第4卷 第4期
1980 年 12 月
大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA
Vol. 4, No. 4
Dec., 1980

一个非线性椭圆型方程用迭代法求解的收敛性探讨

周 振 中

(湖南省计算技术研究所)

一、引 言

能量方程模式,是叶笃正教授提出的. 我们选用该模式的正压方案,试作了亚欧范围的 500mb 形势预报. 在计算过程中,从矩阵不可约、对角占优等性质出发严格论证了求解分析方程(一个非线性椭圆型方程)的点 Jacobi 迭代法、点 Gauss-Seidel 迭代法及超(低)松弛迭代法的收敛性. 并提出了判断一个 $n\times n$ 复矩阵为不可约的充分条件.

二、基本方程和差分格式

§2.1. 基本方程

能量方程的正压方案,可以写成如下形式:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{\eta}J(P,\eta)=0 \tag{2.1}$$

$$\nabla^2P-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\eta\cdot\zeta \tag{2.2}$$

其中,ζ 为相对涡度,$P=\varphi+\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ 为单位质量空气的位能和动能之和. $\eta=f+\zeta$ 为绝对涡度. f 为地转参数. 称(2.1)为预报方程,(2.2)为分析方程,它是非线性椭圆型方程.

§2.2. 差分格式

计算区域是矩形的,用笛卡尔坐标系,使用等步长 d. 对(2.1)采用如下差分格式来逼近:

$$\frac{\zeta_{ij}^{t+1}-\zeta_{ij}^{t-1}}{2\delta t}=-\frac{1}{\eta_{ij}^{t}}J_{ij}^{t}(P,\eta)=B_{ij}^{t} \tag{2.3}$$

其截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$, 式中

$\zeta_{ij}^{t+1}=\zeta[i\Delta x,j\Delta y;(t+1)\delta t]$, 余类推.

J 采用 Arakawa 格式,和通常一样起步分三步走; $\frac{1}{4}\delta t$ 用向前差, $\frac{1}{2}\delta t$ 和 δt 用中

1979 年 1 月 18 日收到修改稿.

央差;以后均用中央差．这里就不再一一赘述．

对(2.2)采用五点差分格式来逼近:

$$\frac{m_{ij}^2}{d^2}(P_{i+1,j}^{\nu}+P_{i,j+1}^{\nu}+P_{i,j-1}^{\nu+1}+P_{i-1,j}^{\nu+1}-4P_{i,j}^{\nu})-\frac{1}{\eta_{ij}}\cdot[(P_{i+1,j}^{\nu}-P_{i-1,j}^{\nu+1})$$

$$\cdot(\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j})+P_{i,j+1}^{\nu}-P_{i,j-1}^{\nu+1})\cdot(\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1})]=\eta_{i,j}\cdot\zeta_{i,j}$$

$$i=1,2,\cdots M;\quad j=1,2,\cdots N$$

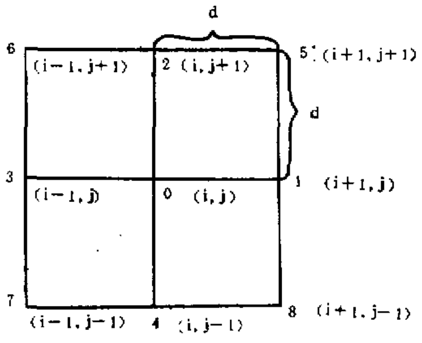

图 1

其中，$P_{i,j}^{\nu+1}$ 代表 $P_{i,j}$ 的第 $\nu+1$ 次迭代值．$P_{i,j}^{\nu}$ 代表 $P_{i,j}$ 的第 ν 次迭代值． 上式经整理后，得:

$$4P_{i,j}^{\nu}-a_{i,j}\cdot P_{i+1,j}^{\nu}-b_{i,j}\cdot P_{i,j+1}^{\nu}-c_{i,j}\cdot P_{i-1,j}^{\nu+1}-d_{i,j}P_{i,j-1}^{\nu+1}$$

$$+\frac{d^2}{m_{i,j}^2}\eta_{i,j}\cdot\zeta_{i,j}=0$$

$$i=1,2,\cdots M;\ j=1,2,\cdots N;\tag{2.4}$$

式中

$$a_{i,j}=1-\frac{\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}}{4\eta_{i,j}};\quad b_{i,j}=1-\frac{\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}}{4\eta_{i,j}};$$

$$c_{i,j}=1+\frac{\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}}{4\eta_{i,j}};\quad d_{i,j}=1+\frac{\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}}{4\eta_{i,j}};$$

