

非线性计算稳定性的比较分析

季 仲 贞

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

非线性计算稳定性是数值天气预报中的一个重要问题。本文以一维非线性平流方程为模型,对六种常见的非线性差分格式进行定性和定量的稳定性比较分析,特别强调了非线性计算稳定性与格式结构和初值形式的依赖关系,从另一个角度揭示了非线性计算不稳定的特性和机理。

一、引 言

通常,数值天气预报问题是对一组非线性时变偏微分方程进行数值求解的,在用有限差分法求解时,差分格式的计算稳定性是一个重要的数学问题。由于数值天气预报方程是较复杂的非线性方程,不易于直接进行非线性计算稳定分析,然而,这些方程一般都有平流形式的非线性项,因此对非线性平流方程差分格式的计算稳定性分析在很大程度上仍能反映天气预报方程的非线性特性。

人所共知,对线性常数系数时变差分格式的稳定性分析,采用福氏方法是十分成功和有效的,并且对于相应的非线性方程的计算稳定性也有很大的参考意义。但是,实践证明非线性方程还有其特殊性,非线性计算不稳定不同于线性计算不稳定,它常常是一种突变性的现象,并且不能用缩短时间步长来克服。因此对非线性方程的计算稳定性进行一些针对性的分析是必要的,也是重要的。许多作者早已作过这种分析^[1-3],在[3]中我们作了扼要的评述。这些分析都是从不同的角度去揭示非线性计算稳定性的特性和机制,问题已在逐步深入,但并没有完全解决。本文从非线性平流方程的一个普遍性格式出发,列举一些常见的格式进行定性定量的比较分析,特别强调了格式结构和初值形式与非线性计算稳定性的关系,并且把非线性稳定性分析的结果与相应线性化方程稳定性分析的结果统一地进行了比较,使得进一步加深对非线性计算不稳定的认识。

二、平流方程与差分格式

考虑一维非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \quad (2.1)$$

如果取初值为

$$u(x, 0) = g(x) \quad (2.2)$$

那末,在周期边界条件下,方程(2.1)有行波解:

$$u(x, t) = g(x - ut) \quad (2.3)$$

特别的,令

$$u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x \quad (2.2)'$$

那末,在周期边界条件下,方程(2.1)的行波解为:

$$u(x, t) = 1.5 + \sin 2\pi(x - ut) \quad (2.3)'$$

显然这时 $u(x, t)$ 总是有界的,即

$$|u(x, t)| \leq 2.5.$$

这是方程(2.1)(2.2)' 的解的一个重要特性.

此外,不难看到, (2.1)是关于量 $u, \frac{1}{2}u^2, \frac{1}{3}u^3, \dots$ 是守恒的,尤其是平方量 $\frac{1}{2}u^2$ 的守恒性对构造计算稳定的差分格式是十分有用的.

方程(2.1)是平流形式的方程,为了构造差分格式的方便,可以把(2.1)改写为通量形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad (2.4)$$

还可以改写为平流和通量的组合形式,如

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uu}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uu}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.6)$$

或者更一般地写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta}{2} \frac{\partial uu}{\partial x} + (1 - \theta) u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.7)$$

和

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\theta}{2} \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + (1 - \theta) u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.8)$$

在 (x, t) 空间布网, 相应的步长记为 $\Delta x, \Delta t$, 设 $\varphi(x, t)$ 为 (x, t) 空间中任一函数, 记

$$\begin{aligned} \varphi_j^n &= \varphi(j\Delta x, n\Delta t), \\ \varphi_x &= \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x}, \quad \varphi_x = \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}, \\ \phi_{i\eta} &= \begin{cases} \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} & (\eta = 1) \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n-1}}{2\Delta t} & (\eta = 2) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

于是可以构造逼近(2.8)的如下普遍性差分格式:

$$\varphi_{i\eta} + L_{\theta}^{\sigma, \theta}(\varphi, u) = 0 \quad (2.10)$$

其中

$$L_{\theta}^{a,\theta}(\varphi, u) = \frac{\theta}{2} [\alpha(u\varphi)_x + (1-\alpha)(u\varphi)_x] \\ + (1-\theta)[\beta u\varphi_x + (1-\beta)u\varphi_x] \quad (2.11)$$

