第5卷 第1期　　大 气 科 学　　Vol. 5, No. 1
1981 年 3 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　March, 1981

论陆面蒸发的计算

傅 抱 璞
(南京大学气象系)

提　　要

本文从蒸发 E 随降水的改变率 $\frac{\partial E}{\partial r}$ 是剩余蒸发力 E_0-E 和降水 r 的函数，即 $\frac{\partial E}{\partial r}=f(E_0-E, r)$，而蒸发随蒸发力的改变率 $\frac{\partial E}{\partial E_0}$ 是剩余水量 $r-E$ 和蒸发力 E_0 的函数，即 $\frac{\partial E}{\partial E_0}=\varphi(r-E, E_0)$ 的考虑出发，利用量纲分析和微分方程理论确定了函数 f 和 φ 的表述式，并由此得到根据蒸发力和降水计算陆面蒸发的公式．计算结果非常令人满意．

一、引　　言

对于大面积长年平均的蒸发量的气候学计算方法，一般常用的是水量平衡法和水热法．

水量平衡法是以物质不灭定律为基础，对于计算一个流域范围内的长年平均蒸发量来说，是比较可靠的．但这个方法有以下缺点：一是在一定流域范围内一般都有不同程度的水面存在，用水量平衡法所算出的蒸发量是陆面和部份水面的总的平均蒸发量，它不能把陆面蒸发和水面蒸发严格分开；二是水量平衡法所算出的是全流域的平均蒸发量，但实际上在流域范围内的各个地区，由于辐射和降水等条件不同，其蒸发量与全流域的平均蒸发量是有差异的；三是这个方法只能计算长年的年平均蒸发量．

水热法是综合水量和热量计算蒸发的一种方法．从发生学的观点来看，决定陆面蒸发的主要因素是水分的供应条件或蒸发面的湿润程度和在水分充分供应条件下的最大可能蒸发能力(即蒸发力)，而降水量是反映陆面水分供应条件或湿润程度的一个指标，辐射差额是代表可能供应蒸发的潜在热能，可以近似地反映蒸发力的大小．最早考虑用降水和蒸发力来估计大范围地区多年平均蒸发量的是斯拉伯 (P. Schreiber)[1] 和奥里杰科普 (Э. М. Ольдекоп)[2]．以后布德科 (М. И. Будько)[3] 将他们二人所得到的著名的经验公式加以几何平均，并用年辐射差额可能蒸发的水量代替蒸发力．

以上各人公式的缺点是完全没有考虑下垫面特性或自然景观对蒸发的影响，因此在个别情况下可能产生严重误差．为了弥补上述缺陷，巴格诺夫 (Н. А. Багров)[4] 曾引入

1979 年 1 月 29 日收到修改稿．

了一个表征下垫面特性的参数 n，并假定蒸发随降水的改变率 $\frac{dE}{dr}$ 与蒸发力 E_0 具有下列关系：

$$\frac{dE}{dr}=1-\left(\frac{E}{E_0}\right)^n.$$

然后在某些特定的 n 值下对上式积分，得到一些不同形式的表示式. 以后美真采夫（B. C.Мезенцев）[5] 又将巴格诺夫的基本假定形式修改为

$$\frac{dE}{dr}=\left[1-\left(\frac{E}{E_0}\right)^n\right]^m,$$

并假定

$$m=\frac{n+1}{n}.$$

将上式积分后求得

$$\frac{E}{E_0}=\frac{r}{E_0}\bigg/\left[1+\left(\frac{E}{E_0}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}.$$

刘振兴[6]也将巴格诺夫的基本形式修改为

$$\frac{dE}{dr}=\left(1-\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

求出了积分结果.

但是，以上这些对 $\frac{dE}{dr}$ 的表述式都是假定形式，并没有足够的论证. 下面我们将从比较健全的物理考虑和数学处理来研究这个问题.

二、公 式 推 导

在一定地区和一定蒸发力条件下，陆面上平均蒸发量 E 随降水 r 的增加率 $\frac{\partial E}{\partial r}$ 是随着剩余蒸发力 E_0-E 增加而增大的，而 r 愈大，则 $\frac{\partial E}{\partial r}$ 愈小. 同样，在一定水分供应或一定降水量条件下，蒸发随蒸发力 E_0 的增加率 $\frac{\partial E}{\partial E_0}$ 是随着剩余水量 $r-E$ 增加而增大的，而 E_0 愈大，则 $\frac{\partial E}{\partial E_0}$ 愈小. 因此，$\frac{\partial E}{\partial r}$ 是 E_0-E 和 r 的函数，而 $\frac{\partial E}{\partial E_0}$ 是 $r-E$ 和 E_0 的函数，即

$$\frac{\partial E}{\partial r}=f(E_0-E,\ r),\tag{1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial E_0}=\varphi(r-E,\ E_0).\tag{2}$$

其中 f 和 φ 均为待定函数.