注意，这里所有的 η 都是 t 时刻的．为了书字方便，将右上标 t 省略了．下同．

对(2.4)采用迭代法求解:

$$P_{i,j}^{\nu+1}=P_{i,j}^{\nu}-\frac{\alpha}{4}R_{i,j}^{\nu,\nu+1}\tag{2.5}$$

式中

$$R_{i,j}^{\nu,\nu+1}=4P_{i,j}^{\nu}-(a_{i,j}\cdot P_{i+1,j}^{\nu}+b_{i,j}\cdot P_{i,j+1}^{\nu}+c_{i,j}\cdot P_{i-1,j}^{\nu+1}+d_{i,j}P_{i,j-1}^{\nu+1})$$

$$+\frac{d^2}{m_{i,j}^2}\eta_{i,j}\cdot\zeta_{i,j}$$

称为迭代余差，$m_{i,j}$ 为地图投影放大系数，在等角圆锥投影下:

$$m_{i,j}=c_1e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\cdot\ln[(i-i_p)^2+(j-j_p)^2]}\times(1+c_2e^{\sqrt{2}\ln[(i-i_p)^2+(j-j_p)^2]})$$

而

$$c_1=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\left[\frac{a_0(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}\,d}\right]^{\sqrt{2}-1};\quad c_2=\left[\frac{d\sqrt{2}}{a_0(1+\sqrt{3})}\right]^{\sqrt{2}}$$

a_0 为地球半径，i_p、j_p 为北极点坐标。

§ 2.3. 边界条件

假设在计算过程中，计算区域最外两圈上，物理量保持不变．即

$$\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{1,j}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{1,j};\ \begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{2,j}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{2,j};\ \begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{M-1,j}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{M-1,j};$$

$$\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{M,j}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{M,j};\ \begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{i,1}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{i,1};\ \begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{i,2}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{i,2};$$

$$\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{i,N-1}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{i,N-1};\ \begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(t)}_{i,N}=\begin{pmatrix}P\\ \eta\end{pmatrix}^{(0)}_{i,N};$$

其中上标(0)表示初始时刻的量。

三、分析方程用迭代法求解的收敛性证明

将分析方程(2.2)写成差分格式后，对计算区域中的每一个内点，都有一个形如(2.4)的线性代数方程。设计算区域有$M\times N$个内点，那末就有$M\times N$个形如(2.4)的线性代数方程。在计算过程中的每一步(即每一δt)，需解这一线代数方程组：

$$\begin{aligned}&4P_{i,j}-a_{i,j}P_{i+1,j}-b_{i,j}P_{i,j+1}-c_{i,j}P_{i-1,j}-d_{i,j}P_{i,j-1}\\&\quad=-\frac{d^2}{m^2_{i,j}}\eta_{i,j}(\eta_{i,j}-f_{i,j})\\&i=1,2,\cdots M;\ j=1,2,\cdots N;\end{aligned}\tag{3.1}$$

