第5卷 第3期　大 气 科 学　Vol. 5, No. 3
1981年9月　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　Sept., 1981

重力惯性波的螺旋结构

张可苏
（中国科学院大气物理研究所）

提　　要

本文在简化条件下分析了绕心涡漩系统中重力惯性波螺旋结构形成的物理条件，主要结果是：（1）非静力平衡的对流性扰动比准静力平衡重力惯性波易于形成螺旋结构.（2）层结越不稳定，绝对和相对角速度越小，越有利于螺旋结构的形成.（3）水平不均匀的层结分布按如下方式起作用：不稳定的大气核区附近易生成螺旋波，而稳定的大气核区不利于绕心螺旋波的形成.（4）仅在离涡漩中心一定距离处才能生成螺旋波，距离越远，容许的臂数越多，这或许能解释卫星及雷达照片上看到的某些事实.（5）旋臂具有多种多样的型式，在较严的限制下得到对数螺旋，更一般的条件下得到阿基米德螺旋.

前　　言

近年来，从高分辨率卫星云图及雷达回波资料中发现，许多大气涡漩系统中都存在非轴对称扰动，在云图上它们表现为十分壮观的螺旋云带：大者，如绕极旋转的地球大气行星波，具有螺旋式扭转的槽脊线；中者，如温带气旋、台风及某些热带扰动，具有清晰的螺旋云带；甚至某些中间尺度和中尺度低涡，也有明显的非对称结构，它们在中、低层一般有二、三支主要的入流，而在高层有辐散性出流．这似乎表明，大气中有心绕动具有非轴对称螺旋结构这一特点有某种普遍性．除了声波以外，具有天气意义的动力学上许可的波动主要是大气行星波和重力惯性波．在我国，叶笃正、巢纪平等[1-3]先后对绕极旋转的行星波螺旋结构的形成条件作了物理分析，他们共同指出，对正压准地转气流，基本气流绝对角速度随纬度的变化是产生扰动螺旋结构的唯一原因．这反映了基本气流和地转参数对行星波波速的控制作用以及基本流场较差转动对扰动结构的影响．但在另一些盛行对流活动的涡漩系统中，扰动结构的诊断分析表明，它们本质上是重力惯性波(如台风)．有些中尺度扰动中的“纹理”结构也可能与非均匀层结大气中的重力惯性波有关．Kurihara[4,7]的台风数值模拟算出了螺旋带，通过诊断分析，发现扰动的结构也类似于重力波．因此我们进一步对重力惯性波形成螺旋结构的可能性作些探讨．由于影响重力惯性波波速的因子远比正压罗斯贝波复杂，可以预计，将有更多的物理因子进入决定重力惯性波螺旋式结构的控制参数群．这里基本气流只对重力波速起修正作用，而大气的层结稳定度则起着更基本的控制作用．

1979年7月收到修改稿．

一、柱面坐标系里的动力方程组

为了讨论有对流特征的绕心运动，我们在柱面坐标系 $(r、\varphi、z、t)$ 中给出用准动量无辐散近似滤去了声波的非静力平衡动力方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{v}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{v^2}{r}-fv=-\dfrac{1}{\bar\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{v}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{uv}{r}+fu=-\dfrac{1}{\bar\rho r}\dfrac{\partial P}{\partial \varphi}\\ \lambda\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{v}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}-g\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t}+u\dfrac{\partial \theta}{\partial r}+\dfrac{v}{r}\dfrac{\partial \theta}{\partial \varphi}+w\dfrac{\partial \theta}{\partial z}=0\\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \bar\rho ru}{\partial r}+\dfrac{\partial \bar\rho v}{\partial \varphi}\right)+\dfrac{\partial \bar\rho w}{\partial z}=0\\ \rho'=\dfrac{P'}{c^2}-\dfrac{\bar\rho\theta'}{\bar\theta}\end{cases}\tag{1}$$

其中 λ 是示踪系数，$\lambda=0$ 表静力平衡模式，$\lambda=1$ 表非静力平衡模式，c 是声速，θ 是位温，其余符号均是气象上常用的，如果在第三运动方程中取浮力近似，并将(1)沿基本流 $\bar v=r\bar\Omega(r,z)$ 及基本位温场 $\bar\theta(r,z)$ 线性化，令基本流满足梯度平衡，基本质量场静力平衡，即

$$\frac{\bar v^2}{r}+f\bar v=\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial \bar P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \bar P}{\partial z}=-\bar\rho g$$

