

正压初始方程的交替格式数值解法

张济朋 张季生

(中国科学院计算技术研究所)

王宗皓

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文用线性理论分析和实例计算验证计算波移速偏慢问题,提出使用 L-C-L 格式交替使用方案,以改进预报系统移速偏慢。文中还应用偏微分方程的特征流型理论,分析边界条件的适当提法,小范围矩形区域预报实例表明,对边界值作特征锥处理,对边界误差向内部传播有一定程度的抑制作用。

一、引 言

正压初始方程目前还未能天气预报中得到广泛应用,还处在寻求数值解法阶段*。在文章[3]中曾用时间空间中心差分格式和固定边界条件作24小时的实例预报,预报效果尚能令人满意。但是,由于时间空间中心差分格式有“寄生波”产生,波长为 $4h$ (h 空间异长时,可能出现线性不稳定情况,同时受固定边界条件误差影响也较大,作48小时的预报尚有困难。

为了延长预报时间,我们采用了模拟积分形式的质量守恒、动量守恒的时间空间中心差分格式与二维 Lax 格式交替计算(以后简记为 L-C-L)。同时由初始方程的特征流型导出特征型偏微分方程,从而给出比较恰当的边界条件提法和边界值的计算方案。目的在于滤去时间空间中心差分格式的“寄生波”,克服其线性不稳定性;减轻二维 Lax 格式的平滑作用和减小边界误差的影响;改进计算波移速。48小时及72小时的实例预报表明,上述 L-C-L 方案对于数值求解正压初始方程是可以应用的。

二、正压初始方程及其差分模拟

(1) 正压初始方程

假设大气是处于静力平衡状态下的不可压缩、均质理想流体;上界为自由表面,下界为没有山脉起伏的水平底面。为保持动力学上的相容性,假设水平风速与高度无关。在下界底面上任一闭区域 Q ,其边界为 ∂Q ;由质量守恒得:

1978年8月26日收到,1979年7月9日收到修改稿。

* 本文的全部试算工作是在1965年夏季完成的,曾在1965年全国计算数学会议上报告过,此文是修改稿。

$$\left\{ \int_0^H \left(\iint_Q \rho d\Omega \right) dh \right\}_{t_0}^T = - \int_{t_0}^T \left\{ \int_0^H \left(\oint_{\partial Q} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds \right) dh \right\} dt, \quad (2.1)$$

由动量守恒得:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^H \left(\iint_Q \rho \mathbf{V} d\Omega \right) dh \right\}_{t_0}^T &= - \int_{t_0}^T \left\{ \int_0^H \left[\oint_{\partial Q} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds \right] dh \right\} dt \\ &\quad - \int_{t_0}^T \left\{ \int_0^H \left(\oint_{\partial Q} h g \rho \mathbf{n} ds \right) dh \right\} dt + \int_{t_0}^T \left\{ \int_0^H \left[\iint_Q \rho (-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) d\Omega \right] dh \right\} dt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

式中 ρ 为大气密度, $\mathbf{V}$ 为风速, H 为自由表面高度; $\boldsymbol{\omega}$ 为地球自转角速度, g 为重力加速度, $\mathbf{n}$ 为边界 ∂Q 的外向法线单位矢量.

由于假定 $\mathbf{V}$ 与高度无关和不可压缩性, 对 h 积分 (2.1) 式可得连续方程

$$\left[\iint_Q H d\Omega \right]_{t_0}^T = - \int_{t_0}^T \left[\oint_{\partial Q} H \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds \right] dt. \quad (2.3)$$

同理, 由 (2.2) 式可得运动方程

$$\begin{aligned} \left[\iint_Q H \mathbf{V} d\Omega \right]_{t_0}^T &= - \int_{t_0}^T \left[\oint_{\partial Q} H \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds \right] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^T \left[\oint_{\partial Q} \frac{H^2}{2} g \mathbf{n} ds \right] dt + \int_{t_0}^T \left[\iint_Q H (-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) d\Omega \right] dt, \end{aligned} \quad (2.4)$$

在尤拉坐标系中, 考虑柱体 $Q[(x, y) \in \Omega, t_0 \leq t \leq T]$, 其侧面为 ∂Q , 则由 (2.3) 式得积分守恒的连续方程

$$\iint_{\partial Q} \phi dx dy + (\phi u) dt dy + (\phi v) dt dx = 0, \quad (2.5)$$

由 (2.4) 式得积分守恒的运动方程

$$\begin{aligned} \iint_{\partial Q} \phi u dx dy + \left(u^2 \phi + \frac{1}{2} \phi^2 \right) dt dy + uv \phi dt dx - \iint_Q f \phi v dt dx dy &= 0 \\ \iint_{\partial Q} \phi v dx dy + (uv \phi) dt dy + \left(v^2 \phi + \frac{1}{2} \phi^2 \right) dt dx + \iint_Q f \phi u dt dx dy &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中 $f = 2\omega \sin \varphi$, φ 为纬度. 记 (2.5) 和 (2.6) 式为向量形式:

$$\iint_{\partial Q} \Phi dx dy + F dt dy + G dt dx + \iint_Q M dt dx dy = 0, \quad (2.7)$$