写成矩阵形式，(3.1)变成：

$$AP=g\tag{3.1$'$}$$

其中

$$P=[P_1=P_{1,1},\ P_2=P_{2,1},\cdots\cdots P_M=P_{M,1},\ P_{M+1}=P_{1,2},\cdots\cdots P_{M,N}=P_{M,N}]^T$$

$$g=\left[-\frac{d^2}{m^2_{11}}\eta_{11}\zeta_{11},\ -\frac{d^2}{m^2_{2,1}}\eta_{2,1}\zeta_{2,1},\cdots\cdots-\frac{d^2}{m^2_{M,N}}\eta_{M,N}\cdot\zeta_{M,N}\right]^T$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{M}\qquad\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{M\times(N-1)} & \\
\begin{array}{r} M\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\\ A=\\ M\times(N-1)\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\end{array} &
\begin{bmatrix}
4 & -a_{1,1} & 0 & 0 & & 0 & -b_{1,1} & 0 & & & 0\\
-c_{2,1} & 4 & -a_{2,1} & 0 & & 0 & & -b_{2,1} & 0 & & \\
0 & -c_{3,1} & 4 & -a_{3,1} & 0 & & 0 & & -b_{3,1} & 0 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & 0 & \ddots & -b_{M,1} & 0\\
-d_{1,2} & & -c_{M,1} & 4 & -a_{M,1} & 0 & & & & \ddots & \\
\ddots & & & 0 & -c_{1,2} & 4 & -a_{1,2} & & & & -b_{M,N-1}\\
 & \ddots & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
0 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & -a_{M,N-1} & & & \\
 & & -d_{M,N} & & 0 & -c_{M,N} & 4 & & & &
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}M\times(N-1)\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}M\end{array}
\end{array}$$

$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{g}$ 是二个$M\times N$维向量．A为一个$M\times N$阶矩阵，它只有五条对角线上有数，其它元素均为零．

将矩阵A分解为 $A=D-E-F$

其中 $D=\mathrm{diag}\{a_{1,1},\ a_{2,2},\ \cdots\cdots a_{M,N,M,N}\}=\mathrm{diag}\{4,\ 4,\ \cdots\cdots 4\}$;
是一个主对角线元素为4，其余元素均为零的矩阵． E和F分别为严格下三角形和上三角形矩阵，它们的元素分别为位于A的主对角线下方与上方元素的负值．

因此，可把(2.5)改写成矩阵形式：

$$(D-\alpha E)\boldsymbol{P}^{(\nu+1)}=\{(1-\alpha)D+\alpha F\}\boldsymbol{P}^{(\nu)}+\alpha\boldsymbol{g} \tag{3.2}$$

当 $\alpha=\dfrac{4}{3}$ 时，为逐次超松弛迭代法；

当 $\alpha=1$ 时，即为点高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法．

§3.1. 矩阵不可约定义与判别准则

定义 1：设A是$n\times n$复矩阵，当$n\geqslant 2$时，如果存在$n\times n$置换矩阵* P，使

$$PAP^T=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}$$

其中A_{11}为$r\times r$子矩阵，A_{22}为$(n-r)\times(n-r)$子矩阵，$1\leqslant r<n$，则称$n\times n$复矩阵A为可约；如果不存在这样的置换矩阵，则称A为不可约．

定义1是由 Frobenious 在1912年提出的．Geiringer 在1949年给出了这定义的等价性表示．

Geiringer 定理：令 $A=(a_{i,j})$ 为$n\times n$复矩阵，$n\geqslant 2$，又令$W=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$为前n个正整数的集合，则A为不可约的充要条件是：对于W的任意两个不相交的非空子集S和T；$S\cup T=W$，存在A的一个元素 $a_{i,j}\neq 0$，$i\in S$；$j\in T$．

G氏定理在 Гантмахер 所著矩阵论一书中也作为矩阵不可约的定义给出．

由G氏定理我们可以证明如下两个判断矩阵是否可约的定理．

定理 1：若 $A=(a_{i,j})$ 为$n\times n$复矩阵，则A为不可约的必要条件是：A的任一行和列，其主对角线以外的元素不全为零．

证明：设i为A的任一行或列，若A的第i行除对角线元素$a_{i,i}$外全为零，则令$S=\{i\}$，$T=\{1,2,\cdots\cdots,i-1,i+1,\cdots\cdots n\}$，满足 $S\cup T=W$；$S\cap T=0$，因而将不存在 $a_{i,j}\neq 0$，$i\in S$；$j\in T$．这和G氏定理矛盾．因i为A的任一行或列，故得证．