则略去二级小量后得到扰动方程：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar\Omega\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)u-(f+2\bar\Omega)v=-\dfrac{\partial P'}{\partial r}\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar\Omega\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)v+\left(f+2\bar\Omega+r\dfrac{\partial\bar\Omega}{\partial r}\right)u+wr\dfrac{\partial\bar\Omega}{\partial z}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P'}{\partial \varphi}\\ \lambda\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar\Omega\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)w=-\dfrac{\partial P'}{\partial z}-\rho' g\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\bar\Omega\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)\theta+u\dfrac{\partial\bar\theta}{\partial r}+w\dfrac{\partial\bar\theta}{\partial z}=0\\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial ru}{\partial r}+\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\right)+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\\ \rho'=\dfrac{P'}{c^2}-\dfrac{\theta}{\bar\theta}\end{cases}\tag{2}$$

此处已将扰动量 $\bar\rho(u'、v'、w'、\theta')$ 重写为 $(u、v、w、\theta)$，由方程(2)可见有五个基本

场控制参数：$\bar{\Omega}$、$\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial r}$、$\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial z}$、$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}$，它们对扰动的性质均会发生影响．由于基本风场对波动螺旋结构的影响已有了较充分的讨论[1-2]，特别当 f 为常数时，基本流的较差转动成为引起正压行星波螺旋结构的唯一原因．注意基本气流对重力惯性波速也有修正作用，因此同样会对螺旋结构发生影响，但重力惯性波速在更大程度上依赖于层结稳定度[6]，因此我们作另一类"单因子实验"，即在没有或只有很小的较差转动时，着重考察温度场等物理因子对重力惯性波有心扰动结构的影响．

二、螺旋状重力惯性波形成条件的物理分析

假定 $\bar{\Omega}$ 是关于 r 和 z 的缓变函数，在泰勒展开的一级近似下取局部解，这相当于在水平运动方程中忽略了动量垂直输送(此处不关心斜压不稳定问题)，同时将 $\bar{f}=f+2\bar{\Omega}$ 看成准常数，这样可以得到既能考虑温度场影响，又在数学上困难较少的"准刚性转动"模型：

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u-\bar{f}v=-\frac{\partial P'}{\partial r}\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)v+\bar{f}u=-\frac{1}{r}\frac{\partial P'}{\partial\varphi}\\ \lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)w=-\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{g}{c^2}\right)P'+\frac{g}{\bar{\theta}}\theta'\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\theta+u\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial r}+w\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}=0\end{cases}\tag{3}$$

这里，令浮力频率 $N^2=\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}$，$M^2=\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial r}$，令 $M_0^2=\frac{M^2}{r}$ 与 r 无关$\left(\text{这相当于 }\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial r^2}=\text{常数}\right)$则得到关于 w 的单一变量方程：

$$\begin{aligned}&\left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2+\bar{f}^2\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{g}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\left[\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2+N^2\right]\Delta\right.\\&\quad\left.+\Delta N^2\right\}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)w-M_0^2\left[\bar{f}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right.\\&\quad\left.+\left(2+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0\end{aligned}\tag{4}$$

式中

$$\Delta\equiv\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

其中 $s=\ln\frac{r}{r_0}$ (r_0 可以按需要决定)．

(4)式中温度场的影响主要集中于三项：N^2、ΔN^2 和 M_0^2，为了比较各因子的相对重要性，构造无因次方程如下：

$$\left\{\left[\left(\frac{1}{NT}+\frac{\bar{\Omega}}{N\phi}\right)^2+\frac{\bar{f}^2}{N^2}\right]\left(\frac{L^2}{H^2}+\frac{gH}{c^2}\frac{L^2}{H^2}\right)\right.$$

$$+\left[\lambda\left(\frac{1}{NT}+\frac{\bar{\Omega}}{N\phi}\right)^2+1\right]+1\Big\}W$$

$$-\varepsilon\left[\frac{\bar{f}}{(\bar{\omega}+\bar{\Omega})}+2+\frac{R}{L}\right]W=0 \tag{5}$$

