

用样条 Galerkin 方法近似解 正压原始方程组

张学洪

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

用双三次 B -样条作为基函数,对矩形域上的正压原始方程组构造了一种较高精度的 Galerkin 近似;给出了相应的数值解法,并在 $TQ-6$ 机上得到实现。初步的数值试验表明,计算过程是非常稳定的,对旋转适应过程的模拟是成功的。对一个实例所做的 48 小时预报可与较高分辨率的差分模式相比。

一、引 言

目前在数值天气预报中用得最多的是有限差分方法,它是一种局地近似的方法,即在一个离散点集上逐点用差分算子逼近微分算子,从而求得预报量在各个点上的近似值。

六十年代开始用于数值预报的谱方法是正宗的 Galerkin 方法,它是在球面上的 L_2 空间中用有限球函数展开去逼近天气预报方程的广义解^[1],因此是一种从整体出发的方法。

大体说来,差分方法和谱方法各自的优缺点,总是同它们的局地性和整体性相联系的。

到七十年代,“有限元”方法开始受到数值预报工作者的重视。这不仅因为它对常定问题是卓有成效的,而且因为这里所说的“有限元”方法,实际上是介于差分方法和谱方法之间的一种近似方法,有理由希望用它来达到扬长避短的目的。

非常定问题的“有限元”方法,仍然保留了传统的剖分、插值的做法;由于所用的插值基函数是局地性的,使得近似方程可以看作是差分方程,故有人^[2]称之为“广义差分格式”;最后,要求逼近函数对微分方程的残差在 L_2 意义上同每一插值基函数正交,这正是 Galerkin 方法借以达到其逼近广义解的手段,故又有人称之为“使用局地化基函数的 Galerkin 方法^[3]”。对于这种兼有有限元、差分法和谱方法的特点而又有别于其中任何一个的近似方法,本文将称之为 Galerkin 方法,同时冠以所使用的局地性基函数的名字。

人们常常利用有限元方法在剖分方式上的灵活性去处理不规则格网或嵌套格网的问题^[4,5],这无疑是一个重要的方向。另一方面,对于规则格网而言,由于基函数选择的多样

性,近似解的改善有了更多的途径,“样条有限元”的提出就是一个例子^[6],这个发展方向也是不应当忽略的。

事实上, B -样条就是颇为理想的局地性基函数,可以用来构造具有不同精度和光滑性的 Galerkin 近似;当连续问题适定时,对这种样条 Galerkin 近似不仅可以得到全局性的误差估计,而且可以得到更加精细的节点上的误差估计^[7],这一点,一般谱方法是做不到的。

迄今为止,在数值天气预报中使用的 Galerkin 模式大多以一次 B -样条为基函数(即分片线性插值),这是因为使用二次以上的 B -样条必然要增加程序设计和数值技术的复杂性,计算量也会显著增加,稳定性可能遇到麻烦。但是,如果不想把近似解的改善仅仅局限于格网的加密,那么,对这些问题探讨就是必要的了。

本文选择双三次 B -样条为基函数,对正压原始方程组构造了一种样条 Galerkin 近似,作为了解和解决上述问题,建立较高精度的数值天气预报模型的一个尝试。

二、矩形区域上的双三次 B -样条

1. 三次 B -样条

设 L 是在整个实轴上有定义、在任一有限区间皆 L -可积的函数的全体所组成的线性空间,则在 L 上可定义一个线性算子 $S_h(h > 0)$:

$$\{S_h f\}(x) = \frac{1}{h} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t) dt \quad f \in L$$

称 S_h 为以 h 为宽度的“磨光算子”。

考虑单位方波函数

$$\Omega_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{当 } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{当 } |x| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

显然 $\Omega_0 \in L$ 。注意到 S_h 将 L 映入自身,故我们可定义 $S_1 \Omega_0$, $S_1(S_1 \Omega_0) = S_1^2 \Omega_0$, $S_1(S_1^2 \Omega_0) = S_1^3 \Omega_0 \cdots$, 由此得到一系列函数

$$\Omega_k(x) = \{S_1^k \Omega_0\}(x) \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

称 $\Omega_k(x)$ 为 $\Omega_0(x)$ 的 k 次磨光函数。容易看出, k 愈大, $\Omega_k(x)$ 的光滑性愈高。特别,当 $k = 3$ 时得

$$\Omega_3(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (2+x)^3 & -2 \leq x \leq -1 \\ (2+x)^3 - 4(1+x)^3 & -1 \leq x \leq 0 \\ (2-x)^3 - 4(1-x)^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \quad (1)$$

它在 $(-\infty, \infty)$ 上有直到二阶的连续导数, 以 $[-2, 2]$ 为支集, 在其上是分段三次多项式, 因此是一种特殊的三次样条函数, 称为三次基本样条函数即三次 B -样条 (见图 1).

