

逐日环流指数的最大熵谱分析

曹 鸿 兴 陈 国 范
(中央气象局气象科学研究院)

提 要

用最大熵方法对1956—1977年逐日500毫巴亚洲环流指数分别按年和季进行了谱分析。结果指出：指数循环是一种可变周期，周期长度从2周至9周不等，但优势周期处在4周至6周。多年平均值的主周期为32天，次周期为17天。指数变化速率的优势周期处在11—15天，主周期平均长度为13天。周期的季节性差异并不明显，其长年变化呈现出5—6年的阶段性。

以纬向西风占优势的高指数环流和以经向交换为主的低指数环流的交替构成了大气环流变化的基本形式之一——指数循环。通常指数循环是用环流指数来描述的。天气预报的长期实践证明，环流指数是中长期预报考虑环流背景变化的一个良好指标。J. Namias^[1]最早用环流指数来研究指数循环及其相应的大型天气过程。李小泉等^[2]对月环流指数作过功率谱分析，得到亚洲经向环流指数存在5个月周期的结论。本文用1956—1977年逐日亚洲环流指数^[3]（取45°N与65°N两纬圈65°E—155°E 500毫巴高度平均之差）的资料进行统计研究，用最大熵方法进行谱估计，以考察环流指数的周期特征及其随时间的变化，为研究大气环流和中期预报提供统计事实。

一、计算方法

设距平序列 x_1, x_2, \dots, x_n ，假定采样间隔 Δ 是相等的，则序列的最大熵谱为

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_{k_0}^2 \Delta}{\left| 1 - \sum_{j=1}^{k_0} b_j^* e^{ijk} \right|^2} \quad (1)$$

$\lambda = 2\pi S \Delta$ ，当采样等间隔且不需与采样间隔不一样的其他序列比较时可取 $\Delta = 1$ ； S 为频率 $(S = \frac{1}{T})$ ； T 为周期长度， i 为虚数。 (1) 式中 $\sigma_{k_0}^2$ 为对应于截止阶 k_0 的预报误差方差，分母为一复数取模后的平方。 b_j^* 为过滤系数，也即自回归模型

$$x_t = b_1^* x_{t-1} + b_2^* x_{t-2} + \dots + b_{k_0}^* x_{t-k_0} + a_t$$

的系数，其递推计算公式^[4,5]为

1980年3月24日收到，8月8日收到修改稿。

$$b_1^2 = 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} / \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} b_{k+1}^{k+1} &= 2 \sum_{i=1}^{n-k-1} \left[\left(x_i - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+j} \right) \left(x_{i+k+1} - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+k+1-j} \right) \right] / \\ &\quad \sum_{i=1}^{n-k-1} \left[\left(x_i - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+j} \right)^2 + \left(x_{i+k+1} - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+k+1-j} \right)^2 \right] \\ &\quad (1 \leq k \leq n-1) \end{aligned} \quad (3)$$

b_j^{k+1} 由自回归系数递推公式

$$b_j^2 = b_1^2 - b_1^2 b_1^2 \quad (4)$$

$$b_j^{k+1} = b_j^2 - b_k^2 b_{k+1-j}^2 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (5)$$

来求。 (2) 、 (3) 、 (4) 、 (5) 组成系数 b_j 的递推公式。

运用赤池最终预报误差 (FPE) 准则来定最优截止阶 k_0 , 即使

$$(FPE)_k = \sigma_k^2 \left[\left(1 + \frac{k}{n} \right) / \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right] \quad (6)$$

达最小来定出 k_0 , 式中

$$\sigma_k^2 = R(0) - \sum_{j=1}^k b_j^2 R(j) \quad (7)$$

其中 $R(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-j} x_i x_{i+j}$, ($j = 0, 1, \dots, k$) 为自相关函数, 其递推公式为

$$R(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (8)$$

$$R(1) = b_1^2 R(0) \quad (9)$$

$$R(k+1) = b_{k+1}^{k+1} \left[R(0) - \sum_{j=1}^k b_j^2 R(j) \right] + \sum_{j=1}^k b_j^2 R(k+1-j) \quad (1 \leq k \leq n-2) \quad (10)$$