根据量分析的 π 定理，在（1）式右端两个主定的特性量中，只有一个是量纲独立的，

如取 r 为量纲独立的量，则有

$$\pi = \frac{\partial E}{\partial r}, \qquad \pi_1 = \frac{E_0 - E}{r}.$$

故

$$\pi = f_1(\pi_1),$$

即

$$\frac{\partial E}{\partial r} = f_1\left(\frac{E_0 - E}{r}\right). \tag{3}$$

同样，由 (2) 式可得

$$\frac{\partial E}{\partial E_0} = \varphi_1\left(\frac{r - E}{E_0}\right). \tag{4}$$

这里 f_1, φ_1 仍是需要满足一定边界条件的待定函数.

为方便起见，令

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{E_0 - E}{r}, \\ y &= \frac{r - E}{E_0}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

将方程 (3)、(4) 写为

$$\frac{\partial E}{\partial r} = f_1(x), \tag{3a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial E_0} = \varphi_1(y). \tag{4a}$$

考虑到当剩余蒸发力 $E_0 - E = 0$ 时，因蒸发潜力已尽，降水再多也不会使实际蒸发增加. 同样，当剩余水量 $r - E = 0$ 时，因无水分供应，蒸发力再大，实际蒸发也不可能增加. 所以函数 $f_1(x)$ 和 $\varphi_1(y)$ 必须满足以下边界条件:

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } x = 0 \text{ 时}, \ \frac{\partial E}{\partial r} = f_1(x) = 0; \\ &\text{当 } y = 0 \text{ 时}, \ \frac{\partial E}{\partial E_0} = \varphi_1(y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

根据微分方程的理论，方程 (3a) 和 (4a) 有公解的必要和充分条件是

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial E_0} + \frac{\partial f_1(x)}{\partial E} \cdot \varphi_1(y) = \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial E} \cdot f_1(x). \tag{7}$$

由 (3a)、(4a) 和 (5) 我们求得

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial E_0} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial E_0} = \frac{1}{r}[1 - \varphi_1(y)]f_1'(x),$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial E} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial E} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\varphi_1(y)} - 1\right]f_1'(x),$$

$$\frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{E_0}[1 - f_1(x)]\varphi'(y),$$

$$\frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial E}=\frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial E}=\frac{1}{E_0}\left[\frac{1}{f_1(x)}-1\right]\varphi'(y),$$

以此代入(7)中,得到

$$[1-\varphi_1(y)]f_1'(x)=\frac{r}{E_0}[1-f_1(x)]\varphi'(y). \tag{8}$$

因为

$$\frac{r}{E_0}=\frac{(E_0+r-E)/E_0}{(E_0+r-E)/r}=\left(1+\frac{r-E}{E_0}\right)\Big/\left(1+\frac{E-E_0}{r}\right)=\frac{1+y}{1+x},$$

我们可以将(8)式写为

$$\frac{(1+x)f_1'(x)}{1-f_1(x)}=\frac{(1+y)\varphi'(y)}{1-\varphi_1(y)}.$$

上式左边仅为 x 的函数,右边仅为 y 的函数,要这个等式在任何 x, y 下恒能成立,必须其左右两端都等于某一常数 n, 即

$$\frac{(1+x)f_1'(x)}{1-f_1(x)}=n, \tag{9}$$

$$\frac{(1+y)\varphi_1'(y)}{1-\varphi_1(y)}=n. \tag{10}$$

根据边界条件(6)将(9)和(10)积分,得到

$$f_1(x)=1-(1+x)^{-n}=1-\left(\frac{r}{E_0+r-E}\right)^n, \tag{11}$$

$$\varphi_1(y)=1-(1+y)^{-n}=1-\left(\frac{E_0}{E_0+r-E}\right)^n. \tag{12}$$

将(11)和(12)分别代入(3a)和(4a),得到

$$\frac{\partial E}{\partial r}=1-\left(\frac{r}{E_0+r-E}\right)^n, \tag{13}$$

$$\frac{\partial E}{\partial E_0}=1-\left(\frac{E_0}{E_0+r-E}\right)^n. \tag{14}$$