定理 2 [判别准则]：若 $A=(a_{i,j})$ 为$n\times n$复矩阵，且A为带状矩阵（即A为三对角线或五对角线矩阵）且对角线上的元素都是非零元素，则矩阵A为不可约．

证明：若A为三对角线矩阵，则对任意 i，$a_{i,i-1}\neq 0$；$a_{i,i+1}\neq 0$，这时对集 $W=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$，可找到两个不相交的非空子集S和T：

$$S=\{S_1,S_2,\cdots\cdots S_n\};\quad T=\{T_1,T_2,\cdots\cdots T_n\};$$

S中的元素和T中的元素互不相等．满足 $S\cup T=W$；$S\cap T=0$．这时就恒能找到一

* 置换矩阵为一方阵，它的每一行及每一列，都有某一元素等于1，而其它元素等于零．

个 $a_{i,j} \neq 0$, $i \in S$; $j \in T$.（若不是这样，就不会有 $a_{i,i-1} \neq 0$, $a_{i,i+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots\cdots n$, 这和 A 为三对角线矩阵的假设矛盾.）亦即矩阵 A 满足 G 氏定理的条件，因而为不可约. A 为五对角线矩阵时的证明类同，不再赘述.

应用这一判别准则及对角占优矩阵的定义，立即可以指出矩阵 $A = (a_{i,j})$ 有如下性质:

1. A 为不可约，因它是五对角线矩阵.

2. A 为对角占优矩阵.

因为，若 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} 都大于等于零，即

$$\left.\begin{aligned} &1 - \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}}{4\eta_{i,j}} \geqslant 0;\quad 1 - \frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}}{4\eta_{i,j}} \geqslant 0 \\ &1 + \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}}{4\eta_{i,j}} \geqslant 0;\quad 1 + \frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}}{4\eta_{i,j}} \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2'}$$

则

$$\left|\frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}}{4\eta_{i,j}}\right| \leqslant 1;\quad \left|\frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}}{4\eta_{i,j}}\right| \leqslant 1$$

于是，$\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \sum\limits_{i=1}^{M} |a_{i,j}| \leqslant 4 = |a_{i,i}|$ 是成立的，且其中不等号至少对一个 i 成立（例如 $i = 1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{M} |a_{i,1}| = 2 < 4 = |a_{1,1}|$.）所以 A 是对角占优矩阵，因为不等号不是对所有 i 都成立，因而它不是严格对角占优矩阵.

§ 3.2. 判别迭代收敛的几个预备定理

予备定理 1: 设 $A = (a_{i,j})$ 为任意 $n \times n$ 复矩阵，又令

$$\lambda_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}| \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

则 A 的所有特征值 λ 都属于圆 $|z - a_{i,i}| \leqslant \lambda_i$, $1 \leqslant i \leq n$ 的并集.

证明见[1].

预备定理 2: 令 $A = (a_{i,j})$ 为不可约对角占优 $n \times n$ 复矩阵，则矩阵 A 为非奇.

证明: 由于 A 为不可约对角占优，故圆 $|z - a_{i,i}| \leqslant \lambda_i$ 的并集不包含复平面的原点 $z = 0$.（否则将导致 $|a_{i,i}| \leqslant \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$, 这和对角占优定义矛盾），由预备定理 1，知 $\lambda = 0$ 不是 A 的特征值，这就证明了 A 为非奇，得证.