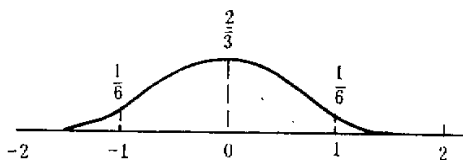


图 1 三次 B -样条 $Q_3(x)$

设 $\{x_0, x_1, \dots, x_I, x_{I+1}\}$ 是 x 轴上的一个等距的点集, 其中 $x_i = x_1 + (i-1)d$ ($i = 0, 1, \dots, I, I+1$), 定义一组函数

$$B_i(x) = Q_3\left(\frac{x - x_i}{d}\right) \quad i = 0, 1, \dots, I, I+1 \quad (2)$$

可以证明, $\{B_i(x)\}_{i=0,1,\dots,I,I+1}$ 是 $[x_1, x_{I+1}]$ 上以 $x_1, x_2, \dots, x_I$ 为节点的三次样条函数所构成的线性空间的一组基, 记为 $\mathcal{B}_x$.

2. 双三次 B -样条

设 $\{x_0, x_1, \dots, x_I, x_{I+1}\}$ 和 $\{y_0, y_1, \dots, y_J, y_{J+1}\}$ 分别是 x 轴和 y 轴上的等距 (同为 d) 点集, 于是可定义两组函数

$$\begin{aligned} \{B_i(x)\}_{i=0,1,\dots,I,I+1} &= \mathcal{B}_x \\ \{B_j(y)\}_{j=0,1,\dots,J,J+1} &= \mathcal{B}_y \end{aligned}$$

取它们的张量积, 记作

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \otimes \mathcal{B}_y = \{B_i(x)B_j(y)\}_{i=0,\dots,I,I+1; j=0,\dots,J,J+1} \quad (3)$$

可以证明, $\mathcal{B}$ 中的 $(I+2) \times (J+2)$ 个函数在矩形 $R: \{x_1 \leq x \leq x_I, y_1 \leq y \leq y_J\}$ 上是线性无关的, 因而能够以它们为基张成一个线性空间

$$S(R) = \left\{ \sum_{i=0}^{I+1} \sum_{j=0}^{J+1} a_{ij} B_i(x) B_j(y) \right\} \quad (a_{ij} \text{ 是实数})$$

可称之为矩形域 R 上的双三次样条函数空间, 显然, $S(R)$ 是 $C^2(R)$ (R 上有直到二阶的连续导数函数的全体所构成的线性空间) 的一个子空间.

还可以证明, 对任意 $f \in C^2(R)$, 存在唯一的 $\tilde{f} \in S(R)$, 满足如下的插值条件

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_i, y_j) &= f(x_i, y_j) \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \quad 1 \leq j \leq J, i = 1, I \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \quad 1 \leq i \leq I, j = 1, J \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \quad i = 1, I, j = 1, J \end{aligned} \quad (4)$$

称 $\tilde{f}$ 为 f 的双三次样条插值函数, 我们有

$$\|f - \tilde{f}\| \leq c_0 d^4$$

$$\|D^{[1]}f - D^{[1]}\tilde{f}\| \leq c_1 d^3$$

$$\|D^{[2]}f - D^{[2]}\tilde{f}\| \leq c_2 d^2$$

其中 $\|F\|$, $\|F^{[1]}\|$ 和 $\|F^{[2]}\|$ 分别表示 F 及其一、二阶偏导数的 Chebyshev 范数 (F 代表 $f - \tilde{f}$), c_0 , c_1 和 c_2 是只与 f 及其偏导数有关的常数.

上述误差估计表明, $\tilde{f}(x, y)$ 以很高的精度一致逼近 $f(x, y)$. 因此, 在本文所述的 Galerkin 方法中, 我们取 $\mathcal{B}$ 为基底, 通过双三次样条插值将 $c^2(R)$ 映入 $S(R)$, 希望由此获得较好的近似解.

除此以外, 在插值函数类中, 三次样条函数还具有最佳的整体光滑性质, 这对于气象场的描写也是非常有利的.

