第4卷 第3期 大气科学 Vol. 4, No. 3
1980年9月 SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA Sept., 1980

非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用*

巢纪平
（中国科学院大气物理研究所）

提　要

应用 WKB 近似，分析了大尺度大气层结的水平不均匀和时间变化对缓变重力惯性波中垂直运动发展的影响，用得到的理论结果，对暴雨预报中的某些问题作了初步的定性解释.

一、引　言

中尺度暴雨预报对发展国民经济和保障人民的生命财产都有重大的实际意义，同时这也是当前气象科学中急待研究解决的课题之一．中尺度暴雨的发生需要有一定的大尺度天气形势作背景，天气学分析表明，有一类暴雨经常发生在低空出现西南急流的形势下，一般并认为，低空西南急流将从低纬带来暖湿空气，如同时高空有冷空气南下，这时将出现大范围位势不稳定区（$\partial\theta_{se}/\partial z<0$，$\theta_{se}$ 为假相当位温）．一般来说，造成暴雨的中尺度雷达回波源地是位于对流层中、下部大尺度上升运动区内，位于不稳定层结区域内，位于低空正涡度区域内[1]．联系上面提到的大尺度背景，亦即暴雨的落区经常在低空西南急流左侧前方的不稳定区域内**.

为什么会形成低空西南急流，以及它的存在是否只起了输送暖湿空气的作用，这些在本质上是属于大尺度天气动力学研究范畴中的问题，需要另行探讨.

即使上述大尺度天气条件已经具备，但也经常有不出现暴雨的情况．事实上，要使潜在的位势不稳定能量释放出来并造成强烈的对流云系，需要有一定强度的中尺度触发机制，单靠大尺度的垂直运动显然是不够的．中尺度天气学的分析指出，一场暴雨往往和低空的切变线、辐合线或中尺度低涡相联系．在一个上述的中尺度系统中（如低空的辐合线），是可以造成一定强度的垂直气流的．但由于质量的连续性，也可以反过来说，由于有一定垂直分布的上升气流的存在，在地面上可以表现成为一条辐合线．由于垂直速度是非常规气象观测量，很难说明辐合线和上升运动之间的因果联系．因此，如不是事后分析，而从预报的观点，即使发现了上述某一些中尺度系统，还不能作为预报暴雨的充分依据．这正是暴雨预报中的难点之一，而暴雨的落区预报，那就更困难了.

1978年8月28日收到修改稿.

* 这是在第四次热带天气科研协作会议上的一个报告，经同意引用会议中一些未发表的观测资料，作者谨表感谢.

** 华南前汛期暴雨会战组：华南前汛期暴雨落区预报的初步探讨.

我们认为，在暴雨预报中的一个重要环节，在于分析、认识上述中尺度系统现象的物理本质.

近十多年来，雷达技术的发展和雷达观测网的建立，为认识中尺度系统的物理本质，提供了有利的件条. 从分析雷达回波的移动和发展，至少对某些带状的回波有理由认为，与这些回波带相应的，并造成对流天气的中尺度系统，在本质上是一类重力惯性波. 事实上，这并不是新的概念，很早 Tepper[2] 就认为锋前产生强对流天气的飑线是重力惯性波、甚至，也有人在很早就指出[3]，台风中的螺旋雨带也是大气中的一类重力内波. 但由于雷达回波带经常表现成孤立的、窄长的带状形式，与周期性的水波在形式上迥然不同，因此使某些人怀疑这是否是一类波动. 但波动的概念是广泛的，其表现的形式也是多种多样的，周期性的水波和大气中波状云系（如背风波云系）是一类形式，呈孤立状的，甚至近年来所发现的峰值很高而宽度很窄的所谓孤子 (Soliton)，在本质上也是一类波动.

重力内波，或尺度大到地球转动起作用的重力惯性波，在大气中是经常能产生的，问题在于有的产生后具有生命力，即强度可以得到发展并具有长的生命史，而有的由于宏观条件不具备，产生后瞬息即逝. 所以从研究激发暴雨产生的中尺度机制的角度，研究的重点之一在于探讨发生暴雨的大尺度背景条件对重力惯性波的发展是否有利，进而探讨在大尺度背景场中的那些部位有利. 由于低空强气流对重力惯性波发展的动力影响，我们已作过初步的讨论[4]，在本文中只分析由于大气层结在水平方向分布的不均匀性和它的时间变化，对重力惯性波中垂直运动发展的影响. 同时将用得到的理论结果，对发生暴雨的某些现象（如暴雨的强度和落区等）给予初步的定性的解释.