因为 $f_1(x)$ 和 $\varphi_1(y)$ 是根据条件(7)推出的,所以方程(13)和(14)恒能满足它们有公解的必要和充分条件. 在这个条件下求方程(13)和(14)的公解可先将方程(13)中的 E_0 看作参数,于是该式变为常微分方程

$$\frac{dE}{dr}=1-\left(\frac{r}{E_0+r-E}\right)^n. \tag{15}$$

作新变量

$$u=\frac{E_0+r-E}{r} \tag{16}$$

可将方程(15)化为

$$\frac{d(u^{n+1}-1)}{u^{n+1}-1}=-(n+1)\frac{dr}{r}. \tag{17}$$

因 $E\leqslant E_0$, $u\geqslant 1$. 因此,将(17)式积分便得到

$$u=\frac{1}{r}\left(k+r^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{18}$$

其中 k 为积分常数，但可能是 E_0 的函数.

将 (16) 代入 (18)，得到

$$E=E_0+r-\left(k+r^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{19}$$

将 (19) 对 E_0 求偏导数，有

$$\frac{\partial E}{\partial E_0}=1-\frac{1}{n+1}\left(k+r^{n+1}\right)^{\frac{-n}{n+1}}\frac{\partial k}{\partial E_0}$$

以此代入 (14)，并考虑到 (19)，即得到

$$\frac{\partial k}{\partial E_0}=(1+n)E_0^n$$

由此解得

$$k=E_0^{n+1}+C.$$

这里 C 为积分常数.

将 k 代入 (19)，得到

$$E=E_0+r-\left(E_0^{n+1}+r^{n+1}+C\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{20}$$

根据边界条件当 $r=0$ 时，$E=0$，我们可以确定 (20) 式中的常数 $C=0$. 如果令 $m=1+n$，便得到

$$E=r\left\{1+\frac{E_0}{r}-\left[1+\left(\frac{E_0}{r}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}\right\}$$

$$=E_0\left\{1+\frac{r}{E_0}-\left[1+\left(\frac{r}{E_0}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}\right\}. \tag{21}$$

上式中的蒸发力 E_0 可以用以下布德科[7]公式计算：

$$E_0=\rho D(q_s-q). \tag{22}$$

式中 ρ 为空气密度；D 为宏观扩散系数；q 为空气比湿；q_s 为在蒸发面温度下的饱和比湿.

或者更简单地按照布德科的建议用根据气温计算的辐射差额 R_s 来近似地计算 E_0，即

$$E_0\approx\frac{R_s}{L}=\frac{1}{L}\left[Q(1-a_s)+G-\beta\sigma T^4\right]. \tag{23}$$

式中 Q 为总辐射；G 为大气逆辐射；a_s 为在下垫面充分湿润情况下的反射率；T 为相应的气温，其值可以认为近似地等于实际气温；β 为下垫面的相对辐射能力；σ 为史梯芬常数.

为计算方便起见，我们且采用 $\frac{R_s}{L}$ 表示 E_0，将公式 (21) 写为

$$\frac{LE}{R_s}=\left\{1+\frac{Lr}{R_s}-\left[1+\left(\frac{Lr}{R_s}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}\right\}. \tag{24}$$

并将在各种 m 值下 $\frac{LE}{R_a}$ 与 $\frac{Lr}{R_a}$ 的依赖关系作成图 1. 在实际计算时可先根据所选用的 m 值查出与 $\frac{Lr}{R_a}$ 相对应的 $\frac{LE}{R_a}$ 值，然后再将此值乘以 $\frac{R_a}{L}$，即得到所要计算的蒸发量 E_0. 反之，如果已知实际蒸发量 E，也可根据 $\frac{LE}{R_a}$ 和 $\frac{LE}{R_a}$ 利用图 1 来确定公式 (24) 中的参数 m 值.