在实际计算中, 阶 k 视样本数 n 、要寻找的周期长度 T 、 k_0 值出现位置等来确定, 从 $n/10$ 一直到 $n-1$ 均可。最近的研究^[6]指出, 用

$$(FPE)_k = \sigma_k^2 \left(1 + \frac{\lambda k}{n} \right) \quad (11)$$

的最小值来估计 k_0 要比用 (6) 式更合理。 λ 为适当正数, 一般取 $\lambda = 2 \sim 5$ 。

最大熵谱估计具有分辨率高、峰值偏离小的优点, 这已为许多理论研究和实际计算^[5, 7, 8]所证明。正因为如此, 我们用它来寻找环流指数的周期将得到可靠的结果, 求得蕴含于资料内的实际周期。

我们的目的是寻找数周长度的指循环周期, 因此在计算中采用了 $k = 70$, 实际数值计算表明, k_0 值在 $22 \sim 45$ 之间居多, 极小 $k_0 = 11$, 极大 $k_0 = 67$ 。环流指数有明显的年变程, 冬、夏季的数值相差很大, 为此对资料作如下预处理:

1a. 距平值 $dI_i = I_i - \bar{I}_i$, $i = 1, 2, \dots, 365$

式中 \bar{I}_i 为逐日指数的 22 年均值。

1b. 年际差分值 $\Delta I_i = I_{i+365} - I_i$

2a. 距平-日际差分值 $\Delta dI_i = dI_i - dI_{i-1}$

2b. 年-日际差分值 $\Delta\Delta I_i = \Delta I_i - \Delta I_{i-1}$

dI_i 和 ΔI_i 为去掉年变程的指数值, ΔdI_i 和 $\Delta\Delta I_i$ 则为 dI_i 和 ΔI_i 的日际变化, 即逐日变化速率。我们分别对这四组数据按年进行了熵谱分析 ($n = 365$)。此外, 考虑到最大熵方法能高分辨率地识别短序列的周期, 且为了搞清指数循环的季节差异, 还逐年分别按春夏秋冬作谱分析 ($n = 90 \sim 92$)。所有数据在作谱估计之前都作 5 天滑动平均。

二、环流指数变化的周期

首先我们对逐日环流指数多年均值^[3](1956—1976 年)作熵谱分析, 其结果如图 1 所示。在图 1a 中, 最大谱值位于 32 天, 远大于其他峰值。次大值的周期为 17 天, 但在 21 天和 11 天还有两个峰点。为了显示指数均值谱上最强的 198 天周期, 我们绘了图 1b(图 1a 与 1b 实际上是同一张图, 只是比例尺和所取周期长度的范围不同)。从图上可以看到, 谱值从 43 天开始上升, 直到 198 天达到最高值, 其间没有任何峰谷点出现。198 天的谱值竟达 32 天的 100 倍, 这一周期可能与近年来发现的长期天气振荡的 6 个月周期或接近这一天数的韵律有关。对 1a、1b 的全年资料的谱进行统计, 其结果列在表 1。表中所列天数的范围如 6—12 天、13—19 天……, 是图 1 上谷点到谷点的天数。如 32 天周期的峰点是从 26 天开始上升, 到 32 天达顶峰; 下降到 43 天为谷点, 再逐渐上升, 所以其范围定为 26—43 天。从表 1 可以清楚地看出, 峰值出现在 26—43 天内的次数最多, 13—19