二、基本方程和简谐波解

在无盛行风的大气中，在静力平衡和 Boussinesq 近似下，有下面的线性化方程组

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \tag{1a}$$

$$0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{g}{\bar{\theta}} \theta' \tag{1b}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} w' = 0 \tag{1c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{1d}$$

式中 $\mathbf{v}' = (u', v')$ 为水平风速向量，w' 为垂直速度，θ' 为扰动位温；∇ 是水平梯度算子，$\bar{\theta}$ 为背景场的位温；其他符号为常用. 由于方程组(1)近似地得到对 w' 的方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + N^2 \Delta w' = 0 \tag{2}$$

式中 $f = 2\Omega \sin \phi$ 为柯利奥来参数，Δ 为两维水平拉普拉斯算子；而

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \tag{3}$$

N 为 Brunt-Väisälä 频率

当 N^2 为常数,并设解正比于 $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, 立即得到色散关系

$$\omega = \pm \frac{1}{k_z}(N^2 k_l^2 + f^2 k_z^2)^{1/2} \tag{4}$$

式中 ω 为频率, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 为波数向量, $k_l^2 = k_x^2 + k_y^2$.

三、缓变波列的动力学

下面研究当 N^2 在水平方向和时间上都是缓变函数的情况,所谓“缓变”是指,如波长为λ,而 N^2 在水平方向的变化其特征尺度如为 l, 则$\lambda/l \ll 1$;类似地,如波的振荡周期为 τ, 而 N^2 时间变化的特征时间为 T, 则同样有 $\tau/T \ll 1$. 在这种层结缓变的背景场中,重力惯性的振荡频率和波数,都将偏离如(4)式所表示的那种严格的简谐波解,并在空间和时间上都要随着层结的变化而发生变化. 如图 1 所示,现在我们着重研究一个波列的整体行为,而并不去分析其中每一个波的个别性质,即分析图中包线 a 的演变和发展.

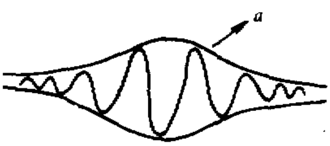

图 1

方程(2)的边界条件取成

$$z = 0,\ w' = 0,\ z = H,\ w' = 0 \tag{5}$$

满足这一边界条件的解可以设成

$$w' = W(x, y, t)\sin\frac{n\pi}{H}z \tag{6}$$

这时方程(2)变成

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)W \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)W - \tilde{N}^2\Delta W = 0 \tag{7}$$

式中 $\tilde{N}^2 = (NH/n\pi)^2$

应用 WKB 近似方法,将解写成[5]

$$(\hat{W}_0(x, y, t) + \epsilon\hat{W}_1(x, y, t) + \cdots)e^{i\epsilon^{-1}\phi(x,y,t)} \tag{8}$$

式中 ϵ 为一小参数,φ 称为位相函数,并有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\omega,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = kx,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = ky \tag{9}$$

将(8)、(9)代入(7)式,并将各项按 ϵ 的幂次方排列,有

$$\epsilon^{-2}:\ \mathscr{L}(-i\omega, ikx, iky) = -\omega^2 + \tilde{N}^2 k_l^2 + f^{*2} = 0 \tag{10}$$

其中 $f^* = f\epsilon$. 由此得到局地色散关系

$$\omega = \pm[\tilde{N}^2 k_l^2 + f^{*2}]^{1/2} = \Omega(k_l, x, y, t) \tag{10'}$$

与(4)式比较,除现在各量可以是时间和坐标的函数外,两者在形式上是一致的. 由(10')式立即得到局地群速度,为

$$\mathbf{C}_g = \frac{\mathbf{k}_l}{\omega}\tilde{N}^2 \tag{11}$$

另外,容易算得[5]

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathbf{C}_g\cdot\nabla\omega=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{k_l} \tag{12}$$

右端下标表示取微分时 k_l 固定．类似的关系对波向量 $\mathbf{k}_l$ 也可以写出，在此略．

下面来求波能量的输送方程，对 ε^{-1} 次幂次方，有

$$\varepsilon^{-1}:\ \frac{\partial\hat{W}_0}{\partial t}+\mathbf{C}_g\cdot\nabla\hat{W}_0=-\frac{1}{2\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial t}+\widetilde{N}^2\nabla\cdot\mathbf{k}_l\right]\hat{W}_0 \tag{13}$$