且

$$0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1.$$

由(2.10)(2.11)出发可得各种各样一阶二阶差分格式。[5]中给出该格式更系统的稳定性分析,而本文只着重分析如下几种常见格式的稳定性。

格式 I (向前差格式)

$$u_{i,1} + L_0^{0,1}(u, u) = 0 \quad (2.12)$$

格式 II (迎风差格式)

$$u_{i,1} + L_0^{0,0}(u, u) = 0 \quad (\text{当 } u \geq 0) \quad (2.13)$$

$$u_{i,1} + L_0^{0,1}(u, u) = 0 \quad (\text{当 } u \leq 0) \quad (2.14)$$

格式 III (守恒型中央差格式)

$$u_{i,2} + L_1^{\frac{1}{2},0}(u, u) = 0 \quad (2.15)$$

格式 IV (一次守恒格式)

$$u_{i,2} + L_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(u, u) = 0 \quad (2.16)$$

格式 V (二次准守恒格式)

$$u_{i,2} + L_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}(u, u) = 0 \quad (2.17)$$

格式 VI (二次守恒格式)

$$u_{i,1} + L_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}(\bar{u}, \bar{u}) = 0 \quad (2.18)$$

其中格式 IV 可视为 Lilly 格式在一维情形的形式,而格式 VI 是[4]中建议的格式在一维情形的体现。

三、格式的非线性稳定性分析

利用福氏方法不难分析与前述格式(2.12)~(2.18)相应的线性化方程的格式,这时,格式 I 绝对不稳定,格式 VI 绝对稳定,其余格式都在满足

$$\left| u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1 \quad (3.1)$$

的条件下是稳定的。但是在非线性情形下,这些格式的稳定性如何呢?考虑到不同格式的特点和各种稳定性分析方法的优点和局限性,对前述几种格式我们分别采用三种不同的方法进行分析。对格式 I、II 采用类似于[6]中提出的方法(我们称之为“截断粘性法”),对格式 III、IV、V 采用[5]中所用的方法(我们称之为“特解代入法”),对格式 VI 采用“能量法”。

格式 I:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.2)$$

由泰勒展开可得

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t^2}{3!} + O(\Delta t^3) \quad (3.3)$$

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^5) \quad (3.4)$$

利用(2.1)可得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3.5)$$

把(3.5)代入(3.3),再把(3.3)代入(3.2)得对应于格式 I 的相当微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Delta t - \frac{\Delta t}{2!} u^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (3.6)$$

由于(3.6)右端截断粘性项系数 $\left(-\frac{\Delta t}{2} u^2\right)$ 永远为负,故格式绝对不稳定^[6].

格式 II:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (u \geq 0) \quad (3.7)$$

同样可以采用泰洛展开得对应(3.7)的相当微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta x u - \Delta t u^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (3.8)$$

显然,仅当 $0 < u \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ 时,格式才能稳定.

格式 III:

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2] \quad (3.9)$$

在[7]中对(3.9)作过详细的分析.将形如

$$u_j^n = C^n \cos \frac{1}{2} \pi j + S^n \sin \frac{1}{2} \pi j + U^n \cos \pi j + V \quad (3.10)$$

的特解代入方程,得系数满足方程

$$\begin{cases} C^{n+1} - C^{n-1} = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} S^n (U^n - V) \\ S^{n+1} - S^{n-1} = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} C^n (U^n + V) \\ U^{n+1} - U^{n-1} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

经过一定的数学推导可得: 只要 V 充分大, 以致 $|V| > |A|$, $|V| > |B|$, 那末, 在 $\frac{\Delta t}{\Delta x} |u|_{\max} < 1$ 时, 格式稳定, 否则, 当 V 充分小时, 若 A 和 B 同号, 以致 $(A+V)$ 和 $(B-V)$ 也同号, 则不稳定出现. 其中 A, B 是 U^n 在 n 分别为奇数和偶数时的值.