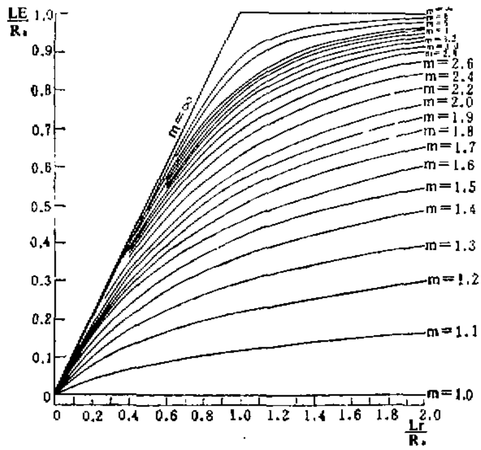

图 1 根据 $\frac{Lr}{R_a}$ 计算 $\frac{LE}{R_a}$ 的图解

三、公式的讨论和计算结果

在气候湿润的情况下，因 $\frac{E_0}{r} \ll 1$，公式 (21) 可以近似地写为

$$E \approx r\left\{1+\frac{E_0}{r}-\left[1+\frac{1}{m}\left(\frac{E_0}{r}\right)^m\right]\right\},$$

即

$$E \approx r\left[\frac{E_0}{r}-\frac{1}{m}\left(\frac{E_0}{r}\right)^m\right]. \tag{25}$$

因此，在极端湿润的气候下，$E \approx E_0$，即实际蒸发就近似地等于蒸发力.

在气候干燥的情况下，因 $\frac{r}{E_0} \ll 1$，我们可以将公式 (21) 近似地写为

$$E \approx E_0\left\{1+\frac{r}{E_0}-\left[1+\frac{1}{m}\left(\frac{r}{E_0}\right)^m\right]\right\},$$

即

$$E \approx E_0\left[\frac{r}{E_0}-\frac{1}{m}\left(\frac{r}{E_0}\right)^m\right]. \tag{26}$$

因此，在极端干燥气候条件下，$E \approx r$，即实际蒸发量就近似地等于该地区的降水量．

如果在公式（25）中令 $m=2$，便得到在湿润气候下与斯拉伯公式相同的近似式

$$E \approx r\left[\frac{E_0}{r}-\frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{r}\right)^2\right].$$

如果在公式（26）中令 $m=3$，便得到在干燥气候条件下与奥里杰科普公式相同的近似式

$$E \approx E_0\left[\frac{r}{E_0}-\frac{1}{3}\left(\frac{r}{E_0}\right)^3\right].$$

此外，由公式（21）和（24）可以看出：在蒸发力 E_0 或辐射差额 R_0 和降水 r 一定的条件下，m 愈大，蒸发 E 也愈大．当 $m=1$ 时，$E=0$，即全部降水很快地变为地面迳流跑掉，来不及蒸发．当 $m\to\infty$ 时，若 $\frac{E_0}{r}>1$，则 $E=r$，即若蒸发力大于降水，则蒸发量将等于降水量；若 $\frac{E_0}{r}<1$，则 $E=E_0$，即若降水大于蒸发力，则蒸发将等于蒸发力．因此，在下垫面透水性差、植被少、地形坡度大，因而地面迳流强的地区，m 值小．反之，在下垫面透水性好、植被多、地形平坦，因而地面迳流小的地区，m 值大．

为了检验各种公式计算蒸发量的精度，需要有可靠的实际观测资料．在目前，由于观测仪器还没有很好解决，这种实际观测资料是很难得到的．但对于计算一个流域范围内的长年平均蒸发量来说，水量平衡法毕竟还是公认比较可靠的一种方法．如果把按水量平衡法计算的长年平均蒸发量作为近似的实际蒸发量，则将各种公式所计算的长年平均蒸发量与水量平衡法所得出的长年平均蒸发量相比较，如果某一公式计算的结果与水量平衡法的结果最接近，则可以认为该公式所计算的流域的长年平均蒸发量与实际情况最符合，因而可以推断它在计算各别地方的蒸发量时也是比较最可靠的．

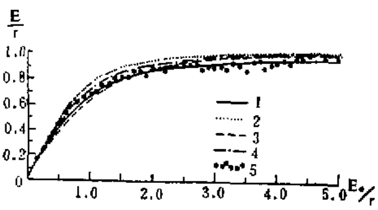

图 2　根据不同公式所算出的 $\frac{E}{r}$ 与 $\frac{E_0}{r}$ 的依赖关系（世界各地）

1 —根据公式（21）（取 $m=2.4$）；
2 —根据斯拉伯公式；
3 —根据奥里杰科普公式；
4 —根据布德科公式；
5 —根据水量平衡法（用的是布德科在文献［7］中所发表的资料）