由于波能量正比于波振幅平方，即 $\varepsilon\propto\hat{W}_0^2$，因此波振幅方程(13)可以对波能量写成

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\mathbf{C}_g\cdot\nabla\varepsilon=-\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+\widetilde{N}^2\nabla\cdot\mathbf{k}_l\right)\varepsilon \tag{14}$$

由(11)式，并考虑到

$$\nabla\cdot\mathbf{C}_g=\frac{\widetilde{N}^2}{\omega}\nabla\cdot\mathbf{k}_l+\frac{1}{\omega}\nabla\widetilde{N}^2\cdot\mathbf{k}_l-\frac{\widetilde{N}^2}{\omega^2}\nabla\omega\cdot\mathbf{k}_l$$

于是可以将方程(14)改写成

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{C}_g\varepsilon)=\left[-\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathbf{C}_g\cdot\nabla\omega\right)+\frac{\mathbf{k}_l}{\omega}\cdot\nabla\widetilde{N}^2\right]\varepsilon \tag{15}$$

应用(12)式得到

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{C}_g\varepsilon)=\left[-\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{k_l}+\frac{\mathbf{k}_l}{\omega}\cdot\nabla\widetilde{N}^2\right]\varepsilon \tag{16}$$

再考虑到色散关系(10′)式后，最后得到

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{C}_g\varepsilon)=\frac{k_l^2}{\omega^2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{N}^2}{\partial t}+C\frac{\mathbf{k}_l}{|k_l|}\cdot\nabla\widetilde{N}^2\right]\varepsilon \tag{17}$$

式中 $C=\omega/k_l$ 为波的位相速．

由此可见，如果层结是均匀和常定的，则重力惯性波的波能量(或垂直速度)取熟知的守恒形式[5]

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{C}_g\varepsilon)=0 \tag{18}$$

如果层结只是时间的函数，则由(15)立即得到波作用密度守恒[5]

$$\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{C}_g\omega\varepsilon)=0 \tag{19}$$

因此与(18)式相比较可以称由于背景场中层结的不均匀性和时间变化而造成的方程(17)的右端项，为波能量源，或重力惯性波发展的源(汇)．

四、讨论和应用

当将上述理论用于暴雨预报时，由于水汽潜热的影响，可以将位温 θ 改用假相当位温 θ_{se}．θ_{se} 与 θ 不同，在一定条件下它可以随高度递减，即

$$N_{se}^2=\frac{g}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial z}<0 \tag{20}$$

当此式成立时，色散关系(11)变成

$$\omega_{se}=\pm[f^{*2}-|\widetilde{N}_{se}^2|k_l^2]^{1/2} \tag{21}$$

可见对于一定大小的 $|\widetilde{N}_{se}|$，上式有可能对短波长的振动频率为虚数，即这时波动性消失，转化成对流，但当波长适当长后，括号中由于有 f 的作用仍可取正值，这时频率仍为实数，亦即仍存在波动性．这表明，在我们所讨论的大尺度背景条件下，在不稳定大气中，只能有对流，而不能有重力内波，但却可以存在重力惯性波．这种现象可以从雷达回波上看到，在一条带状的雷达回波中，其中可以出现一块块对流单体，而整个的回波带却又具有波动那样的传播性质．

当(20)式成立时，方程(17)变成

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{C}_g\varepsilon)=\frac{k_l^2}{\omega_{se}^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial|\widetilde{N}_{se}^2|}{\partial t}-C_{se}\frac{\mathbf{k}_l}{|k_l|}\cdot\nabla|\widetilde{N}_{se}^2|\right]\varepsilon \qquad (22)$$

现在分别讨论右端两个源项的作用：

i) 在所考虑的区域中，如不稳定能量随时间增加，如设在区域的边界上垂直速度为零，则对这个区域积分，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s \varepsilon ds=\int_s \frac{k_l^2}{\omega_{se}^2}\frac{\partial|\widetilde{N}_{se}^2|}{\partial t}\,ds \qquad (23)$$

可见在整个区域中波能量将增加，自然相应地波动中的垂直运动也将加强，但现在的垂直运动是重力惯性波这类中尺度系统中的，其强度自然要比大尺度背景场中的垂直运动大得多，因此更容易把潜在的不稳定能量充分地激发并释放出来，而产生较大的雨量．

从 1977 年 5 月 27 日到 31 日，在华南出现了历史上罕见的大暴雨．今以阳江($\theta_{se\ 600mb}-\theta_{se\ 1000mb}$)的值来代表这个区域中不稳定能量的时间变化，则如图 2 的观测表明*，正在这一段下特大暴雨的时段中，位势不稳定能量的总趋势逐日增加．

ii) 方程(22)右端第二项的物理意义容易理解，它表示不稳定能量将以波动的相速度传播，若波动(如一回波带)从不稳定能量的高值区向低值区传播时，这个波动在传播过程中其波动能量将增加，反之则减小．因此单从这一项的作用看，一条已发现的回波带，能