格式 IV:

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (3.12)$$

同样考虑形如(3.10)的特解,代入(3.12),可得其系数满足如下方程:

$$\begin{cases} C^{n+1} - C^{n-1} = -2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V S^n \\ S^{n+1} - S^{n-1} = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V C^n \\ U^{n+1} - U^{n-1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} C^n S^n \end{cases} \quad (3.13)$$

由(3.11)第一式得:

$$C^{n+2} - C^n = -2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V S^{n+1}$$

$$C^n - C^{n-2} = -2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V S^{n-1}$$

上两式相减得

$$C^{n+2} - 2C^n + C^{n-2} = -2 \frac{\Delta t}{\Delta x} V (S^{n+1} - S^{n-1}) \quad (3.14)$$

以(3.13)第二式代入得

$$C^{n+2} - 2C^n + C^{n-2} = -\left(2 \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 V^2 C^n$$

即

$$C^{n+2} - 2\mu C^n + C^{n-2} = 0 \quad (3.15)$$

其中 $\mu = 1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 V^2$, 同理对 S^n 也可得到类似的方程。如果 $|\mu| < 1$, 则 C^n 和 S^n 是有界的, 否则, 如果 $|\mu| > 1$, 则解随 n 指数增长。其稳定性条件是:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |V| < 1 \quad (3.16)$$

格式 V:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (3.17)$$

以形如(3.10)的特解代入, 可得其系数满足方程:

$$\begin{cases} C^{n+1} - C^{n-1} = 2S^n \left(\frac{1}{3} U^n - V\right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ S^{n+1} - S^{n-1} = -2C^n \left(\frac{1}{3} U^n + V\right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ U^{n+1} - U^{n-1} = \frac{2}{3} S^n C^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{cases} \quad (3.18)$$

这是一组非线性代数方程, 难以推导出一个类似于(3.15)的方程, 但是, 不难看到(3.18)有特解:

$$C_j^n = 0 \quad (\text{当 } n \text{ 为奇数时})$$

$$S_j^n = 0 \quad (\text{当 } n \text{ 为偶数时})$$

因此可以考虑(3.18)的一个特殊情形为

$$\begin{cases} C^{n+1} - C^{n-1} = 2S^n \left(\frac{1}{3} U^n - V \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ S^{n+1} - S^{n-1} = -2C^n \left(\frac{1}{3} U^n + V \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ U^{n+1} - U^{n-1} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

这是一组类似于(3.11)的方程,采用与上述类似的办法可得

$$C^{n+2} - 2\mu C^n + C^{n-2} = 0 \quad (3.20)$$

其中 $\mu = 1 - 2 \left(\frac{1}{3} A - V \right) \left(\frac{1}{3} B + V \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2$, 可得其稳定性判据为

$$-1 < \left(\frac{1}{3} A - V \right) \left(\frac{1}{3} B + V \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 0 \quad (3.21)$$

若 A, B 同号, 当 V 充分小时, 格式不稳定, 否则, 当 V 足够大时, 以致 $|V| > \frac{1}{3}|A|, |V| > \frac{1}{3}|B|$, 那末在 $\frac{\Delta t}{\Delta x} |u|_{\max} < 1$ 时满足(3.21), 故格式稳定。

总之, 从上面的分析可以看到, 当取特解(包括初值)(3.10)时, 由于格式 IV 的特殊结构, 使得(3.13)右端非线性项不出现, 于是, 只要 $\frac{\Delta t}{\Delta x} |V| < 1$ 的条件满足, 则格式是计算稳定的。然而在同样的条件下, 格式 III、V 却都会出现非线性计算不稳定, 并且与特解(3.10)中的常数项 V 密切相关。

下面再考虑格式 VI 的稳定性。格式 VI 可写为:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = - \frac{\bar{u}_{j+1} + \bar{u}_j + u_{j-1}}{3} \frac{\bar{u}_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (3.22)$$

我们定义能量范数

$$\|u\|^2 = (u, u) = \sum_j u_j^2 \quad (3.21)$$

以 $\bar{u}_j$ 乘(3.22)两边, 并对所有内点求和得:

$$\frac{1}{2} \sum_j (u^{n+1})^2 - \frac{1}{2} \sum_j (u^n)^2 = \frac{1}{8\Delta x} \sum_j (\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j\bar{u}_j - \bar{u}_j\bar{u}_{j-1}\bar{u}_j + \bar{u}_{j+1}\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}\bar{u}_{j-1}\bar{u}_j)$$