式中 $\phi = Hg$, 向量

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \phi \\ \phi u \\ \phi v \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \phi u \\ u^2 \phi + \frac{1}{2} \phi^2 \\ uv \phi \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \phi v \\ uv \phi \\ v^2 \phi + \frac{1}{2} \phi^2 \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} 0 \\ -f \phi v \\ f \phi u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

当讨论方程组 (2.7) 的连续解时, 则可得微分形式的连续方程

和运动方程

$$U_t + AU_x + BU_y + CU = 0, \quad (2.8)$$

式中

$$U = \begin{pmatrix} \phi \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & \phi & 0 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & \phi \\ 0 & v & 0 \\ 1 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix}.$$

同时还可以由(2.8)式推出能量方程, 事实上对方程组(2.8)式的左侧乘以向量

$$\left(\frac{1}{2}(u^2 + v^2), u\phi, v\phi \right)$$

得

$$\left\{ \phi \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}\phi \right] \right\}_t + \left\{ u\phi \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \phi \right] \right\}_x + \left\{ v\phi \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \phi \right] \right\}_y = 0 \quad (2.9)$$

对方程组(2.8)的广义解而言, 能量(2.9)式不成立. 然而, 目前在数值预报中只考虑光滑解, 这时(2.9)式成立.

对区域 Q 积分(2.9)式得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_Q \phi \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}\phi \right] dx dy = - \oint_{\partial Q} \mathbf{V} \phi \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \phi \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

此式表明区域 Q 内的总能量随时间变化等于边界上能量流进流出之和. 若在边界上令 $\mathbf{V} = 0$, 即无流进流出时, 则有:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_Q \phi \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}\phi \right] dQ = 0$$

$$\iint_Q \phi \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}\phi \right] dQ = \text{常数} \quad (2.11)$$

也就是说, 区域 Q 中的总能量为常量.

(2) 差分模拟

数值求解正压初始方程所用的差分方程应当能够近似地满足质量守恒、动量守恒和能量守恒等基本物理学定律. 为此设积分区域为

$$Q: (i-1)\Delta x \leq x \leq (i+1)\Delta x, \quad (j-1)\Delta y \leq y \leq (j+1)\Delta y,$$

$$(n-1)\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t$$

沿 ∂Q 近似积分方程组(2.7)式得

$$[\Phi_{ij}^{n+1} - \Phi_{ij}^{n-1}]\Delta x \Delta y + [F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n]\Delta t \Delta y + [G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n]\Delta t \Delta x + 2M_{ij}^n \Delta t \Delta x \Delta y = 0, \quad (2.12)$$

同理取积分区域为

$$Q_1: (i-1)\Delta x \leq x \leq (i+1)\Delta x, \quad (j-1)\Delta y \leq y \leq (j+1)\Delta y \\ n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t$$

则沿 ∂Q_1 近似积分方程组 (2.7) 式, 又可以得

$$2[\Phi_{ij}^{n+1} - \Phi_{ij}^n]\Delta x\Delta y + [F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n]\Delta t\Delta y \\ + [G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n]\Delta t\Delta x + 2M_{ij}^n\Delta t\Delta x\Delta y = 0, \quad (2.13)$$

当取正方形格网, $\Delta x = \Delta y = h$, 由 (2.12), (2.13) 式分别得时间空间中心差分方程组和二维 Lax 差分方程组如下:

$$\frac{1}{2\Delta t} [\Phi_{ij}^{n+1} - \Phi_{ij}^{n-1}] + F_x^n + F_y^n + M_{ij}^n = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{\Delta t} [\Phi_{ij}^{n+1} - \Phi_{ij}^n] + F_x^n + G_y^n + M_{ij}^n = 0, \quad (2.15)$$

式中引用记号

$$\Phi_{ij}^n = \frac{1}{4} [\Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n],$$

$$F_x^n = \frac{1}{2h} [F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n], \quad G_y^n = \frac{1}{2h} [G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n].$$

记差分方程组 (2.14) 为 “C”, (2.15) 为 “L”. 在实际计算中, 我们交替使用上述两种格式, 即第一步用格式 L, 以后交替使用格式 C 和 L 计算, 记为 “L. C—L”. 同时为了使边界内第二圈的计算和内点的计算相互协调起见, 在第二圈上采用 L 计算. 下面讨论格式 L、格式 C 和格式 L. C—L 的稳定性和计算波移动速度的比较.

1. 稳定性

由 (2.14) 式求出其差分方程的第一变分方程, 并略去含 Δt 项后, 得^[5]

$$V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^{n-1} - 2\Delta t [AV_x^n + BV_y^n] \quad (2.16)$$

其中 A, B 同 (2.8) 式, 但此处

$$V = \begin{pmatrix} \phi' \\ u' \\ v' \end{pmatrix}$$

表示 V 的扰动向量. 令解 $V_{ij}^n = \bar{\rho}(n\Delta t)e^{i(k_1 ih + k_2 jh)}$, 此处

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_1 \\ \bar{\rho}_2 \\ \bar{\rho}_3 \end{pmatrix}$$