为下面叙述方便起见，罗列几个一般数值代数中常用的定义:

定义 2: 令 $A = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 复矩阵，若将 A 表为 $A = D - E - F$, 其中 $D = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots a_{nn}\}$, E 和 F 分别为严格下三角形与上三角形 $n \times n$ 复矩阵，它们的元素分别为位于 A 的主对角线下方与上方的元素的负值，则可将线代数方程组的矩阵记法 $A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}$($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{K}$ 为 n 维列向量）改写为

$$D\boldsymbol{X} = (E + F)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K} \tag{3.3}$$

定义 3: 由(3.3)导出的迭代法

$$DX^{(m+1)} = (E+F)X^{(m)} + K \qquad m \geqslant 0$$

亦即

$$X^{(m+1)} = D^{-1}(E+F)X^{(m)} + D^{-1}K \qquad m \geqslant 0 \tag{3.4}$$

称这个迭代法为点 Jacobi 迭代法或点全步迭代法．而称矩阵

$$B = D^{-1}(E+F) \tag{3.5}$$

为相应于矩阵 A 的点 Jacobi 矩阵．

定义 4：由(3.3)导出的迭代法 $(D-E)X^{(m+1)} = FX^{(m)} + K$ 即

$$X^{(m+1)} = (D-E)^{-1}FX^{(m)} + (D-E)^{-1}K \qquad m \geqslant 0 \tag{3.6}$$

称为点 Gauss-Seidel 迭代法或异步迭代法．称矩阵

$$C = (D-E)^{-1}F \tag{3.7}$$

为相应于矩阵 A 的点 Gauss-Seidel 矩阵．

定义 5：由(3.3)导出的迭代法

$$(D-\omega E)X^{(m+1)} = \{(1-\omega)D + \omega F\}X^{(m)} + \omega K \qquad m \geqslant 0 \tag{3.8}$$

其为 $0 \leqslant \omega < 2$，当 $1 \leqslant \omega < 2$ 时称为超松弛迭代法，当 $0 \leqslant \omega < 1$ 时，称为低松弛迭代法．称矩阵

$$L_\omega = (I - \omega D^{-1}E)^{-1} \cdot \{(1-\omega)I + \omega D^{-1}F\} \tag{3.9}$$

为相应于矩阵 A 的点逐次松弛矩阵．其中 I 为单位矩阵．

§ 3.3. 迭代收敛性定理

定理 3：令 $A = (a_{i,j})$ 为不可约对角占优 $n \times n$ 复矩阵．则相应的点 Jacobi 阵和点 Gauss-Seidel 阵都收敛．同时，求解矩阵问题 $AX = K$ 的迭代法(3.4)(即点 Jacobi 迭代法)和迭代法(3.6)(即点 Gauss-Seidel 迭代法)对任意初始近似向量 $X^{(0)}$ 都收敛．

证明：由不可约对角占优的定义及预备定理 2 知，矩阵 A 为非奇；且 A 的对角线元素必不为零．由定义 3 知，联系于 A 的点 Jacobi 阵 $B = (b_{i,j})$ 为

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = j \\ -\dfrac{a_{i,j}}{a_{i,i}} & i \neq j \end{cases}$$

当 A 为不可约对角占优时，对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$ 都有 $\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant 1$；而其中至少有一个 i，使严格不等号成立．这时 $|B|$ 亦为不可约，且

$$\rho(|B|) \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| < 1,$$

所以，当 A 为不可约对角占优时，有 $\rho(|B|) < 1$，我们知道，当 A 和 B 为两个 $n \times n$ 复矩阵，并有 $0 \leqslant |B| \leqslant A$，则 $\rho(B) \leqslant \rho(A)$．因 B 是非负矩阵，故 $0 \leqslant B \leqslant |B|$，所以 $\rho(B) \leqslant \rho(|B|) < 1$．至此就证明了点 Jacobi 迭代法是收敛的．同样可以证明点 Gauss-Seidel 迭代法也是收敛的．

为了证明超(低)松弛迭代法收敛，我们将应用．

定理 4：假设矩阵 A 适合条件

$$a_{i,j}=a_{j,i} \quad 对一切\ i\neq j \tag{3.10}$$

和

$$a_{i,i}>0 \quad 对一切\ i \tag{3.11}$$

如果对任一 $\omega(0\leqslant\omega<2)$ 逐个超或低松弛法收敛，则同时位移法收敛；反之，如同时位移法收敛，则对于一切 $\omega(0\leqslant\omega<2)$，逐个超或低松弛法收敛。