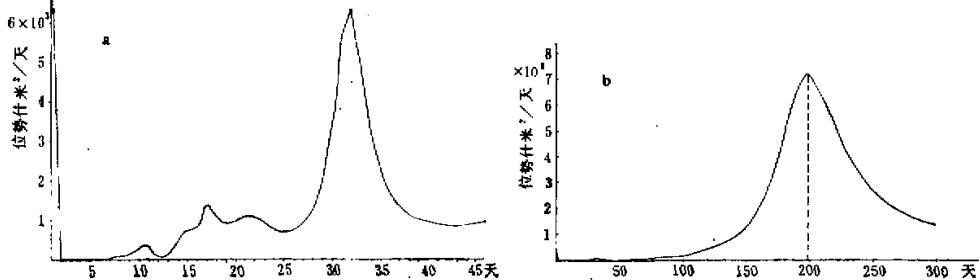


图 1 逐日环流指数多年均值的熵谱
(纵坐标, 谱值; 横坐标, 周期长度, 下同)

天内的次之。这与图 1a 所示的相一致。为了进一步说明问题, 还按等间隔天数进行了统计(表 2), 从总计栏中看到, 最大和次大谱值出现次数之和居多的间隔为 11—15 天、16—20 天、21—25 天、31—35 天。最大谱值主要出现在 21 天以上, 次大谱值主要出现在 25 天以下, 21—25 天是最大与次大谱值出现范围的重迭区。这就是说环流指数的主要周期(最大谱值所在)要长于 3 周, 而次周期(次大谱值所在)要短于 4 周。但主周期的长度是比较分散的, 从 13 天到 67 天都有。图 1 显示的 32 天主周期只是一个平均情况。Namias^[1] 从天气图分析得到的 4—6 周的循环长度相当于我们用熵谱分析所得的主要周期

表1 最大、次大谱值出现次数

		次数 谱值	天	6—12	13—19	20—25	26—43	44—69
距 平	最 大			0	1	3	11	7
	次 大			2	10	3	2	2
	合 计			3	10	6	15	7
年际差分	最 大			0	3	3	7	8
	次 大			3	7	2	2	1
	合 计			3	10	5	9	9
总 计				6	20	11	24	16

表2 等间隔天数的最大、次大谱值出现次数

		次数 谱值	天	6—10	11—15	16—20	21—25	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50	51—55	56—60	61—65	66—70
距 平	最 大			0	1	0	3	1	3	5	2	1	2	2	1	1
	次 大			1	6	5	4	0	2	1	0	0	0	0	0	0
	合 计			1	7	6	7	1	5	6	2	1	2	2	1	1
年际差分	最 大			0	2	1	3	4	2	1	1	4	0	2	1	0
	次 大			0	6	4	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0
	合 计			0	8	5	5	4	4	1	1	4	1	2	1	0
总 计				1	15	11	12	5	9	7	3	5	3	4	2	1

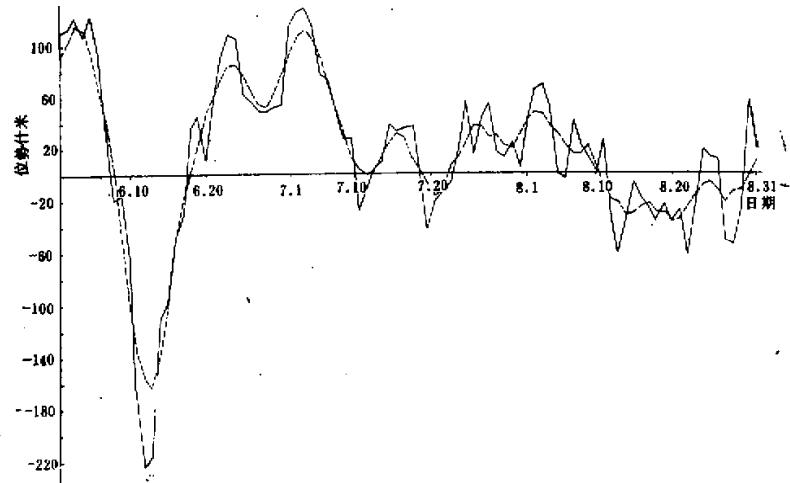


图2 1958年夏季逐日环流指数距平(实线)及5天滑动平均(虚线)