为振幅, $K_i = 2\pi/L_i$, ($i = 1, 2$), L_i 为波长. 并代入 (2.16) 式, 求出放大矩阵的特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -ir\bar{W} + \sqrt{1 - r^2\bar{W}^2}, & \lambda'_1 = -ir\bar{W} - \sqrt{1 - r^2\bar{W}^2}, \\ \lambda_2 = -ir(\bar{W} + p) + \sqrt{1 - r^2(\bar{W} + p)^2}, & \lambda'_2 = -ir(\bar{W} + p) - \sqrt{1 - r^2(\bar{W} + p)^2}, \\ \lambda_3 = -ir(\bar{W} - p) + \sqrt{1 - r^2(\bar{W} - p)^2}, & \lambda'_3 = -ir(\bar{W} - p) - \sqrt{1 - r^2(\bar{W} - p)^2}, \end{cases} \quad (2.17)$$

式中

$$\bar{W} = u \sin^2 K_1 h + v \sin^2 K_2 h; \quad p = \sqrt{\phi(\sin^2 K_1 h + \sin^2 K_2 h)};$$

$$r = \Delta t/h.$$

由此得出格式 C 的稳定条件

$$(\sqrt{2} \bar{U} + \sqrt{\phi}) < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.18)$$

其中 $\bar{U} = \max(u, v)$, 同理由 (2.15) 式可得第一变分方程, 并略去 Δt 项后为

$$V_{i,j}^{n+1} = \bar{V}_{i,j}^n - \Delta t [A V_x^n + B V_y^n], \quad (2.19)$$

其放大矩阵的特征值为

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2} (\cos K_1 h + \cos K_2 h) - ir \bar{W}, \\ \mu_2 = \frac{1}{2} (\cos K_1 h + \cos K_2 h) - ir (\bar{W} + p), \\ \mu_3 = \frac{1}{2} (\cos K_1 h + \cos K_2 h) - ir (\bar{W} - p), \end{cases} \quad (2.20)$$

由此得出格式 L 的稳定条件为

$$(\sqrt{2} \bar{V} + \sqrt{\phi}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.21)$$

当交替使用格式 L 和 C 时, 相当于对线性化方程略去低阶项之后所得出的双步长高精度格式. 事实上, 将 (2.10) 式代进 (2.16) 式可得

$$\begin{aligned} V_{i,j}^{n+1} &= V_{i,j}^{n-1} - r \{ A \delta_x \bar{V}^n + B \delta_y \bar{V}^n \} \\ &\quad + \frac{1}{2} r^2 \{ A^2 \delta_{xx} V^n + (AB + BA) \delta_{xy} V^n + B^2 \delta_{yy} V^n \}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

此处

$$\begin{aligned} \delta_x(\quad)^n &= (\quad)_{i+1,j}^n - (\quad)_{i-1,j}^n, & \delta_y(\quad)^n &= (\quad)_{i,j+1}^n - (\quad)_{i,j-1}^n, \\ \delta_{xx}(\quad)^n &= (\quad)_{i+2,j}^n - 2(\quad)_{i,j}^n + (\quad)_{i-2,j}^n, \\ \delta_{yy}(\quad)^n &= (\quad)_{i,j+2}^n - 2(\quad)_{i,j}^n + (\quad)_{i,j-2}^n, \\ \delta_{xy}(\quad)^n &= (\quad)_{i+1,j+1}^n - (\quad)_{i+1,j-1}^n - (\quad)_{i-1,j+1}^n + (\quad)_{i-1,j-1}^n. \end{aligned}$$

由此可见交替使用格式 L 与 C 时, 其截断误差可近似地估计为 $O(\Delta t^2 + h^2)$.

此外, 格式 L-C-L 克服了单独使用格式 C 的缺点, 即“寄生波”^[2], 及 $(\sqrt{2} \bar{V} + \sqrt{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 波长 $L = 4h$ 产生的线性不稳定现象; 同时格式 L-C-L 也减弱了格式 L 的衰减性.

2. 差分方程波动解的传播速度

线性化正压初始方程的波动解频率为

$$\begin{cases} \alpha_1 = -(uK_1 + vK_2) \\ \alpha_2 = -(uK_1 + vK_2 + \sqrt{\phi(K_1^2 + K_2^2) + f^2}) \\ \alpha_3 = -(uK_1 + vK_2 - \sqrt{\phi(K_1^2 + K_2^2) + f^2}) \end{cases} \quad (2.23')$$

而格式 C 的波动解频率为

$$\begin{cases} \beta_1 = -\sin^{-1}[r(u \sin K_1 h + v \sin K_2 h)] \\ \beta_2 = -\sin^{-1}[r(u \sin K_1 h + v \sin K_2 h + \sqrt{\phi(\sin^2 K_1 h + \sin^2 K_2 h)})], \\ \beta_3 = -\sin^{-1}[r(u \sin K_1 h + v \sin K_2 h - \sqrt{\phi(\sin^2 K_1 h + \sin^2 K_2 h)})]. \end{cases} \quad (2.24')$$

格式 L 的波动解的频率为

$$\begin{cases} \rho_1 = -\operatorname{tg}^{-1}\left(2r \frac{u \sin K_1 h + v \sin K_2 h}{\cos K_1 h + \cos K_2 h}\right), \\ \rho_2 = -\operatorname{tg}^{-1}\left(2r \frac{u \sin K_1 h + v \sin K_2 h + \sqrt{\phi(\sin^2 K_1 h + \sin^2 K_2 h)}}{\cos K_1 h + \cos K_2 h}\right), \\ \rho_3 = -\operatorname{tg}^{-1}\left(2r \frac{u \sin K_1 h + v \sin K_2 h - \sqrt{\phi(\sin^2 K_1 h + \sin^2 K_2 h)}}{\cos K_1 h + \cos K_2 h}\right). \end{cases} \quad (2.25')$$