证明见[2]。

当 Δx、Δy 趋向零时(这是差分方程的解逼近微分方程的解的必要条件)这时，仅在这时

$$a_{i,j}\simeq c_{i+1,j};\quad b_{i,j}\simeq d_{i,j+1};\quad 对一切\ i\neq j$$

而

$$a_{ii}=4>0 \quad 对一切\ i$$

因而矩阵 A 将满足条件(3.10)、(3.11)，上面已经证明，点 Jacobi 迭代法(即同时位移法)是收敛的，因而由定理 4，对一切 $\omega(0\leqslant\omega<2)$ 逐个超或低松弛迭代法收敛。

综上所述，$a_{i,j}\geqslant0$，$b_{i,j}\geqslant0$，$c_{i,j}\geqslant0$，$d_{i,j}\geqslant0$ 是保证点 Jacobi 迭代 (3.4)、点 Gauss-Seidel 迭代(3.6)、超松弛迭代(3.8)(或低松弛迭代)收敛的充分条件。实例计算完全

表 1　求解(2.4)时，条件(3.2)成立，迭代是收敛的(只试验了超松弛迭代的情形)

时间 \ 迭代次数 误差 ε^*	$\nu=2$	$\nu=5$	$\nu=8$	$\nu=10$
$T=\frac{1}{4}\delta t$	0.01441075	0.005441373	0.0036986411	—
$T=\frac{1}{2}\delta t$	0.002678306	0.002197843	—	0.0018217572
$T=3\,\delta t$	—	0.0060319206	0.0041944658	—
$T=4\,\delta t$	0.0087028965	0.006572003	0.0059488411	0.0056712511

表 2　求解(2.4)时，条件(3.2)′在个别点不成立，迭代还是收敛的

迭代种类 \ 迭代次数 误差 ε^*	$\nu=2$	$\nu=5$	$\nu=8$	$\nu=10$
点 Gauss-Seidel 迭代	0.035769945	0.019277713	0.015047155	0.013917963
点 Jacobi 迭代	0.04220065	0.027889851	0.023226533	0.021750889
超松弛迭代 $\alpha=1.3\dot{3}$	0.064207695	0.033008225	0.024920854	0.022411753
低松弛迭代 $\alpha=0.8$	0.028886211	0.015706298	0.012203069	0.011200603

注：1. ν 为迭代次数。

2. $\varepsilon^*=\sum_{i,j}|\alpha R_{i,j}^{\nu,\nu+1}|/(M-2)(N-2)$；$(M-2)\times(N-2)$为总内点数。

3. 上述数据是在 X—2 通用电子数字计算机上获得的。

证明了这点．见表1．

但这个条件在实例计算中不一定成立．这也不要紧，因(3.2)不是必要条件，所以即使条件(3.2)在个别点不满足，迭代也是收敛的．见表2．

本文承叶笃正教授的热情指导和帮助，王宗皓同志详细审阅了全文，并提出了宝贵意见，在此一并表示谢忱．

参 考 文 献

[1] Varga, R. S. Matrix iterative analytic, prentice-Hall Inc. 1962 (有中译本).
[2] Forsythe, G. E. Wasow, W. R. Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley & Sons, Inc 1960 (有中译本).
[3] 叶笃正、刘克武等，数值天气预报能量方程预报模式，科学通报，1975年第9期.
[4] Ф. Р. Гантмахер，矩阵论，柯召译，高等教育出版社.

ON THE CONVERGENCE FOR SOLVING A NONLINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH ITERATIVE METHOD

Zhou Zheng-zhong

(*Computational technical institute of Hunan Province*)

Abstract

The model of energy equation was proposed by professor T. C. Yeh[3]. In this paper, the numerical solution of the energy model is given. Based on the matrix indivisibility and diagonal superiority, the convergence of Jacobi point iterative method, Gauss-Seidel iterative method and the super (lower) relaxation iterative method is strictly proved, and the sufficient condition for determing iterative convergence of the $n \times n$ complex-matrix is also given.