情况(26—43天)。表2中的次周期集中在11—25天的范围内,和表1、图1a所示的相吻合。次周期变化可能是导致单站要素温度、气压具有10—16天周期的背景^[9]。

为了对预处理后的环流指数数值有直观的图象,我们绘出了图2、图3。图2是1958年夏季环流指数逐日距平值曲线及5天滑动平均曲线。从滑动平均曲线上可以分析出峰到峰的日期为6.3—7.3,7.3—8.2,谷到谷的日期为6.13—7.11,7.11—8.14。另外还有峰到峰6.24—7.25和谷到谷7.20—8.20(8.20表示8月20日,余类推)。平均而言为30天周期,这和用熵谱分析所得结果(图4)相一致。由此例也可证实,熵谱估计能准确地分析出周期。图3是年-日际差分逐日值及其5天滑动平均值。日际差分大大削弱了环流指数曲线变化的振幅,峰谷点变得不十分清晰了。要从此图上分析周期就相当困难,但由熵谱分析所得之图5上,两个优势周期(30天、17天)极为清晰地显示出来。由于年际差分值的曲线与距平值的相类似,距平-日际差分值的曲线与年-日际差分值的相类似,这里不再给出。

日际差分值表示了环流的逐日变化速率,它起着高通滤波的作用,它会削弱低频周期,这种理论结果在实际计算中得到证实(表3)。由表明显可见,距平-日际差分的最大谱值出现在40天以上的已不存在,而是集中在11—25天。年-日际差分值的最大谱值没有出现在50天以上的,也集中在11—25天。两者的主周期和次周期最集中的均在11—15天,主周期长度平均为13天。表3中天数范围只列到55天,因为大于55天的周期历史上没有出现过。

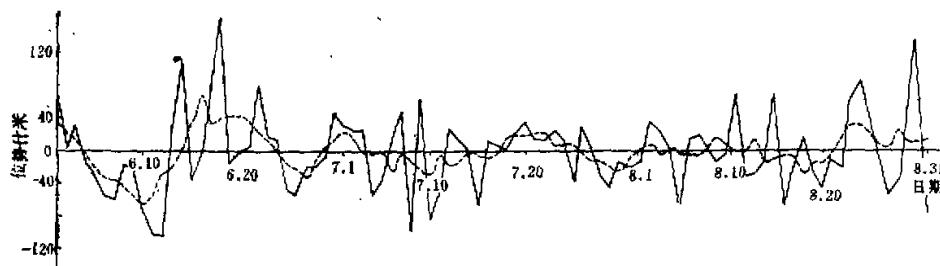


图3 1958年夏季环流指数年-日际差分值(实线)及5天滑动平均(虚线)

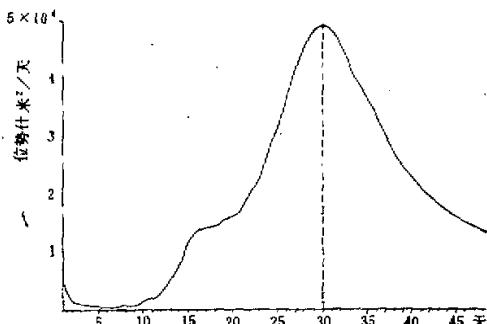


图4 1958年夏季指数距平的熵谱

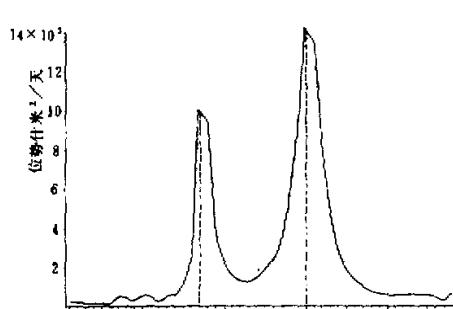


图5 1958年夏季指数年-日际差分值的熵谱

表3 2a、2b资料的最大、次大谱值的出现次数

	天数 谱值	6—10	11—15	16—20	21—25	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50	51—55
距平-日际差分	最大	2	7	5	5	1	1	1	0	0	0
	次大	1	7	1	3	1	1	4	1	1	1
	合计	3	14	6	8	2	2	5	1	1	1
年-日际差分	最大	0	7	6	5	1	1	0	1	1	0
	次大	6	4	2	4	3	1	1	1	0	0
	合计	6	11	8	9	4	2	1	2	1	0
总计		9	25	14	17	6	4	6	3	2	1