我们考虑沿 x 方向波的传播速度, 即 $v = 0$ 的情形, 略去 f , 由 (2.23') 式得到重力快波和涡旋慢波的传播速度

$$\begin{cases} A_1 = -u \\ A_2 = -(u + \sqrt{2\phi}) \\ A_3 = -(u - \sqrt{2\phi}) \end{cases} \quad (2.23)$$

同理, 对于格式 C 由 (2.24') 得到波速为

$$\begin{cases} A_1^C = A_1 \frac{\sin^{-1}\left(r u \sin \frac{2\pi}{L} h\right)}{r u K h} \\ A_2^C = A_2 \frac{\sin^{-1}\left[r(u + \sqrt{2\phi}) \sin \frac{2\pi}{L} h\right]}{r(u + \sqrt{2\phi}) \frac{2\pi}{L} h} \\ A_3^C = A_3 \frac{\sin^{-1}\left[r(u - \sqrt{2\phi}) \sin \frac{2\pi}{L} h\right]}{r(u - \sqrt{2\phi}) \frac{2\pi}{L} h} \end{cases} \quad (2.24)$$

对于格式 L, 由 (2.25') 得到波速为

$$\begin{cases} A_1^L = A_1 \frac{\operatorname{tg}^{-1}\left[r u \operatorname{tg} \frac{2\pi}{L} h\right]}{r u \frac{2\pi}{L} h} \\ A_2^L = A_2 \frac{\operatorname{tg}^{-1}\left[r(u + \sqrt{2\phi}) \operatorname{tg} \frac{2\pi}{L} h\right]}{r(u + \sqrt{2\phi}) \frac{2\pi}{L} h} \\ A_3^L = A_3 \frac{\operatorname{tg}^{-1}\left[r(u - \sqrt{2\phi}) \operatorname{tg} \frac{2\pi}{L} h\right]}{r(u - \sqrt{2\phi}) \frac{2\pi}{L} h} \end{cases} \quad (2.25)$$

不难证明

$$A_p^L \geq A_p \geq A_p^C, \quad p = 1, 2, 3.$$

为了定量地比较波速, 取 $\Delta t = 720$ 秒, $h = 4 \times 10^5$ 米, 气象意义的波长量 10^6 米, 故取 $L = L_1 = L_2 = 1.6 \sim 8 \times 10^6$ 米, 水平风速 $u = 20$ 米/秒, $v = 0$, $\phi = 58.4 \times 10_3$ (米/秒)², 代入 (2.23)–(2.25) 式得出下表:

波长 10 ⁶ 米	相当格 点个数	A_1	A_1^C	A_1^L	$\frac{A_1^C + A_1^L}{2}$	A_2	A_2^C	A_2^L	$\frac{A_2^C + A_2^L}{2}$	A_3	A_3^C	A_3^L	$\frac{A_3^C + A_3^L}{2}$
1.6	4	-20	-12.74	-55.55	-34.15	-361.8	-250.8	-555.6	-403.20	321.8	218.4	555.6	387.0
2	5	-20	-15.14	-48.8	-31.97	-361.8	-295.3	-489.7	-392.5	321.8	257.9	514.9	386.4
4	10	-20	-18.71	-23.11	-20.91	-361.8	-347.3	-390.6	-368.95	321.8	307.2	352.0	329.6
6	15	-20	-19.42	-21.25	-20.34	-361.8	-355.6	-374.3	-364.95	321.8	315.4	334.8	325.1
8	20	-20	-19.68	-20.69	-20.19	-361.8	-358.5	-368.7	-363.60	321.8	318.2	328.8	323.5

我们近似地将 $(A_p^C + A_p^L)/2$ (米/秒), ($p = 1, 2, 3$) 视为格式 L. C–L 的波速, 由上表可以看出, 它比 A_p^C 与 A_p^L 更接近 A_p .

3. 满足基本物理定律

检查格式 C 和 L 是否满足质量守恒、动量守恒和能量守恒等基本物理定律, 可从 (2.14)、(2.15) 式分别对区域 $Q: [(x, y) \in Q, 0 \leq t \leq T]$ 的网格点求和, 即有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^N \left\{ (\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n-1}) \frac{1}{2\Delta t} + F_x^n + G_y^n \right\} 2\Delta t \Delta x \Delta y \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^N 2M_{ij}^n \Delta t \Delta x \Delta y = 0 \\ & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^N \left\{ (\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n) \frac{1}{\Delta t} + F_x^n + G_y^n \right\} 2\Delta t \Delta x \Delta y \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^N 2M_{ij}^n \Delta t \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (2.26')$$

利用台劳展式, 当 $\Delta x, \Delta y$ 很小时, 近似地有

$$\begin{aligned} & \sum_{\partial Q} \{ \Phi_{ij}^n \Delta x \Delta y + F_{ij}^n \Delta t \Delta y + G_{ij}^n \Delta t \Delta x \} \\ & + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{n=0}^N M_{ij}^n \Delta t \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

其式 $\sum_{\partial Q}$ 表沿区域 Q 的边界为 ∂Q 上的网格点求和, 而 (2.26) 式正好是积分守恒 (2.7) 式的有限和形式. 由此可知, 格式 C 和 L 均能满足质量和动量守恒定律.