三、正压原始方程组的样条 Galerkin 近似

在极射赤面投影下的直角坐标中, 正压大气原始方程组可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + mu \frac{\partial u}{\partial x} + mv \frac{\partial u}{\partial y} + m \frac{\partial \phi}{\partial x} - f^* v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + mu \frac{\partial v}{\partial x} + mv \frac{\partial v}{\partial y} + m \frac{\partial \phi}{\partial y} + f^* u = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + mv \frac{\partial \phi}{\partial y} + m \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \phi \left(u \frac{\partial m}{\partial x} + v \frac{\partial m}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$f^* = f + \left(u \frac{\partial m}{\partial y} - v \frac{\partial m}{\partial x} \right)$$

今在以北极点为中心的矩形区域 $R: \{a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$ 上求解 (5), 为简单起见, 暂取地转风初值, 并要求预报量的边界值不随时间改变 (简称“固定边值”).

对 R 作正方形剖分, 得到一个二维点集 $\{(x_i, y_j)\}_{i=1,2,\dots,l; j=1,2,\dots,j}$, 其中

$$\begin{cases} x_i = a_1 + (i-1)d & i = 1, 2, \dots, l \\ y_j = a_2 + (j-1)d & j = 1, 2, \dots, j \end{cases} \quad (6)$$

而

$$d = \frac{b_1 - a_1}{l-1} = \frac{b_2 - a_2}{j-1}$$

在 (6) 式中取 $i = 0, 1, \dots, l, l+1, j = 0, 1, \dots, j, j+1$, 得到一个扩大的二维点集 $\{(x_i, y_j)\}$, 依 (3) 式可构造一组双三次 B-样条 $\mathcal{B} \equiv \{B_i(x)B_j(y)\}$. 对任一 $f \in c^2(R)$, 存在唯一的 $\tilde{f}$ 满足 (4) 式且可表为

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{i=0}^{l+1} \sum_{j=0}^{j+1} F_{ij} B_i(x) B_j(y) \quad (7)$$

应当指出, 和一般的 Hermite 插值不同, 这里的 F_{ij} 不是 $f(x, y)$ 在节点上的函数值或导数值, 而是 $f(x, y)$ 的双三次样条插值函数关于基底 $\mathcal{B}$ 的展开系数, 因此 (7) 式亦可称为 f 关于 $\mathcal{B}$ 的插值展开式.

由(7)、(4)式并利用(2)式可得

$$f_{ij} = \frac{1}{36} [16 F_{ij} + 4(F_{i+1j} + F_{i-1j} + F_{ij+1} + F_{ij-1}) \\ + (F_{i+1j+1} + F_{i-1j+1} + F_{i-1j-1} + F_{i+1j-1})] \\ i = 1, 2, \dots, I \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (8)$$

这就是由展开系数反求格点值的计算公式.

设(5)式的近似解形如(7)式, 即有

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x, y) &= \sum_{i=0}^{I+1} \sum_{j=0}^{J+1} U_{ij}(t) B_i(x) B_j(y) \\ \tilde{v}(t, x, y) &= \sum_{i=0}^{I+1} \sum_{j=0}^{J+1} V_{ij}(t) B_i(x) B_j(y) \\ \tilde{\phi}(t, x, y) &= \sum_{i=0}^{I+1} \sum_{j=0}^{J+1} \Phi_{ij}(t) B_i(x) B_j(y) \end{aligned} \quad (9)$$