其中 T、ϕ、L、H 是扰动变化的时间、空间特征尺度，$\bar{\omega}$ 是特征角速度，W 是特征垂直动量，R 是所考虑的水平范围．这里将 $N^2\Delta$ 和 ΔN^2 的特征项取作 1，则包含 M^2 的无因次系数 $\varepsilon=\dfrac{L^2\cdot\Delta_L\bar{\theta}}{HR\cdot\Delta_Z\bar{\theta}}$，其中 $\Delta_L\bar{\theta}$ 和 $\Delta_Z\bar{\theta}$ 分别为水平和垂直方向位温变化的特征值．通常 $\Delta_Z\bar{\theta}\sim10\Delta_L\bar{\theta}$，在稳定大气里，一般取 $N^2\doteq0$—10^{-4}(秒$^{-2}$)，$M\doteq0$—10^{-5}(秒$^{-2}$)，于是有：

1) $\varepsilon\ll1$，这时位温的变化主要由垂直运动引起，方程 (4) 成为：

$$\left\{\left[\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2+N^2\right]\Delta+\Delta N^2+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\bar{f}^2\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{g}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}w=0 \tag{6}$$

2) $\varepsilon\geqslant1$，这时可以部分地考虑位温水平平流的作用，即在方程 (4) 中，仅去掉含 $r\dfrac{\partial}{\partial r}$ 的项：

$$\left\{\left[\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2+N^2\right]\Delta+\Delta N^2+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2+\bar{f}^2\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{g}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)w-M_0^2\left[\bar{f}\frac{\partial}{\partial\varphi}+2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{7}$$

(7) 式是比 (6) 式更一般的情况．我们讨论 (7) 式出现螺旋波的条件．

前面已设 M_0^2 不是 r 的函数，又 M_0^2 在 z 方向的变化 $\dfrac{\partial M_0^2}{\partial z}\ll M_0^2$，因此可以近似取如下形式的解：

$$w=W_{(s)}e^{-bz+i(kz+m\varphi-m\omega t)}$$

于是 (7) 式变为

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}+Q_{(s)}\right]W=0 \tag{8}$$

其中

$$b=\frac{1}{2}\left[\frac{g}{c^2}+\frac{M_0^2[2(\omega-\bar{\Omega})-\bar{f}]}{(\omega-\bar{\Omega})[m^2(\omega-\bar{\Omega})^2-\bar{f}^2]}\right]$$

$$Q_{(s)}=\frac{\Delta N^2+(k^2+b^2)[m^2(\omega-\bar{\Omega})^2-\bar{f}^2]}{N^2-\lambda m^2(\omega-\bar{\Omega})^2}r_{(s)}^2-m^2 \tag{9}$$

这里，M_0^2 表征系统的暖心或冷心结构，它只影响扰动向上衰减或增长的程度，$Q_{(s)}$ 才是决定能否形成水平螺旋结构的主要判据．为使 w 出现等位相线随 r 变化的螺旋波，W 必须是振动解．按振荡定理[5]：当 $Q_{(s)}>0$，且 $\int_{s_m}^{\infty}Q_{(s)}ds$ 发散时，W 有无穷多个零点．由于非静力平衡大气里 ω 的上界是 N[6]，故(9)式分母为正，于是总可找到一个频段使 $r_{(s)}^2$ 前

的系数 >0，从而使积分发散. $Q_{(r)}>0$ 的条件是:

$$\{\Delta N^2+(k^2+b^2)[m^2(\omega-\bar{\Omega})^2-\bar{f}^2]r^2-m^2[N^2-\lambda(\omega-\bar{\Omega})^2m^2]\}>0 \tag{10}$$

(10) 式是分析螺旋波形成条件的主要依据. 由 (10) 式和 (9) 式可得:

1) λ 是静力平衡性质的示踪系数，在 (10) 式中，其符号为正，故对流性波动比静力平衡重力惯性波易于形成螺旋结构.