由能量守恒 (2.11) 式得其相应的能量守恒有限和形式为

$$\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \phi_{i,j}^n \left\{ \frac{1}{2} [(u^2)_{ij}^n + (v^2)_{ij}^n] + \frac{1}{2} \phi_{ij}^n \right\} = \text{常数}$$

对于格式 L. C–L 我们进行了实际的能量计算, 基本上是满足能量守恒的.

三、特征流型、边界条件

在文章 [3] 中,曾考虑到在赤道附近,风场与高度场变化不大而提出固定边界条件

$$\begin{cases} \phi|_{\text{边}} = \text{常数} \\ u|_{\text{边}} = v|_{\text{边}} = 0 \end{cases}$$

即在边界上给出三个条件,文章 [3] 初步分析这种边值条件提法是不恰当的.

这里,我们运用一般偏微分方程的特征理论^[1-2],讨论初始方程的特征流型,根据边界上的特征流型分布情况来给出边界条件的提法及边值的数值计算. 为书写方便起见,记 $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y$ (有时也用 t, x, y).

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} u & \phi & 0 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} v & 0 & \phi \\ 0 & v & 0 \\ 1 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \phi \\ u \\ v \end{pmatrix}.$$

初始方程 (2.8) 式可简记为

$$\sum_{i=0}^2 A_i U_{x_i} + CU = 0 \quad (3.1)$$

设 $F_0(x_i) = \zeta_0$ 为方程组 (3.1) 式的特征流型,并选取与 $F_0(x_i)$ 无关的流型 $F_1(x_i)$, $F_2(x_i)$, 给出坐标变换:

$$\zeta_j = F_j(x_i), \quad j = 1, 2, 0$$

则 (3.1) 式变为:

$$\sum_{i=0}^2 \left[\sum_{j=0}^2 A_i(F_j)_{x_j} \right] U_{\zeta_j} + CU = 0, \quad (3.2)$$

按特征流型的定义: 函数 U 的外向导数 U_{ζ} 不存在或不唯一,由此得出特征条件

$$\det E[(F_0)_{x_i}] = \det \left[\sum_{i=0}^2 A_i(F_0)_{x_i} \right] = 0. \quad (3.3)$$

其中 $E[(F_0)_{x_i}]$ 称为方程 (3.1) 式的特征矩阵,而流型 $F_0(x_i)$ 的法向为 $[(F_0)_{x_0}, (F_0)_{x_1}, (F_0)_{x_2}]$. 为方便起见令

$$G = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ u & u^2 - \phi & uv \\ v & uv & v^2 - \phi \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_0)_{x_1} \\ (F_0)_{x_2} \\ (F_0)_{x_0} \end{pmatrix},$$

$$V = (1, u, v).$$

则由 (3.1) 式得出

$$\det E = (V, N)(N, GN) = 0$$

因此方程 (3.1) 的特征流型分解为两支,其中一支为:

$$(V, N) = N_0 + uN_1 + vN_2 = 0$$

表示由流线所组成的平面, 称为流面. 而流线

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad (3.4)$$

称为在流面上方程 (3.1) 式的双特征线. 而另一支为

$$(N, GN) = \phi N_1^2 + \phi N_2^2 - (N_0 + uN_1 + vN_2)^2 = 0.$$

表示流型 $F_0(x_i) = \zeta_0$ 的法线组成的锥面, 称为方程组 (3.1) 的法锥. 我们进一步求出组成法锥的这一族流型 $F_0(x_i) = \zeta_0$ 所组成的包络, 即求出法锥的对偶锥, 称为特征劈锥. 令 $F_0(x_i) = \zeta_0$ 上的切向为

$$R = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \end{pmatrix}$$

因为 $R \perp N$ 和 $(N, GN) = 0$, 故可取 $R = GN$. 于是有 $N = G^{-1}R$, 从而得到

$$(R, G^{-1}R) = (N, GN) = 0$$

亦即

$$(R, G^{-1}R) = \phi(dt)^2 - (dx + udt)^2 - (dy - vdt)^2 = 0$$

上式为方程组 (3.1) 的特征劈锥. 在其上有一族单参数的双特征线:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\phi} \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} = v + \sqrt{\phi} \sin \theta \end{cases} \quad (3.5)$$

式中 $\theta \in [0, 2\pi]$ 的参数, 且可得出 R 和 N 分别为

$$R = \begin{pmatrix} dt \\ (u + \sqrt{\phi} \cos \theta)dt \\ (v + \sqrt{\phi} \sin \theta)dt \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \sqrt{\phi} + u \cos \theta + v \sin \theta \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \frac{dt}{\sqrt{\phi}}$$

则特征矩阵为

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} N_0 + uN_1 + vN_2 & \phi N_1 & \phi N_2 \\ N_1 & N_0 + uN_1 + vN_2 & 0 \\ N_2 & 0 & N_0 + uN_1 + vN_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{dt}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} \sqrt{\phi} & -\phi \cos \theta & -\phi \sin \theta \\ -\cos \theta & \sqrt{\phi} & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \sqrt{\phi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