将(9)式代入(5)式的左端, 得到残差函数

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_u &\equiv \sum_i \sum_j \frac{dU_{ij}}{dt} B_i(x) B_j(y) + m(x, y) \left[\sum_i \sum_j U_{ij} B_i(x) B_j(y) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_i \sum_j U_{ij} B'_i(x) B_j(y) \right] + m(x, y) \left[\sum_i \sum_j V_{ij} B_i(x) B_j(y) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_i \sum_j U_{ij} B_i(x) B'_j(y) \right] + m(x, y) \sum_i \sum_j \Phi_{ij} B'_i(x) B_j(y) \\ &\quad - f^*(x, y) \sum_i \sum_j V_{ij} B_i(x) B_j(y) \\ \delta_v &\equiv \sum_i \sum_j \frac{dV_{ij}}{dt} B_i(x) B_j(y) + m(x, y) \left[\sum_i \sum_j U_{ij} B_i(x) B_j(y) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_i \sum_j V_{ij} B'_i(x) B_j(y) \right] + m(x, y) \left[\sum_i \sum_j V_{ij} B_i(x) B_j(y) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_i \sum_j V_{ij} B_i(x) B'_j(y) \right] + m(x, y) \sum_i \sum_j \Phi_{ij} B_i(x) B'_j(y) \\ &\quad + f^*(x, y) \sum_i \sum_j U_{ij} B_i(x) \cdot B_j(y) \\ \delta_\phi &\equiv \sum_i \sum_j \frac{d\Phi_{ij}}{dt} B_i(x) B_j(y) + m(x, y) \left[\sum_i \sum_j U_{ij} B_i(x) B_j(y) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_i \sum_j \Phi_{ij} B'_i(x) B_j(y) \right] + m(x, y) \left[\sum_i \sum_j V_{ij} B_i(x) B_j(y) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_i \sum_j \Phi_{ij} B_i(x) B'_j(y) \right] + m(x, y) \left[\sum_i \sum_j \Phi_{ij} B_i(x) B_j(y) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_i \sum_j (U_{ij} B'_i(x) B_j(y) + V_{ij} B_i(x) B'_j(y)) \right] \\ &\quad - \left[\tilde{u} \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial m}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (10)$$

由于 $S(R)$ 只是 $C^2(R)$ 的一个有限维子空间, 故一般不能要求 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi}$ 满足(5)式,

因而 $\delta_u, \delta_v, \delta_\phi$ 一般不为 0, 但可以要求它们对某一族检验函数在 L^2 意义下的投影为 0, 从而得到满足近似解的近似方程.

注意到 $\mathcal{B}$ 中每一元素 $B_r(x)B_s(y)$ 都是 $C^2(R)$ 中具有局地紧支集的非负函数, 而且它们的个数就是 $S(R)$ 的维数, 故 $\mathcal{B}$ 是颇为理想的检验函数族, 于是我们得到

$$\begin{cases} \int_R \delta_u(t, x, y) B_r(x) B_s(y) dx dy = 0 \\ \int_R \delta_v(t, x, y) B_r(x) B_s(y) dx dy = 0 \\ \int_R \delta_\phi(t, x, y) B_r(x) B_s(y) dx dy = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(r = 0, 1, \dots, I, I+1; s = 0, 1, \dots, J, J+1)$$

记

$$\begin{cases} T_{ij}^{(rs)} \equiv \int_R B_i(x) B_r(x) B_j(y) B_s(y) dx dy \\ G_{ij}^{(rs)} \equiv \int_R B'_i(x) B_r(x) B_j(y) B_s(y) dx dy \\ A_{ij,kl}^{(rs)} \equiv \int_R B_i(x) B'_k(x) B_r(x) B_j(y) B_l(y) B_s(y) dx dy \end{cases} \quad (12)$$

计算(11)式左端的积分, 就得到 $\{U, V, \Phi\}$ 所满足的常微分方程组

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j T_{ij}^{(rs)} \frac{dU_{ij}}{dt} = -\frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_k \sum_j \sum_l A_{ij,kl}^{(rs)} U_{ij} U_{kl} \\ \quad - \frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_k \sum_j \sum_l A_{ij,kl}^{(rs)} V_{ij} U_{kl} \\ \quad - \frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_j G_{ij}^{(rs)} \Phi_{ij} + f_{rs}^* \sum_i \sum_j T_{ij}^{(rs)} V_{ij} \\ \sum_i \sum_j T_{ij}^{(rs)} \frac{dV_{ij}}{dt} = -\frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_k \sum_j \sum_l A_{ij,kl}^{(rs)} U_{ij} V_{kl} \\ \quad - \frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_k \sum_j \sum_l A_{ij,kl}^{(rs)} V_{ij} V_{kl} \\ \quad - \frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_j G_{ij}^{(rs)} \Phi_{ij} - f_{rs}^* \sum_i \sum_j T_{ij}^{(rs)} U_{ij} \\ \sum_i \sum_j T_{ij}^{(rs)} \frac{d\Phi_{ij}}{dt} = -\frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_k \sum_j \sum_l A_{ij,kl}^{(rs)} (U_{ij} \Phi_{kl} + \Phi_{ij} U_{kl}) \\ \quad - \frac{m_{rs}}{d} \sum_i \sum_k \sum_j \sum_l A_{ij,kl}^{(rs)} (V_{ij} \Phi_{kl} + \Phi_{ij} V_{kl}) \\ \quad + \left[\tilde{\phi} \left(\tilde{u} \frac{\partial m}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial m}{\partial y} \right) \right]_{rs} \end{cases} \quad (13)$$

$$(r = 0, 1, \dots, I+1; s = 0, 1, \dots, J+1)$$

其中 $\sum_i = \sum_{i=r-3}^{r+3}$, $\sum_k = \sum_{k=r-3}^{r+3}$, $\sum_j = \sum_{j=s-3}^{s+3}$, $\sum_l = \sum_{l=s-3}^{s+3}$, 此处用到了 $B_r(x)B_s(y)$