三、指数循环的季节特征

对四个季节的指数距平值作熵谱分析的结果列在表4。由于有些年份的谱型是单峰或双峰型，所以次大和第三谱值的出现次数比样本年数少。最大谱值所揭示的主周期长度，平均而言，春冬几乎相等 $\bar{T} \approx 40$ 天，秋季最短。次周期长度四季接近相等，最长（夏）和最短（春）之差仅 2.9 天，而第三周期最长（夏）与最短（冬）之差较大，为 6.6 天。无论春夏秋冬，周期长度的标准差都很大，其中夏季第三周期的标准差竟达周期长度的 63%。这一结果说明了指数循环是一种变率甚大的周期，周期长度在一个宽广的范围内变化着。这

表4 距平值的四季熵谱分析结果的统计

季节	谱值 项目	最大	次大	第三
春	n	22	20	13
	\bar{T}	40.0	20.6	22.6
	σ	16.0	9.5	9.5
夏	n	22	22	15
	\bar{T}	37.6	23.5	23.7
	σ	15.8	13.5	14.9
秋	n	22	20	12
	\bar{T}	34.8	22.6	20.2
	σ	10.0	9.0	14.3
冬	n	21	19	16
	\bar{T}	40.3	21.8	17.1
	σ	13.3	9.4	3.9

n ，出现次数； \bar{T} ，平均周期长度； σ ，标准差。

一点从对年际差分值的四季主周期长度的统计中也可看出（表5）。虽然除冬季外主周期长度集中在 26—43 天的范围内（约占总出现次数的一半），此与全年资料所得之结果（表

1) 相印证; 但总的来说主周期长度散布在从 2 周到 9 周的很大范围内, 尤其是在 44—69 天范围内占着相当大的比重(占 30%)。还需说明, 表 4 所列之主、次周期平均长度似乎比图 1、表 1 所显示的普遍要长, 这是因对离差大的数据作等权算术平均所造成的。

总上所述, 无论从年资料和季资料的熵谱分析结果来看, 都说明指数循环是一种离差很大的可变周期。

表 5 年际差分值的主周期长度

季节	次 数	周期长度 (天)	6—12	13—19	20—25	26—43	44—69
			6—12	13—19	20—25	26—43	44—69
春 季		2	2	3	9	5	
夏 季		0	2	5	12	2	
秋 季		0	2	0	12	7	
冬 季		0	1	1	8	11	
合 计		2	7	9	41	25	

对年际差分值的不同级主周期长度还进行了转移次数统计, 按周期长度即表 5 所列天数范围进行分级: 6—12 天为 1 级, 13—19 天为 2 级, ……44—69 天为 5 级。级别数顺序按春夏秋冬排列, 如 1957 年为 1(春)、2(夏)、4(秋)、5(冬), 1958 年 1、3、4、5, ……。按时间顺序统计同级或不同级转移的次数。同级转移的 28 次, 占 $28/82=34\%$; 差一级的 38 次, 占 46%; 差 2 级的 10 次, 占 12%; 差 3 级的 4 次, 占 5%; 差 4 级的 2 次, 占 3%。这些数字表明, 由短(长)周期接着向长(短)周期转移的可能性是很小的, 尤其是从 6—12 天向 44—69 天的转移(或反之)的可能性极小。这一规律能为运用环流指数作中期预报提供依据。