2) 牵连角速度 f 和相对角速度 $\bar{\Omega}$ 的影响: 若 $[m^2(\omega-\bar{\Omega})^2-\bar{f}^2]>0$，则这是有利于 $Q_{(r)}>0$ 的因子，但考虑到 $[(\omega-\bar{\Omega})^2m^2-\bar{f}^2]<m^2(\omega^2-f^2)$，故 $\bar{\Omega}$ 及 f 越大，满足 $Q_{(r)}>0$ 的频率要求越高; 相反，在低纬度及角速度较低的涡漩中，较有利于低频重力惯性波螺旋结构的形成. 对于 $f\sim10^{-4}$ (秒$^{-1}$)，$\bar{\Omega}\sim10^{-4}$ (秒$^{-1}$)，则周期为几个小时的波动(频率 $m\omega\sim10^{-3}$ (秒$^{-1}$))，通常能满足 $[(\omega-\bar{\Omega})^2m^2-\bar{f}^2]>0$.

3) 层结稳定度 N^2 及其水平分布 ΔN^2 的作用: 由 (10)式可知，在稳定大气里，N^2 越大，越不利于螺旋波的生成. 其次，考察稳定度非均匀分布的影响. 当 $\Delta N^2>0$ 时，表明存在一个相对不稳定的大气核区，这种中心较不稳定，边缘较为稳定的分布是大气中常见的，如在一层结比较均匀的较大范围气层内，由于动力系统的激发，导致数十公里至上百公里范围内积云群的强烈发展，对流在周围激发重力波，并在四周生成强烈下沉气流，由于潜热作用，对流中心区稳定度小而四周稳定度大，这就造成了一个不稳定大气核区 $\Delta N^2>0$，它促使重力惯性波形成螺旋式结构. 因此，强对流的充分发展是大气中扰动形成螺旋结构的有利条件. 相反，在稳定大气核区 ($\Delta N^2<0$) 附近，不利于生成螺旋状扰动.

4) 可压缩性的影响: 对 Boussinesq 流体，取 $\frac{\rho'}{\bar{\rho}}=-\frac{\theta'}{\bar{\theta}}$ 近似，在 $M_0^2=0$ 和 $b=0$ 时，由 (10) 式知正压性扰动 ($k\doteq0$) 不可能出螺旋波. 然深厚对流大气的可压缩性必须考虑，这时 $b\neq0$，因此在此意义上，大气是比海洋更有利的介质.

5) 垂直结构: 在条件 (2) 满足的情况下，内波 ($k\neq0$) 较正压性扰动 ($k=0$) 容易生成螺旋. 此外，温度场的水平分布 M_0^2 也对扰动垂直结构发生影响，在 $[m^2(\omega-\bar{\Omega})^2-\bar{f}^2]>0$ 时，冷心结构 ($M_0^2>0$) 使 $\bar{\rho}w'$ 的重力惯性内波向上衰减，它增强由于可压缩性引起的向上减幅作用(在 b 的表达式中，可压缩性由 g/c^2 表征); 暖心结构 ($M_0^2<0$) 则是向上增幅的因子，通常 $\frac{g}{c^2}\sim10^{-4}$ (米$^{-1}$)，而 $|M_0^2|<\frac{g}{c^2}$，故暖心结构将减弱扰动向上的衰减，而不至引起向上的增幅. 仅在 $(\omega-\bar{\Omega})\to0$ 的临界情形下，会引起相反的变化.

三、螺旋波出现的频段、范围及旋臂数

我们知道，非静力平衡重力惯性波许可的频段范围是 $f\leqslant\omega\leqslant N$，而在静力平衡假定下，则会出现 $N\leqslant\omega<\infty$ 的虚假高频波段[6]. 按 (10) 式，可得到螺旋波存在的频段范围为:

$$(\omega-\bar{\Omega})^2>\frac{m^2N^2+(k^2+b^2)r^2\bar{f}^2-r^2\Delta N^2}{\lambda m^4+r^2(k^2+b^2)m^2}\equiv\omega_m^2 \tag{11}$$