的支集 $R(r, s)$ 的局地性(图 2), 并在 $R(r, s)$ 上取

$$\begin{aligned} m &\cong m(x_r, y_s) \equiv m_{rs} \\ f^* &\cong f^*(x_r, y_s) \equiv f_{rs}^* \\ \tilde{\phi} \left(\tilde{u} \frac{\partial m}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial m}{\partial y} \right) &\cong \left[\tilde{\phi} \left(\tilde{u} \frac{\partial m}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial m}{\partial y} \right) \right] (x_r, y_s) \\ &\equiv \left[\tilde{\phi} \left(\tilde{u} \frac{\partial m}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial m}{\partial y} \right) \right]_{r,s} \end{aligned}$$

(13)式的初始值 $\{U^0, V^0, \phi^0\}$ 可由 u^0, v^0, ϕ^0 对 $\mathcal{B}$ 作插值展开来求得.

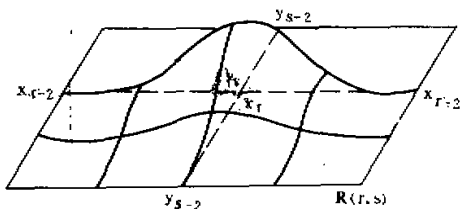


图 2 $B_r(x)B_s(y)$ 及其支集 $R(x, y)$

至此, 我们已经用样条 Galerkin 近似把正压原始方程组(5)在 R 上的初、边值问题化为常微分方程组(13)的初值问题, 由它的解 $\{U, V, \phi\}$ 按(9)式构成的函数 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi}$ 就是原问题的近似解.

四、数值方法

1. 双三次 B-样条插值展开

已知 $f(x, y)$ 在 R 上的格点值、边界上的法向导数值及角点上的混合导数值, 求 $\{F_{ij}\}$, 使得按(7)式构成的 $\tilde{f}(x, y)$ 满足插值条件(4). 记

$$F^{(j)} = (F_{0j}, F_{1j}, \dots, F_{I+1j})^T \quad j = 0, 1, \dots, J+1$$

$$B^{(j)} = (12f_x|_{1j}, 36f_{1j}, \dots, 36f_{3j}, 12f_x|_{4j})^T \quad j = 1, \dots, J$$

$$B^{(0)} = (4f_{xy}|_{11}, 12f_y|_{11}, \dots, 12f_y|_{1J}, 4f_{xy}|_{1J})^T$$

$$B^{(J+1)} = (4f_{xy}|_{4J}, 12f_y|_{4J}, \dots, 12f_y|_{4J}, 4f_{xy}|_{4J})^T$$

$$F = \begin{pmatrix} F^{(0)} \\ F^{(1)} \\ \vdots \\ F^{(J+1)} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B^{(0)} \\ B^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(J+1)} \end{pmatrix}$$

则问题归结为求解线代数方程组

$$\mathcal{A}F = B \quad (14)$$

其中 $\mathcal{A}$ 是 $J+2$ 阶的准三对角块矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -W & 0 & W & & & \\ & W & 4W & W & & \\ & & W & 4W & W & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & W & 4W & W \\ & & & & -W & 0 & W \end{pmatrix} \quad (15)$$

W 是 $l+2$ 阶准三对角矩阵

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

注意到 $\mathcal{A} = W \times W$, 即将 W 的诸元素同乘 W 所得的块矩阵就是 $\mathcal{A}$ (“ $\times$ ”是表示矩阵直积的符号), 很容易由 W 的 Crout 分解得到求解 (14) 的块追赶公式