从上述分 5 级的角度来看, 表 4 所示的三个周期长度的季节差异都不明显。主周期四季都在 4 级, 次周期都在 3 级, 第三周期除冬季在 2 级外, 也均在 3 级。周期长度季节差异不明显这一点也可从距平-日际差分值的主周期上看出。主周期集中在 11—20 天(占 $37/87=43\%$), 四季出现的次数为 11(春)、10(夏)、8(秋)、8(冬), 差别不大。主周期四季的平均长度 \bar{l} 和方差 σ^2 (天)分别为 23.0、10.6(春), 26.6、13.0(夏), 25.5、13.8(秋), 27.1、13.0(冬)。除春季的 \bar{l} 和 σ^2 略小外, 其他三季几乎没有差别。

四、指数循环的长年变化

为了对 1956 至 1977 年间指数循环的演变有一了解, 我们把距平值主周期长度顺年按春夏秋冬绘于图 6, 实线是四季周期长度的连线(FS 线), 虚线是春季之间的连线(SP 线)。从图上可以看到一个有意思的现象, 即 SP 线常常成为 ES 线的包络。按这两条曲线的变化和形态进行分析, 发现指数循环的演变有一定的阶段性, 阶段长度为 5—6 年。第一阶段为在 1961 年夏季之前, 周期长度的四季变化剧烈, SP 线先在 FS 线之上后在其下。第二阶段从 1961 年秋至 1966 年秋, 周期长度的四季变化较小且有渐渐缩短之趋势。第三阶段从 1966 年冬至 1972 年秋, 周期长度普遍加长, 四季周期均在 26 天以上, SP 线

为先在 *FS* 线之上后在其下的包络。第四阶段从 1972 年冬至 1977 年秋，*SP* 线为 *FS* 线之上的包络，*FS* 线的峰谷变得很显著。为了证实这种阶段性，我们还点绘了其他组资料的主周期逐年演变图，这种阶段划分也能作出（图略）。在划好这四个阶段后，把年太阳黑子数点在图上（点划线），发现这四个阶段分别与太阳黑子数的高值期和低值期相对应，5—6 年的长度又却为太阳黑子 11 年周期的一半。因此可以考虑环流指数的长年演变与太阳黑子有一定的联系。因而将年太阳黑子数与年的和春季的主周期长度计算线性相关系数，其相关系数值分别为 -0.103 和 -0.196，远小于 10% 信度水平 ($\rho_{0.10} = 0.360$)。所以，可以考虑指数循环周期的长年变化虽受到太阳的影响，但并非是太阳黑子的线性响应。

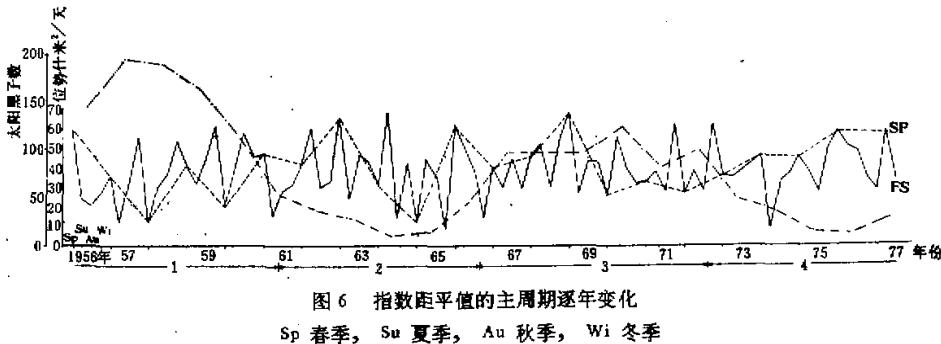


图 6 指数距平值的主周期逐年变化
Sp 春季，Su 夏季，Au 秋季，Wi 冬季

五、结论和讨论

上述讨论可总结如下：

1. 指数循环是大气环流的一种可变周期现象，其长度分布在 2 周至 9 周的宽广范围内，多年均值的主周期长度为 32 天，指数变化速率的主周期长度约为 13 天。
2. 指数循环周期的季节差异并不显著，季节间相近级周期的转移占 80%，而短周期向长周期（或反之）转移的可能性很小。
3. 指数循环有 5—6 年的阶段性变化，可能是对太阳黑子的一种非线性响应。