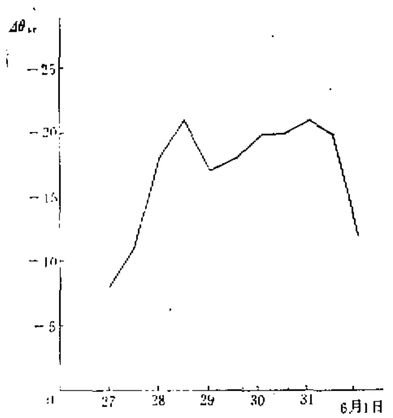

图 2

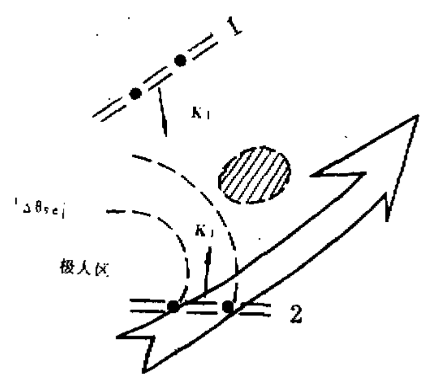

图 3

* 资料取自华南前汛期暴雨会战组："77.5"特大暴雨的大尺度分析一文．

否维持较长的生命史并得到发展，要看它处在大尺度背景场中的位置和传播方向．在示意图 3 中，回波带1，由于是从不稳定能量的低值区向高值区传播，故将衰弱；而回波带 2，由于从不稳定能量的高值区向低值区传播，将得到加强．因此，由于回波带 2 在传播过程中不断发展，其暴雨的落区将出现在西南急流（图中双箭头所示）的左侧前方，而并不出现在不稳定潜热的极大区中（图中阴影区表示暴雨落区）.

暴雨落区出现在西南急流的左侧前方，这是暴雨预报中的一个重要现象，这种现象可以用上面的物理过程作为一种可能的解释．从 1977 年 5 月 31 日的雷达回波看，该日有两条主要的回波系统，一条呈西南——东北走向，移向从北向南，在大尺度背景场中的相对位置，相似于图 3 中的回波带 1，这条回波带的生命史不到 3 个小时，雨量也不大，只有十多个毫米．另一条回波带其位置在第一条回波带的东南方位，基本上呈东——西走向，有北移趋势，相当图 3 中回波带 2，其生命期维持了 10 个小时以上，并在粤中南半部下了暴雨*.

一般来说，在事先要判断在什么地方会新生回波，这是困难的，但如果雷达已观测到有回波带出现，并确定其传播方向后，是有可能根据大尺度背景场的特点来预报其未来的发展趋势的，从而能在一定程度上对暴雨的落区作出中尺度区域的预测．当然这是一个困难的研究课题，既需要对中尺度天气和回波作更多的分析以积累经验，同时也需要联系实际加强对中尺度系统的动力学研究．本文的目的仅在于用一个简单的模式作一些初步的动力学分析，以引起从事暴雨预报研究的实际工作者和理论工作者的兴趣，从多种学术观点出发来共同攻克这一具有重大实际意义和科学意义的气象问题.

参　考　文　献

[1] 陶诗言，有关暴雨分析预报的一些问题，大气科学，1, 64—72, 1977.
[2] Tepper, M., *J. Meteor.*, 7, 21—29, 1950.
[3] Riehl, H., Compendium of meteorology, *Boston Amer. Meteor., Soc.*, 902—913, 1951.
[4] 巢纪平、吴钦岳，地转气流中的重力惯性波，气象学报，34 523—530, 1964.
[5] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves A Wiley-Interseience Publication, 1974.

THE GRAVITATIONAL WAVE IN NON-UNIFORM STRATIFICATION ATMOSPHERE AND ITS PRELIMINARY APPLICATION FOR THE PREDICTION OF HEAVY RAINFALL

Chao Jih-ping

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

The characteristics of the gravitational wave in a stratification atmosphere which is non-uniform both in space and time are analysed by the use of W.K.B. method. Some phenomena in prediction of heavy rainfall are qualitatively explained by the use of the theoretical results.

* 见华南前汛期暴雨会战组：1977 年 5 月 31 日粤中暴雨雷达回波系统分析.