只要边界条件是周期的, 或是取刚壁边条件, 则有

$$\|u^{n+1}\| = \|u^n\| \text{ 或 } \|u^n\| = \text{常数}.$$

这表明格式 VI 能量守恒, 故格式绝对稳定。

同理, 以 $\frac{1}{2} u_j^*$ 乘(3.17)两边, 并对所有内点求和, 同样可证: 如果不计时间差分的误差, 则格式 V 是能量守恒的, 即格式 V 是准稳定的。

四、数值试验的结果

为了进一步看到非线性计算稳定性与格式和初值的关系, 我们作了如下的试验。

试验 1: 取 $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.004, u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x$, 进行计算, 显然有

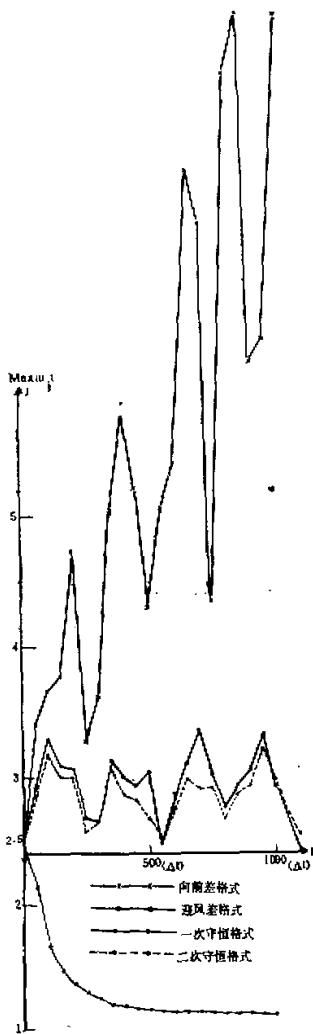


图 1. $u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x$
 $\Delta x = 0.1$ 时 $\max |u_i|$ 的变化曲线

$\left| u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq |u|_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.1 < 1$, 即格式满足条件 (3.1). 图 1 给出格式 I、II、IV、VI 解的最大模数 $\max |u_i|$ 随时间的变化曲线. 从图上清楚地看到, 格式 I 是不稳定的; 格式 II 是计算稳定的, 但解的振幅随时间很快地衰减; 而格式 IV 和 VI 的解的振幅一直在一定范围内振动, 即格式是稳定的.

试验 II: 仍取 $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.004$, 对格式 IV, V, VI 先后采用如下两种初值进行试验:

$$(1) u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x \quad (4.1)$$

$$(2) u(x, 0) = \sin 2\pi x \quad (4.2)$$

图 2、图 3 分别给出上述三种格式在两种初值下的总动能变化曲线, 图 2 对应初值 (4.1), 图 3 对应初值 (4.2), 观察这两张图, 可得如下结论:

(1) 不论取哪种初值, 格式 VI 绝对稳定. 尽管用格式 VI 计算存在混淆误差, 但由于格式的平方守恒性, 并不会造成非线性计算不稳定.

(2) 在初值 (4.1) 下, 格式 IV, V 的总动能一直是有界地变化, 即格式稳定. 在初值 (4.2) 下, 尽管满足线性化判据 (3.1), 但这两个格式在一定计算时间后, 先后都出现了动能指数增长的现象, 即都出现了非线性计算不稳定, 并且格式 V 比格式 IV 更早出现不稳定. 其原因正如前节所指出的, 一是与格式 IV, V 的具体结构有关, 另一个是与初值中的常数项的数值有关.

试验 III: 同试验 II 的作法, 但加密格网, 从而也改变初值分布, 取 $\Delta x = 0.05$, 相应地也缩小时间步长, $\Delta t = 0.002$. 取图 4, 图 5 分别给出三种格式在两种初值下的总能量变化曲线 (注意图 4 中的纵坐标比图 2 缩小了 10 倍), 对比图 4 和图 2, 图 3 和图 5, 可以看到所得结果基本类似, 但是, 加密格网后, 非线性不