通常指数循环的定性物理解释是：高指数环流时，南北空气交换小，赤道与极地之间的温度对比加大，导致西风环流进一步增强。西风增强到某极限时发生动力不稳定，这时西风环流破坏，经向发展，转入低指数环流期。南北之间冷暖空气的交换使温度对比减小，这时地球自转的动力强迫作用又使西风环流重建和逐渐加强，恢复到高指数环流，即完成一个指数循环。最近曾庆存^[10]提出了旋转适应的概念，认为低指数环流向高指数环流的转换可以用旋转适应过程来解释，并认为旋转大气过程必须考虑非线性作用。从我们对逐日环流指数的谱分析来看，指数循环周期的变化范围很宽，这种周期的可变性可能正是这种非线性在起着作用。看来，把指数循环视为大气环流对某种天文因素（如太阳）

的线性响应也是不合适的。按照旋转适应理论，低指数环流最终要趋向绕极环流，即是动力作用的必然结果。但如果把绕极西风环流的破坏归因于它的动力不稳定，那末似乎动力理论就可解释指数循环了。显然这样解释是有问题的，因为在长达数周的时间内，大气将接受太阳加热，和下垫面进行交换，不是一个封闭系统，相反需耗散能量才得以维持其有序状态。所以说指数循环的机理尚需进一步研究。不过正如[10]的理论结果和本文的实际事实所告诉我们的，循环过程的非线性作用是必须加以考虑的。

参 考 文 献

- [1] Namias, J., The index cycle and its role in the general circulation. *J. Met.* **7**, 130—139, 1950.
- [2] 李小泉、瞿栋根，亚洲500毫巴月平均环流指数(1939—1962)的谱分析，气象学报，**34**, 127—134, 1964.
- [3] 亚洲地区逐日500毫巴风环流指数，气象科技资料，1978年天气气候分析、中长期天气预报资料附刊，32—43.
- [4] 罗乔林，介绍最大熵谱估计，数学的实践与认识，1980年第1期。
- [5] 曾鸿兴、罗乔林，气象历史序列的最大熵谱分析，科学通报，**24**, 351—355, 1979.
- [6] Bhansali, R. J. and Downham, D. Y., Some properties of the order of an autoregressive model selected by a generalization of Akaike's FPE criterion. *Biometrika* **64**, 547—551, 1977.
- [7] 缪锦海，最大熵谱的优良特性和预报误差过滤系数阶数的确定，气象学报，**37**, 1—9, 1979.
- [8] Smylie, D. E. et al., Methods in computational physics, Vol. 13, New York, Academic Press, 402—419, 1973.
- [9] 中国科学院大气物理研究所二室，春季连续低温阴雨天气的预报方法，科学出版社，38—52, 1977.
- [10] 曾庆存，旋转大气中运动的非线性相互作用和旋转适应过程，中国科学，1979年10期，986—995.

SPECTRAL ANALYSIS OF THE DAILY CIRCULATION INDEX USING MAXIMUM ENTROPY METHOD

Cao Hong-xing Chen Guo-fan

(Academy of Meteorological Science, Central Meteorological Bureau)

Abstract

The maximum entropy method (MEM) is used to analyse the 500 mb daily circulation index over Asia during 1956—1977. It is shown that the periods of daily circulation index usually vary from 2 to 9 weeks, but the dominant period is 4 to 6 weeks. The primary period of normals is 32 days and its subperiod is 17 days. The prevailing period of the rate of index change is among 11—15 days and the mean length of its primary period is 13 days. The seasonal variation of period length is not significant but its long-range variation shows a 5—6 years period.