求出 E 的左零特征向量 (即要求 $PE = 0$), 则有

$$P = (1, \sqrt{\phi} \cos \theta, \sqrt{\phi} \sin \theta).$$

用 P 左乘方程组 (3.1) 式而得到只含两个方向微分的偏微分方程, 即

$$\begin{aligned} \frac{d^{(r)}}{dt} \phi + \sqrt{\phi} \cos \theta \frac{d^{(r)}}{dt} u + \sqrt{\phi} \sin \theta \frac{d^{(r)}}{dt} v - \phi \left\{ \sin \theta \frac{d}{ds} u - \cos \theta \frac{d}{ds} v \right\} \\ = f \sqrt{\phi} (-\sin \theta \cdot u + \cos \theta \cdot v) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\frac{d^{(r)}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{\phi} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (v + \sqrt{\phi} \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y}$$

表示沿特征劈锥上的双特征线方向

$$r: [1, (u + \sqrt{\phi} \cos \theta), (v + \sqrt{\phi} \sin \theta)]$$

的微分, 而

$$\frac{d}{ds} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

表示沿特征流型上的某一方向

$$B: (0, -\sin \theta, \cos \theta)$$

的微分. 因 $N \perp r$, $N \perp s$, 故方程 (3.6) 表示函数 ϕ, u, v 转化为特征流型上所满足的关系式称为方程 (3.1) 的特征偏微分方程. 显然, 因 $\theta \in [0, 2\pi]$, 故有无穷多个关系式.

由上述可知, 如图 1 所示初始方程的特征流型为过点 0 的一条流线和一个特征劈锥所组成. 在这些特征流型上有特征型偏微分方程 (3.6) 成立. 实际上大气中的重力快波沿锥面传播, 而涡旋慢波沿流线传播. 从依赖区域关系可知在点 0 的 ϕ, u, v 值只依赖于锥底各点上的 ϕ, u, v 值.

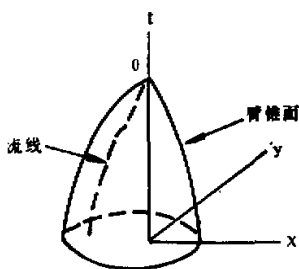


图 1

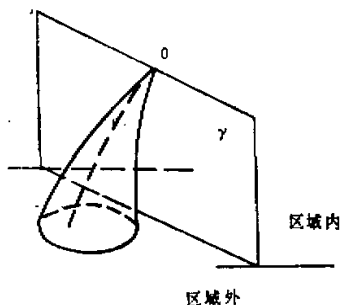


图 2

若 0 点在边界 Γ 上, 则有以下三种情况:

(1) 依赖区域在预报区域之外 (图 2), 这时在边界点 0 上需要给 ϕ, u, v 的值, 即三个边界条件.

(2) 依赖区域在预报区域之内 (图 3), 这时在边界点 0 上不当给边界条件, 而应当通过特征偏微分方程 (3.6) 计算出 0 点上的 ϕ, u, v .

(3) 依赖区域一部分在预报区域内, 一部分在预报区域之外, 即 $u^2 + v^2 \ll \phi$ 时 (图 4), 在边界点 0 上不当提出 ϕ, u, v 的三个边界条件, 只能给出少于三个条件, 因为这时在区域内的特征流型上的特征偏微分方程 (3.6) 式可以应用.

实际上, 在大气中 $u^2 + v^2 \ll \phi$ 恒成立, 因此我们在边界上只考虑上述第三种情况. 我们处理边值的方法是: 从 $\theta \in [0, 2\pi]$ 中选出有限个 θ_i , 得到沿这些 θ_i 方向的特征型偏微分方程, 进行线性组合, 消去沿 s 方向的偏微分项, 差分化后再进行计算. 设边界面 Γ 的

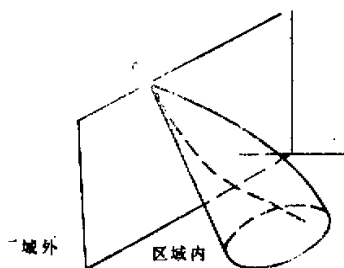


图 3

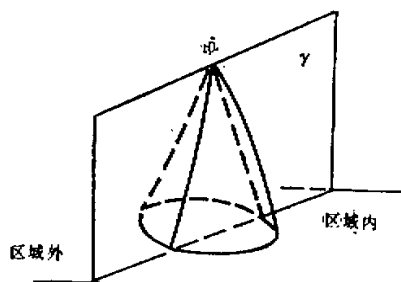


图 4

内法线 N 与 x 轴的夹角为 Θ , 取 $\theta_1 = \Theta + 1/2\pi$, 由 (3.6) 式沿第一条双特征线有

$$\begin{aligned} & \frac{d^{(r_1)}}{dt} \phi - \sqrt{\phi} \sin \Theta \frac{d^{(r_1)}}{dt} u + \sqrt{\phi} \cos \Theta \frac{d^{(r_1)}}{dt} v \\ & + \phi [\cos^2 \Theta u_x + \sin^2 \Theta v_y + \sin \Theta \cos \Theta (u_y + v_x)] \\ & = f \sqrt{\phi} (-u \cos \Theta - v \sin \Theta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

取 $\theta_2 = \Theta + \pi$, 由 (3.6) 式沿第二条双特征线有

$$\begin{aligned} & \frac{d^{(r_2)}}{dt} \phi - \sqrt{\phi} \cos \Theta \frac{d^{(r_2)}}{dt} u - \sqrt{\phi} \sin \Theta \frac{d^{(r_2)}}{dt} v \\ & + \phi [\sin^2 \Theta u_x + \cos^2 \Theta v_y - \sin \Theta \cos \Theta (u_y + v_x)] \\ & = f \sqrt{\phi} [u \sin \Theta - v \cos \Theta] \end{aligned} \quad (3.8)$$