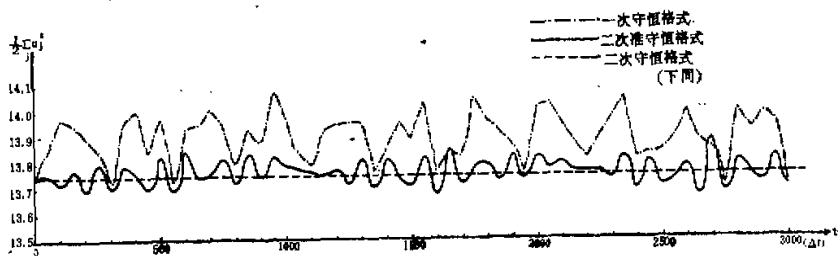


图 2. $u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x$, $\Delta x = 0.1$ 时总动能变化曲线

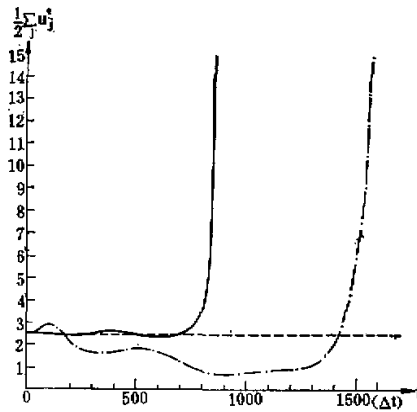


图 3. $u(x, 0) = \sin 2\pi x$ $\Delta x = 0.1$ 时总动能变化曲线说明同图 2.

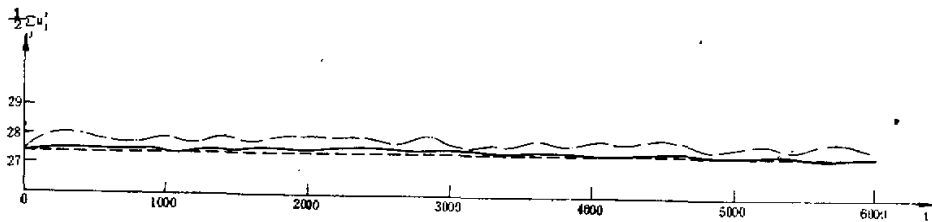


图 4. $u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x$ $\Delta x = 0.05$ 时总动能变化曲线说明同图 2.

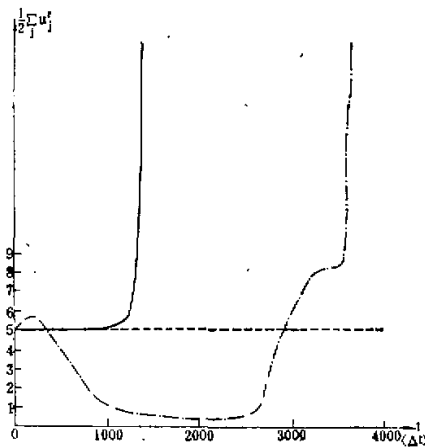


图 5. $u(x, 0) = \sin 2\pi x$ $\Delta x = 0.05$ 时总动能变化曲线说明同图 2.

稳定出现的时间更提前了一些。这说明计算格网的加密使得更易于出现非线性计算不稳定, 其原因还有待于作进一步的分析, 但至少与加密格网后, 改变了初值取样有关。

五、一个全隐式格式非线性计算稳定的充分必要条件

采用与[8]中类似的办法可以证明如下定理。

定理：对非线性方程(2.7)，取全隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\theta}{2} \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2\Delta x} + (1-\theta)\bar{u}_j \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (5.1)$$

其中 $\bar{u}_j = \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}$ ，如果边界条件为周期的，且初值 u_j^0 的分布为

$$\{u_j^0\} = \dots, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, -\varepsilon, \varepsilon, 0, \dots, \varepsilon \neq 0 \quad (5.2)$$

那末，格式(5.1)计算稳定的充分必要条件是 $\theta = \frac{2}{3}$ 。

定理的证明可见[3]，这里不再重复。

还要指出的是，如果在上述定理中用显式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\theta}{2} \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2\Delta x} + (1-\theta)u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (5.3)$$

代替(5.1)，则同样可证 $\theta = \frac{2}{3}$ 是(5.3)稳定的一个必要条件。有趣的是，当 $\theta = \frac{2}{3}$ 时，(5.1)变为(2.18)，(5.3)变为(2.17)。由于(2.18)是动能守恒的，所以它在非线性情况下有严格的稳定性。