这时相应的重力惯性波的角速度为:

$$\omega>\bar{\Omega}+\omega_m$$

由 (11) 式知，波速在动力学上受层结、绝对角速度、扰动垂直结构、旋臂数、可压缩性和距离等因子的控制. 若取 $N^2 = 10^{-4}$ (秒$^{-2}$), $\Delta N^2 = 0$, $k^2 = 10^{-7}$ (米$^{-2}$), $m = 2$, 在 $r = 1000$ 公里处，要求 $\omega > \bar{f} \approx 10^{-4}$ (秒$^{-1}$)，即要求波动周期 $T < 18$ 小时；若 $r = 100$ 公里，要求 $\omega > 0.86 \times 10^{-3}$ (秒$^{-1}$)，周期 $T < 2.2$ 小时；在小尺度涡旋中，ω 主要由层结决定，当 $r = 10$ 公里时，要求 $\omega > 7 \times 10^{-3}$ (秒$^{-1}$), $T < 0.3$ 小时. 以上讨论表明，在同样层结下，离中心越远，可容许的螺旋波周期越长.

现在进一步讨论一定旋臂数的螺旋波存在的范围，并对旋臂数作出估计.

由 (10) 式可直接导出：

$$r^2 > \frac{N^2 - \lambda(\omega - \bar{\Omega})^2 m^2}{\Delta N^2 + (k^2 + b^2)[m^2(\omega - \bar{\Omega})^2 - \bar{f}^2]} \cdot m^2 \equiv r_m^2 \tag{12}$$

仅在 $r > r_m$ 的范围内，可以出现臂数为 m 的螺旋波，而在临界半径 r_m 以内，方程 (8) 没有振动解. 层结越稳定，r_m 越大；频率越高，r_m 越小. 现估计一定距离 r 处所容许的螺旋臂数的上限. 当 $\Delta N^2 = 0$, $\bar{\Omega} = 0$ 时，计算比较简单，这时 $M_0^2 = 0$, $b = \frac{g}{2c^2} \doteq \frac{10^{-4}}{2}$ (米$^{-1}$).

$$m^2 = \frac{(k^2 + b^2)(\nu^2 - f^2)}{N^2 - \nu^2} r^2 \tag{13}$$

若取 $N^2 = 10^{-4}$ (秒$^{-2}$)，固定角频率 $\nu = 10^{-3}$ (秒$^{-1}$), $k^2 = 10^{-7}$ (米$^{-2}$)，则 $r = 30$ 公里处，$m \doteq 1$, $r = 100$ 公里处，$m \doteq 3$.

又若取固定旋臂数 $m = 2$, $k^2 \doteq 10^{-8}$ (米$^{-2}$), $\nu = 10^{-3}$ (秒$^{-1}$)，则对稳定度较低的层结 $N^2 \doteq 2\nu^2$，有 $r_m = 20$ 公里. 当 N^2 增至 10^{-4} (秒$^{-2}$), $r_m \doteq 200$ 公里.

四、螺旋臂的型式

上面的讨论表明，对于绕轴传播的重力惯性波，总可以找到一个出现螺旋结构的范围 $r > r_m$. 在地转模型下，不少作者在 $Q_{(s)}$ 是缓变函数的假设下[1-3]，得出螺旋状行星波的对数螺旋结构，对于本文所讨论的重力惯性波，如果也作同样处理，令 (8) 式中的 $W = A_{(s)}e^{i\sqrt{\bar{Q}}s}$，则固定时刻等位相线的极角为：

$$\varphi = \frac{-1}{m}(\sqrt{\bar{Q}}s + kz) + 常数 \tag{14}$$

由于 $s = \ln\frac{r}{r_0}$，自然也可得到绕心对数螺旋.

但以上的假定太强了(见 (9) 式). 实际上，假若放弃 $Q_{(s)}$ 缓变的要求，则允许出现的旋臂结构应是各种各样的. 以下我们在均匀层结的假定下求解变系数方程 (8)，这时 (8) 式可写为：

$$W'' + (ae^{2s} - m^2)W = 0 \tag{15}$$

其中 $a = r_0^2(k^2 + b^2)[m^2(\omega - \bar{\Omega})^2 - \bar{f}^2]/[N^2 - \lambda m^2(\omega - \bar{\Omega})^2]$，这是具有虚周期 $2\pi i$ 的希尔方程[5]，经过一系列变换最后得到的解为：