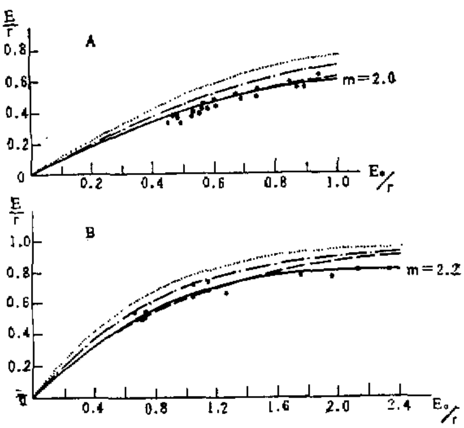

图 3　根据不同公式计算出的 $\frac{E}{r}$ 与 $\frac{E_0}{r}$ 的依赖关系（A：广西省；B：云南北部．说明与图 2 同）

图2是用几个不同公式所计算的世界各地的长年平均蒸发量与用水量平衡法所得结果的比较,图3是对我国广西省及云南南部相应计算结果的比较.图中纵坐标是无量纲量$\frac{E}{r}$,横坐标是无量纲量$\frac{E_0}{r}$. 从这两个图上可以看出,用公式(21)所计算的蒸发量(曲线1)基本上是通过用水量平衡法所得到的蒸发量的散布点(大黑圆点)中心,而斯拉伯公式计算的结果(曲线2)一般都比水量平衡法偏高很多;奥里杰科普公式计算的结果(曲线3)在$\frac{E_0}{r}$小时(即在湿润的气候条件下)一般比水量平衡法稍为偏低,在$\frac{E_0}{r}$大时(即在干燥的气候条件下)则比水量平衡法明显地偏高(但比斯拉伯公式偏离小),但对广西省计算的结果与公式(21)非常一致;布德科公式计算的结果介乎斯拉伯公式与奥里杰科普公式之间,这是因为它是取后二者的几何平均值而得来的必然结果.

以上对国内外计算结果表明,用本文所推导的公式(21)计算陆面蒸发量是精度最高、比较最符合实际情况的,而斯拉伯公式误差最大,奥里杰科普公式的计算误差一般比斯拉伯公式小,布德科公式在潮湿气候条件下可能比斯拉伯公式更好,但在干燥气候条下,可能比奥里杰科普公式还差,而比斯拉伯公式稍好.

参 考 文 献

[1] Schreiber, P. Ueber die Bezienungen Zwischer Niederschiag und der Wasserführung der Flüsse in Mittelenropa, Met. Zeit. B. 21(39), 1904.
[2] Ольдекоп, Э. М., ОБ испарении с поверхности бассейнов, труды юрьевской обсерватории, 1911.
[3] Будыко, М. И., Испарение в естественных условиях, гидрометеоиздат, Л. 1948.
[4] Багров, Н. А., О расчете испарения с поверхности суши, Метеор. и гидрол., № 2, 1954.
[5] Мезенцев, В. С., Еще раз о расчете среднего суммарного испарения, метеор. и гидр. №2, 1954.
[6] 刘振兴, 论陆面蒸发量的计算, 气象学报, 27卷4期, 1956.
[7] Будыко, М. И. Зубенок, Л. И., Опредение испарения с поверхности суши, ИЗВ. АН ССР серия геогр. № 6, 1961.

ON THE CALCULATION OF THE EVAPORATION FROM LAND SURFACE

Fuh Baw-puh

(Department of Meteorology, Nanking University)

Abstract

If E is the evaporation from land surface, E_0 the evaporative power, r the pricipitation and $(E_0 - E)$ indicates the residual evaporative power and $(r - E)$ the residual water, we may consider that $\partial E/\partial r$ is some function of $(E_0 - E)$ and r, and $\partial E/\partial E_0$ some function of $(r - E)$ and E_0, i. e., $\partial E/\partial r = f\ (E_0 - E,\ r)$, $\partial E/\partial E_0 = \varphi(r - E,\ E_0)$.

By applying dimentional analysis and the theory of differential equation we have shown that the forms of f and φ are Eqs. (11) and (12), and there of derived formula (21) by means of wich the evaporation E can be calculated from E_0 and r.

The relations between E/r and E_0/r for various countries computed by formula (21) (curve 1) and by water-balance method (curve 5) as well as other formulas (curves 2—4) are shown in figures 2 and 3. It is clear that formula (21) gives the best satisfactory results.