈大,焦耳热引起的能量累积愈多,闪电通道扩展也愈强烈,反之亦然。

图1—3中,参量 $a_0 = 5$ 厘米, $I_1 = 3 \times 10^4$ 安培,而闪电电流波形变化过程不同时,通道扩展情况亦不同。在慢过程中,由于能量累积较多,因而通道扩展较强烈。若闪电电流波形为快过程时,则效果相反。

由此可见,闪电电流波形是决定闪电通道扩展的主要因子之一。

图2则表示当 a_0 很小时,由于闪电通道中被加热的质量较少,因而其内能的增加就更剧烈,使闪电通道扩展极为强烈。反之, a_0 愈大,则相同条件下通道扩展愈弱。因此,通道初始半径也是决定通道扩展的主要因子。

通过对平均压力与磁收缩压力的量纲分析,可估计磁收缩压力的作用。

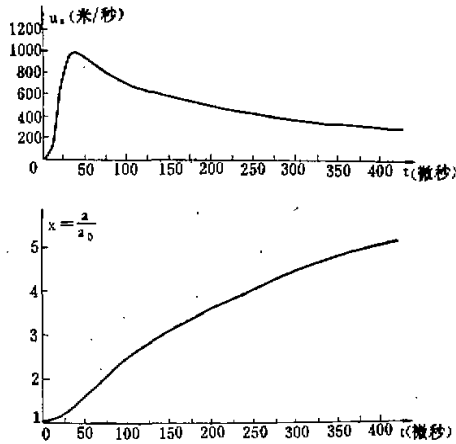


图3 闪电电流波形为慢过程时,闪电通道界面扩展随时间的变化

($I_1 = 3 \times 10^8$ 安培, $a_0 = 5$ 厘米)

计算表明(15)式中右边第一项总比第二项大很多,因此平均压力可近似为

$$\bar{p} \approx \frac{D_2}{\pi a^{D_1(m+2)}} \int_0^t I a^{D_1(m+2)-2} dt$$

磁收缩压力为

$$p_m = \frac{2I^2}{3\pi a^2 c^2}$$

取 a 、 I 、 t 的特征量为: 通道初始半径 a_0 ; 闪电电流波形表式(20)中的系数 I_1 , 以 I_1^* 表示; 闪电电流半峰值出现时间 t_H 。当 $\bar{p} = p_m$ 时, 各特征量必须满足条件:

$$I_1^* = \frac{3D_2 c^2}{2} t_H \quad (22)$$

取闪电电流波形为快过程, 其他各量的值与前述相同, 则由上式求得 $I_1^* = 1.8 \times 10^7$ 安培。在一般情况下, $I_1 \ll I_1^*$, 因此闪电通道的磁收缩效应可以忽略。由此可见, 闪电通道仅受洛伦兹力的作用而不断收缩的观点^[21], 是不切实际的。

四、结 论

闪电通道的扩展, 主要取决于闪电电流波形; 通道初始半径; 与热损耗、电场强度有关的系数 η 。只要条件合适, 闪电通道界面扩展速度就可远大于声速, 形成冲击波。在闪电通道扩展的过程中, 磁收缩效应可以忽略。

本文承蒙周秀骥同志指正, 胡欢陵同志参加了部分工作, 在此一并致谢。

参 考 资 料

- [1] B. J. Mason, *The physics of Clouds*, Chap. 9, 1971, clarendon press.
- [2] R. E. Orville, *Planetary Electrodynamics*, Vol. I, Chap. IV, (Ed. by S. C. Coroniti, J. Hughes), 1969, Gordon and Breach Science publishers.
- [3] 中国科学院地理研究所, 气象, 1975, 8, 14—16.
- [4] 孙景群、张文, 地球物理学报, 1966, 15(2), 119—125.
- [5] с. л. Мендельштам, и. к. суходров, ЖЭТФ, 1953, 24 (6), 701—707.
- [6] Г. Г. Долгов, С. Л. Мендельштам, ЖЭТФ, 1953, 24 (6) 691—700.
- [7] С. И. Брагинский, в. д. шафранов, 等离子体物理学与受控热核反应的问题, 第二卷, 1962, 24—76 科学出版社.
- [8] Ю. Н. Живлюк, С. Л. Мендельштам, ЖЭТФ, 1961, 40(2), 483—487.
- [9] С. И. Драбкина, ЖЭТФ, 1951, 21(4) 473—483.
- [10] Л. И. Седов, Метод подобия и размерности в Механике, Глава VI §3, М. гостехиздат 1957.
- [11] Л. Д. 朗道, Е. М. 栗非席兹, 连续介质力学, 第二册, 第十章, 人民教育出版社, 1960.
- [12] S. Flügge (Ed.), *Handbuch der Physik* Band XXII Gasentladungen II, p. 605, Springer-Verlag, 1956.
- [13] W. H. Evans, *Geof. pura E. Appl.*, 1962, 52, 162—168.

RADIAL EXPANSION OF LIGHTNING CHANNELS

Sun Jing-qun

(Institute of Atmospheric Physics Academia Sinica)

Abstract

Radial expansion of lightning channels are analysed theoretically and the mechanism of the formation of shock waves of lightning is discussed by applying the equation of motion, the equation of continuity and the equation of energy conservation of hydrostatics.