$$W = Z_m\left(\sqrt{a}\cdot\frac{r}{r_0}\right) \tag{16}$$

其中 Z_m 是 m 阶柱函数，$Z_m = c_1J_m + c_2y_m$. J_m 和 y_m 分别为第一类和第二类贝塞尔函数，c_1, c_2 是常数. 正如按振荡定理对 (8) 式所作的判断，这里确实求出了相对于实宗量 $\sqrt{a}\cdot\frac{r}{r_0}$ 的振荡解. 特别在 r 充分大时，柱函数有渐近表达式 $\frac{1}{\sqrt{r}}e^{i\sqrt{a}\frac{r}{r_0}}$，这时得到的是阿基米德螺线

$$\varphi = -\frac{1}{m}\left[\sqrt{a}\,\frac{r}{r_0} + kz\right] + 常数 \tag{17}$$

形成螺线的条件仅仅是 $a > 0$，即在 $N^2 > 0$ 的稳定层结中，要求频率满足

$$[(\omega - \bar{\Omega})^2m^2 - f^2] > 0$$

对 $\bar{\Omega} = 0$ 的情况，$\nu > f$ 是特征波动自动满足的频谱特性.

五、结 语

大气中存在各种涡旋，广义的大气环流实际上就是各种尺度涡旋运动的总和. 天气学的研究表明围绕涡旋运动的有心扰动常常具有螺旋状结构. 理论的分析也支持这种观点：不论是涡度平流引起的准地转扰动，还是非地转的重力惯性波，甚至浮力作用下的对流型扰动，在一定条件下均可生成螺旋式结构，这说明了螺旋式的有心扰动在大气中有一定程度的普遍性. 这种现象可能是由于波动角速度沿径向的不均匀性造成的. 如正压罗斯贝波速主要受基本流的"转动较差"控制，而重力惯性波速则受层结、波动结构、风速等多种因子控制. 对于短波，层结及其水平不均匀性起主要作用，对大尺度波，绝对角速度变得相对重要(见 (11) 式). 最后证明了旋臂的型式不只限于过去所讨论的对数螺旋型，按基本场物理参数的分布，它还可以有另外的型式 (如阿基米德型). 本文着重讨论了温度场的作用，指出不稳定大气核区的存在及对流性质的扰动有利于螺旋波的生成，这种情况在台风和中尺度系统中比较多见. 还指出旋臂的数目随临界半径增加，由此可得到相似于实际螺旋云系的总体结构.

本文曾经巢纪平同志审阅并提出宝贵意见，特此致谢.

参 考 文 献

[1] 巢纪平、叶笃正，正压大气中的螺旋行星波，大气科学，1977 年，第 2 期.
[2] 刘式适、杨大升，地球大气行星波的螺旋结构，气象学报，1979 年，第 1 期.
[3] 季劲钧，球面大气中的螺旋行星波，气象学报，1979 年，第 2 期.
[4] Kurihara, On the development of spiral bands in a tropical Cyclone, *J. A. S.*, **33**, 940—958, 1976.
[5] 常微分方程手册，科学出版社，1977 年.
[6] 张可苏、周晓平，非静力平衡大气中重力惯性波的频谱、结构和传播特征，全国第二次数值预报会议文集(即将出版).
[7] Kurihara, Structure of a tropical Cyclone developed in a three-dimensional numerical model, *J. A. S.*, **31**, 893—919, 1974.

THE SPIRAL STRUCTURE OF THE INERTIAL GRAVITY WAVE

Chang Ke-su

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

Under the simplified assumptions the physical conditions for the formation of the spiral structure of inertial gravity waves are dissensed. It is indicated that:

1. Convective perturbations produce spiral structure more likely than hydrostatic gravitational waves do.

2. The more instable the stratification of the atmosphere and the smaller the absolute and relative angular velocities, the more likely it forms the spiral wave.

3. The horizontal distribution of stratification has an important influence on the spiral waves. If there is a relatively unstable core in the atmosphere, then it is more likely to form a spiral wave.

4. The number of spiral arms increases when distance is getting larger, therefore the macroscopic structure is some analogue of satellite and radar pictures.