取 $\theta_3 = \Theta + \frac{3}{2}\pi$, 由 (3.6) 式沿第三条双特征线有

$$\begin{aligned} & \frac{d^{(r_3)}}{dt} \phi + \sqrt{\phi} \sin \Theta \frac{d^{(r_3)}}{dt} u - \sqrt{\phi} \cos \Theta \frac{d^{(r_3)}}{dt} v \\ & + \phi [\cos^2 \Theta u_x + \sin^2 \Theta v_y + \sin \Theta \cos \Theta (u_y + v_x)] \\ & = f \sqrt{\phi} (u \cos \Theta + v \sin \Theta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

令风在边界的内法线方向上投影为

$$V_N = u \cos \Theta + v \sin \Theta, \quad (3.10)$$

方程 (3.1) 式的第一个方程为

$$\frac{d}{dt} \phi + \phi(u_x + v_y) = 0 \quad (3.11)$$

式中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

表示沿流线微分。现在我们根据边界面 Γ 上 0 点气流流进流出即 $V_N > 0$ 和 $V_N \leq 0$ 的

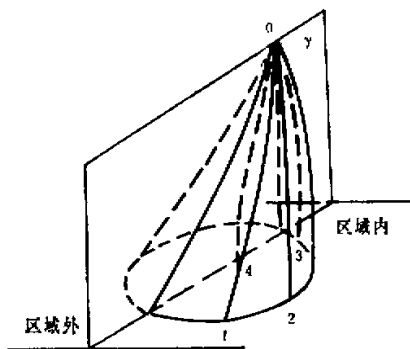


图 5

情况分别讨论:

(1) $V_N \leq 0$ 即气流流出的情况, 这时有

$$V_N = u \cos \Theta + v \sin \Theta \leq 0$$

$$[u + \sqrt{\phi} \cos \theta_i] \cos \Theta + [v + \sqrt{\phi} \sin \theta_i] \sin \Theta \leq 0$$

$$i = 1, 2, 3$$

因之我们所选取的三条双特征线流都在预报区域之内(图 5), 图 5 中的 $\widetilde{01}$ 、 $\widetilde{02}$ 、 $\widetilde{03}$ 为三条双特征线, $\widetilde{04}$ 为流线, 因之由 (3.7) 式减去 (3.9) 式得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^{(r_1)}}{dt} - \frac{d^{(r_3)}}{dt} \right) \phi - \sqrt{\phi} \sin \Theta \left(\frac{d^{(r_1)}}{dt} + \frac{d^{(r_3)}}{dt} \right) u \\ & + \sqrt{\phi} \cos \Theta \left(\frac{d^{(r_1)}}{dt} + \frac{d^{(r_3)}}{dt} \right) v = 2f \sqrt{\phi} (-u \cos \Theta - v \sin \Theta) \end{aligned} \quad (3.12)$$

方程 (3.7) 式加 (3.9) 式除以 2, 再加 (3.8) 式, 减 (3.11) 式得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^{(r_1)}}{dt} + \frac{d^{(r_3)}}{dt} \right) + \frac{d^{(r_1)}}{dt} - \frac{d}{dt} \right] \phi - \sqrt{\phi} \left[\cos \Theta \frac{d^{(r_1)}}{dt} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sin \Theta \left(\frac{d^{(r_1)}}{dt} - \frac{d^{(r_3)}}{dt} \right) \right] u - \sqrt{\phi} \left[\sin \Theta \frac{d^{(r_1)}}{dt} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \cos \Theta \left(\frac{d^{(r_1)}}{dt} - \frac{d^{(r_3)}}{dt} \right) \right] v = f \sqrt{\phi} (u \sin \Theta - v \cos \Theta), \end{aligned} \quad (3.13)$$

由以上两式可知, 消去关于 s 方向的微分后, 仅余下含有沿三条双特征线方向的微分项。实际计算用的差分式和边界条件如下, 由 (3.5) 式和 (3.4) 式分别得

$$\begin{cases} x_i = x_0 - (u_0^n - \sqrt{\phi_0^n} \cos \theta_i) \Delta t \\ y_i = y_0 - (v_0^n - \sqrt{\phi_0^n} \sin \theta_i) \Delta t, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} x_4 = x_0 - u_0^n \Delta t \\ y_4 = y_0 - v_0^n \Delta t \end{cases} \quad (3.15)$$

根据 (3.12) 和 (3.13) 两式分别得

$$\begin{aligned} & -\phi_1^n + \phi_3^n - \sqrt{\phi_0^n} \sin \Theta [2u_0^{n+1} - u_1^n - u_3^n] + \sqrt{\phi_0^n} \cos \Theta [2v_0^{n+1} - v_1^n \\ & \quad - v_3^n] = -2f_0 \sqrt{\phi_0^n} [u_0^n \cos \Theta + v_0^n \sin \Theta] \Delta t, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [2\phi_0^{n+1} - \phi_1^n - \phi_3^n] - \phi_2^n + \phi_4^n - \sqrt{\phi_0^n} \left[\cos \Theta (u_0^n - u_1^n) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sin \Theta (u_3^n - u_1^n) \right] + \sqrt{\phi_0^n} \left[-\sin \Theta (v_0^{n+1} - v_1^n) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \cos \Theta (v_3^n - v_1^n) \right] \\ & = f_0 \sqrt{\phi_0^n} [u_0^n \sin \Theta - v_0^n \cos \Theta] \Delta t, \end{aligned} \quad (3.17)$$