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 0 & G^{(0)} = -W^{-1}B^{(0)} \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2} & G^{(1)} = \frac{1}{4}(W^{-1}B^{(1)} - G^{(0)}) \\ \varepsilon_j = \frac{1}{4 - \varepsilon_{j-1}} & G^{(j)} = \varepsilon_j(W^{-1}B^{(j)} - G^{(j-1)}) \\ & (j = 2, 3, \dots, J) \\ G^{(J+1)} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{J-1}\varepsilon_J}(W^{-1}B^{(J+1)} - \varepsilon_{J-1}G^{(J)} + G^{(J-1)}) \\ \begin{cases} F^{(j+1)} = G^{(j+1)} \\ F^{(j)} = G^{(j)} - \varepsilon_j G^{(j+1)} \end{cases} & (j = J, J-1, \dots, 1) \\ F^{(0)} = G^{(0)} + F^{(2)} \end{cases} \quad (17)$$

其中 $W^{-1}B^{(j)}$ 仍可用追赶法求出, 而且只要将 (17) 式中之 W 、 j 、 J 、 $B^{(j)}$ 、 $G^{(j)}$ 和 $F^{(j)}$ 分别换成 1 、 i 、 l 、 B_{ij} 、 G_{ij} 和 $(W^{-1}B^{(j)})_i$, 就得到计算 $W^{-1}B^{(j)}$ 的追赶公式.

容易证明, 上述追赶过程是稳定的.

2. $\frac{dF_{ij}}{dt}$ 的求解

为了从 (13) 式的右端求得 $\frac{dF_{ij}}{dt}$ ($F = U, V, \Phi$), 须求解线代数方程组 (记 $X = (\frac{dF_{ij}}{dt}, j=0, 1, \dots, l+1; i=0, 1, \dots, l+1)^T$)

$$TX = B \quad (18)$$

其中 B 代表由 (13) 式中每一式的右端项所组成的列向量, T 是一个 $(J+2) \times (l+2)$

阶方阵。当结点按本节 1 中所述的顺序排列时, T 是一个 $(J+2)$ 阶的七对角块矩阵, 而其中每一块又是一个 $(I+2)$ 阶的七对角矩阵。不仅如此, 若记

$$\begin{cases} T_x = \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} B_i(x) B_r(x) dx, i, r = 0, 1, \dots, I+1 \right) \\ T_y = \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} B_i(y) B_s(y) dy, i, s = 0, 1, \dots, J+1 \right) \end{cases} \quad (19)$$

则它们分别是 $(I+2)$ 和 $(J+2)$ 阶七对角方阵, 并且有

$$T = T_y \times T_x \quad (20)$$

即 T 是 T_x 和 T_y 的直积 (T_y 的诸元素同乘 T_x 所得的块矩阵)。

对 T_y 作 Crout 分解

$$T_y = L_y U_y \quad (21)$$

其中 L_y 是下三角阵, U_y 是对角元为 1 的上三角阵。由 (20) 式立即得到 T 的块三角分解

$$T = L U \quad (22)$$

其中

$$\begin{cases} L = L_y \times T_x \\ U = U_y \times E \end{cases} \quad (23)$$

(E 是 $(I+2)$ 阶单位矩阵)。于是 (18) 式可化为

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases} \quad (24)$$

其中实际要求解的方程组只是

$$l_{ij} T_x Y^{(j)} = B^{(i)} \quad j = 0, 1, \dots, J+1 \quad (25)$$

(l_{ij} 是 L_y 的对角线元素, $B^{(i)}$ 是 $Y^{(0)}, Y^{(1)}, \dots, Y^{(j-1)}$ 的线性组合), 这又可以通过 T_x 的 Crout 分解来实现。

总之, (18) 式求解过程的主要工作量是对 T_y 和 T_x 作三角分解, 这可以在预报开始之前一次完成并存储起来。由于 T_y 和 T_x 只是 $(J+2)$ 和 $(I+2)$ 阶的七对角矩阵, 所以这种做法所占用的内存也很有限。

3. 时间积分

和差分方法类似, 常微分方程组 (13) 的右端也包含着在时间尺度上差别很大的两部分: 平流项是对应于演变过程的, 其特征时间尺度为几天; 地转偏差和散度项是对应于适应过程的, 其特征时间尺度仅为数小时。因此, 为节省计算量起见, 采用文献 [8] 中建议的分解算法是合适的。对于样条-Galerkin 模式而言, 由于平流项的计算量特别大 (完整的平流项计算公式大约包括 1000 项, 这里我们截取了 200 项), 所以尤其有必要使用分解算法。

作为试验, 本文采用了如下的时间积分方案: 适应过程用 Euler 后差积分, 时间步长取 10 分钟, 演变过程用前差预估——梯形公式校正, 时间步长取 30 分钟 (格距 d 取为 540 公里)。这样, 对于 32×32 的正方形区域, 在 TQ-6 机上积分一天大约需要 100 分钟。计算过程是非常稳定的, 不过同不分解的算法相比, 能量衰减得比较多。