六、线性与非线性稳定性的比较

本文以非线性平流方程为模型，列举六种常见的非线性差分格式，分别用“截断粘性法”、“特解代入法”和“能量法”进行了定性的稳定性分析，又用两种不同的初值对其中三种格式进行稳定性的数值试验，把这些定性定量的结果与相应的线性格式的稳定性判据进行比较可分别列表如下：

表 1. 六种格式稳定性判据的比较

格 式	线 性 判 据	非 线 性 判 据
I	绝对不稳定	绝对不稳定
II	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right < 1$ 时稳定	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right < 1$ 时稳定
III	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right < 1$ 时稳定	A、B 同号，当 V 充分小时不稳定 ^(*)
IV	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right < 1$ 时稳定	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right < 1$ 时稳定
V	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right < 1$ 时稳定	A、B 同号，当 V 充分小时不稳定
VI	绝对稳定	绝对稳定

(注) 非线性格式 III、IV、V，的结论是对特解(包括初值)(3.10)而言。

表 2. 格式 IV、V、VI 在两种初值下稳定性比较

格式	线 性 判 据	非 线 性 稳 定 性 状 况	
		$u(x, 0) = 1.5 \sin \pi x$	$u(x, 0) = \sin 2\pi x$
IV	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right < 1$ 时稳定	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right < 1$ 时稳定	不稳定(晚)
V	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right < 1$ 时稳定	$\left u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right < 1$ 时稳定	不稳定(早)
IV	绝对稳定	绝对稳定	绝围稳定

由表 1 清楚地看到,六种格式中有四种格式在线性和非线性情况所得结论是一致的,仅有两种情况不一致,主要依赖于特解(包括初值)(3.10)中的常数项 V 的大小。从表 2 看到初值中的常数项 1.5 对非线性稳定性状况起着重要的影响,在 $u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x$ 时,非线性判据与线性判据是完全一致的,而在 $u(x, 0) = \sin 2\pi x$ 时,非线性与线性的判据不大一致,其异同主要与格式和初值密切相关。

曾庆存、王宗皓同志对本文曾提供宝贵意见,谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] Phillips, N. A., "An example of non-linear computational instability" The atmosphere and the sea in motion, Edited by B. Bolin, Rockefeller Institute, New York, 501—504, 1959.
- [2] 曾庆存, 计算稳定性的若干问题, 大气科学, 2, 181—191, 1978.
- [3] 季仲贞, 非线性计算不稳定性, 大气科学, 4, 111—119, 1980.
- [4] 曾庆存、季仲贞、袁重光, 原始方程差分格式的设计, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 300—313, 1980.
- [5] 季仲贞, 非线性平流格式的构造和应用, 1978(未刊)
- [6] Hirt, C. W., Holistic stability theory for finite difference equation, J. Comput. Phys., 2, 339—355, 1968.
- [7] Richtmyer, R. W., and K. W. Morton, "Difference methods for initial-value problems" Wiley-Interscience, 128—130, 1967.
- [8] Fornberg, B., "On the instability of leap frog and Crank-Nicolson approximations of a non-linear partial differential equation". Mathematics of Computation, 27, 45—57, 1973.

A COMPARATIVE ANALYSIS FOR NON-LINEAR COMPUTATIONAL STABILITY

Chi Zhong-zhen

(*Institute of atmospheric physics, Academia Sinica*)

Abstract

The stability of the non-linear computation is important in numerical weather prediction. In this paper, using a one-dimensional non-linear advection equation as the model, the comparative analysis for stability is carried out qualitatively and quantitatively for several non-linear difference schemes. It is emphasized that non-linear computational stability closely depends on the structure of the scheme and the initial conditions adopted. The nature and mechanism of non-linear computational instability is discussed.

新 刊 预 告

为促进国内外环境科学学术交流,中国科学院环境科学委员会主办的《环境科学学报》(季刊)将于1981年3月创刊,由科学出版社出版。

《环境科学学报》为综合性学术刊物,主要刊登环境科学方面具有创造性和我国特色的基础理论和带基础性研究的学术论文;新技术、新方法及综合性的重大研究成果。

国内读者可向各地邮局订阅,国外读者向国际书店订阅。