由 (3.10) 式得

$$V_N^{n+1} = u_0^{n+1} \cos \Theta + v_0^{n+1} \sin \Theta. \quad (3.18)$$

在 0 点上给出一个 ϕ , u , v 的边界条件后, 则可以用上述公式计算出点 0 上的 ϕ_0^{n+1} 、 u_0^{n+1} 、

v_0^{n+1} 的值, 我们近似地给出一个边界条件 V_N^{n+1} (如固定边界值不变), 由 (3.14), (3.15) 两边可以计算出四条双特征线的端点坐标 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$. 利用平面插值公式, 用已知格网点上的 ϕ^n, u^n, v^n 值插出这些点上的 ϕ_i^n, u_i^n, v_i^n 值. 代进 (3.16), (3.17) 和 (3.18) 各式, 并联立求出点 0 上的 $\phi_0^{n+1}, u_0^{n+1}, v_0^{n+1}$ 等三个函数值.

(2) $V_N > 0$, 即气流流进时, 这时有

$$V_N = u \cos \Theta + v \sin \Theta > 0$$

$$[u + \sqrt{\phi} \cos \theta_i] \cos \Theta + [v + \sqrt{\phi} \sin \theta_i] \sin \Theta \begin{cases} > 0, i = 1, 3 \\ < 0, i = 2. \end{cases}$$

因此流线和第一、第三条双特征线都在区域之外(图 6), 所以只有 (3.8)* 式可以利用, 这

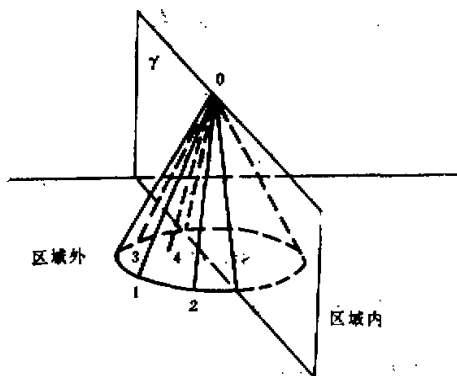


图 6

时不能消去 s 方向的微分项, 由 (3.5) 式我们有

$$\begin{cases} x_2 = x_0 - (u_0^n + \sqrt{\phi_0^n} \cos \theta_2) \Delta t \\ y_2 = y_0 - (v_0^n + \sqrt{\phi_0^n} \sin \theta_2) \Delta t, \end{cases} \quad (3.19)$$

由 (3.8) 式我们有

$$\begin{aligned} \phi_0^{n+1} - \phi_2^n &= \sqrt{\phi_0^n} [\cos \Theta (u_0^{n+1} - u_2^n) + \sin \Theta (v_0^{n+1} - v_2^n)] \\ &= \phi_0^n \Delta t \left[-\sin \Theta \frac{\Delta u}{\Delta s} - \frac{v^n}{\Delta s} \cos \Theta \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

式中 $\Delta u / \Delta s, \Delta v / \Delta s$ 是沿 s 方向的差商, 可以近似计算求得. 由 (3.20) 式可知, 只需在边界 0 点上给出 ϕ, u, v 中的任何两个边界条件, 即可求出 $\phi_0^{n+1}, v_0^{n+1}, u_0^{n+1}$, 我们近似地令 u_0^{n+1}, v_0^{n+1} 固定不变. 则由 (3.20) 式算出 ϕ_0^{n+1} , 计算步骤与 $V_N \leq 0$ 时相同.

上述计算用的边界条件提法是比较恰当的. 然而边值条件提法的适定问题, 这里没有严格证明. 用地转风初值条件, 作小范围矩形区域预报试验, 特征锥边值处理比固定边界值处理得好些, 对边界值误差的内向传播有一定抑制作用.

参 考 文 献

- [1] Courant, R. and Hilbert, D., Method of Mathematical physics, Vol. II.
- [2] Butler, D. S., Proceedings of Royal Society, 5 April, 255, 1281, 1960.
- [3] 刘瑞芝, 张济朋: 气象学报, No. 3, 1964.
- [4] 叶笃正等: 北半球冬季阻塞形势的研究, 科学出版社, 1962.
- [5] Richtmyer, R. D., Difference Methods for Initial-Value Problems, 1957.
- [6] Charney, J. G., Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo Nov. 7—13, 1960.

AN ALTERNATIVE SCHEME FOR SOLVING THE PRIMITIVE EQUATIONS

Zhang Ji-peng Zhang Ji-sheng

(*Institute of Computational Technology, Chinese Academy of Sciences*)

Wang Zong-hao

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences*)

Abstract

An alternative scheme for numerical integration is presented, in which the Lax-leapfrog-lax schemes are used alternatively and are tested with the barotropic primitive equations. The results show some improvements in predicting the displacement of weather systems. Besides, the well-posed problem of the boundary conditions is examined by the use of the characteristic theory.