同差分方法相比,上述时间积分方案的计算量仍嫌太大。对于提高模式的有效性来说,这可能是需要进一步解决的一个主要问题。

五、数值试验和实例试报

为了检查本模式的计算稳定性和考察它模拟大尺度动力过程的能力,本文利用文献[8]中给出的四波旋转适应过程的初始场进行数值试验,积分了七天。

结果表明,尽管本模式的截断误差和四阶差分模式相当,而且在积分过程中除对边界内两圈的倾向进行光滑以保证场的连续性以外,没有采取其它光滑手段,然而整个计算过程是极其稳定的。图3给出了总动能和总位能随时间变化的曲线。七天内,总动能的变化不超过10%,总位能的变化不超过1%,即使在积分开始的几小时内风压场不够协调的阶段,也没有出现很大的能量起伏。

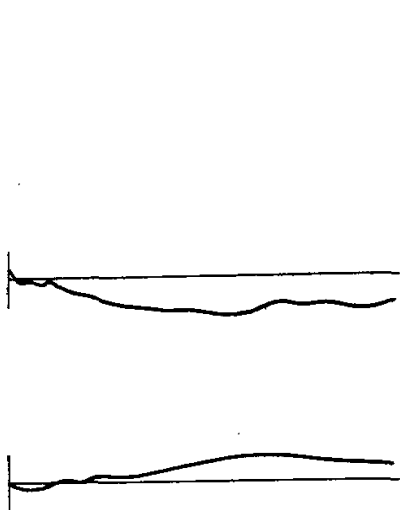


图3 总动能(上)和总位能(下)七天的变化

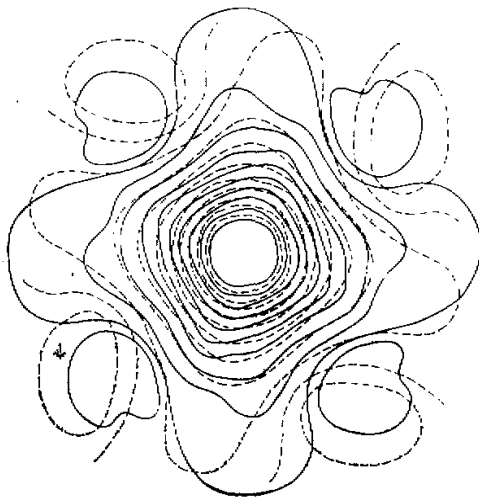


图4 四波旋转适应过程积分到第七天的 ϕ 场(虚线是[8]中给出的结果)

图4是积分到第七天的 ϕ 场(虚线是[8]中用格距为300km的差分模式计算结果)。可以看出,尽管本模式是低分辨率的(格距为540km),但同样成功地模拟出了行星波西移和向“绕极涡旋”演变的旋转适应过程。同[8]所给出的结果相比,直到第七天,在中高纬区域两者仍很相似,但在靠近边界的低纬地区两者差别较大。

应当说明,[8]中采用了刚性边界条件,而本模式则用了“固定”边值,这可能是造成上述差别的主要原因。从积分一天后的 ϕ 场(见图5)可以看出,由于受边界影响较小,两种模式的积分结果在整个区域上都很一致。在图5中还可以清楚地看到有利于扰动能量被带状环流吸收的流场形势:槽线呈顺转的螺旋形状。但到七天后,由于边界影响,本模式未能保持这一特点。可见,对长时期积分而言,刚性边界较佳,而固定边界是不可取

的.

为了检验本模式的实际预报能力, 我们选择 1977 年 3 月 17—19 日一次由于西伯利亚低涡转动, 使其西部的横槽发展为竖槽, 造成我国西部寒潮爆发的过程, 进行了实例试报. 图 6—8 分别是本模式和[9]中的模式(格距为 300 公里)所做的 48 小时预报结果以

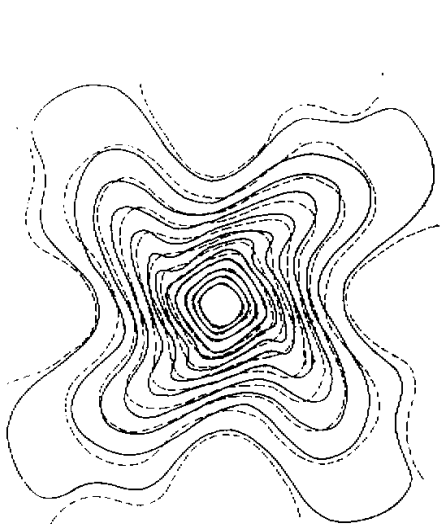


图 5 四波旋转适应过程积分一天后的 ϕ 场(虚线是[8]中给出的结果)

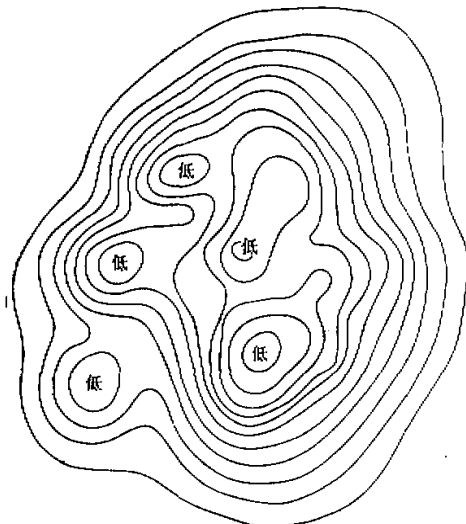


图 6 1977 年 3 月 19 日 12 时 500 毫巴 ϕ 场
(本模式做出的 48 小时预告)

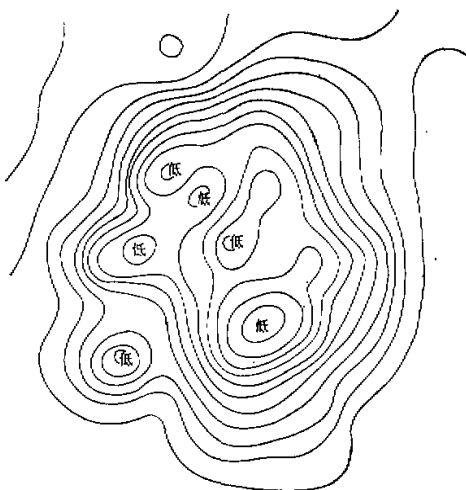


图 7 1977 年 3 月 19 日 12 时 500 毫巴 ϕ 场
([9]中给出的 48 小时预告)

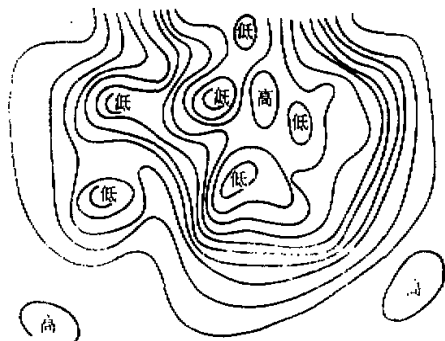


图 8 1977 年 3 月 19 日 12 时 500 毫巴 ϕ 场(实况)

及相应的实况。由图可以看出,本模式与[9]的模式给出了同样成功的预报。

本文是在曾庆存同志指导下完成的;写作过程中,先后得到袁重光、李鸿洲同志的许多帮助,谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存,《数值天气预报的数学物理基础》第一卷(五、十二章),科学出版社,1979.
- [2] Swartz B. & Wendroff B., *Mathematics of Computation*, **23**, 37—49, (1969).
- [3] Wang, H-H Halpern, P. Douglas J. & Dupont, T. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 738—746, (1972).
- [4] 孙敬猷、王申林、沈长泗、陈士杰,科学通报,第22卷,263—266, 1977.
- [5] Staniforth N. & Daley, W. *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 107—121, (1979).
- [6] 石钟慈,计算数学,第一卷,50—72, 1979.
- [7] Thomée V. «The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application to Partial Differential Equations», 711—746, Academic Press, New York, 1972.
- [8] 曾庆存、袁重光、李荣凤,中国科学,687—695, 1980.
- [9] 曾庆存、袁重光,科学通报,第25卷,842—845, 1980.

AN APPROXIMATION TO THE BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATIONS BY SPLINE-GALERKIN METHOD

Zhang Xue-hong

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

A relatively exact Galerkin approximation, in which the bicubic B-splines are used as base functions, to the barotropic primitive equations in a rectangular domain has been formulated. The corresponding numerical techniques have been developed, and the entire procedure has been performed on the computer TQ-6.

The preliminary experiments show that the computation is very stable and the simulation to the rotational adaption process is successful. A 48-hour forecast obtained by this method with actual data is comparable to the results given by a finite-difference model with a higher resolution.