

近共振热力强迫作用下多重平衡态 的激发、建立和转换(一)

——多重平衡态的渐近解

秦建春 朱抱真

(国家海洋环境预报研究中心) (中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文通过一个含有近共振热力强迫和耗散、基本流有常数切变的二层准地转 β -平面纬向周期性窄通道斜压模式,运用多尺度方法导出一投影在 $T-X$ 时空平面的、包含强迫波-自由波-自由波非线性相互作用的、关于定常热强迫波上扰动的偏微分方程组。借助奇异摄动法解析地求得了此方程组的平衡态渐近解。结果得到,在很大的参数范围内都可存在多重平衡态。

一、引 言

自 Charney 等^[1]提出用多重平衡态理论解释北半球中高纬大气环流(如阻塞形势等)异常流型的思想后,大气非线性强迫共振动力学研究取得很大进展,许多理论工作和观测事实都证实:对象阻塞那样的异常环流研究,任何不包含流体运动的非线性和近共振外强迫的动力机制都是不完全的^[2,3]。

对于地形或地形加热源强迫下的大气非线性响应问题,国内外许多学者都作了深入研究^[4-9]。本文将借助多尺度方法,简化一个由纯热力强迫的两层斜压模式;使用奇异摄动法寻求模式中多重平衡态的渐近解。

本文是我们研究近共振热力强迫作用下多重平衡态激发、建立和转换问题的第一部分。

二、模 式

1. 二层斜压模式的简化

在纬向不均匀热力强迫下,大气顶和底部有 Ekman 摩擦的二层准地转斜压模式可写为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_1 + J(\psi_1, \nabla^2 \psi_1 + \beta y) = f_0 \Delta p^{-1} \omega - k_s \nabla^2 \psi_1 \quad (2.1)$$

1984年10月10日收到,1985年5月9日收到修改稿。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi_2 + J(\Psi_2, \nabla^2 \Psi_2 + \beta y) = -f_0 \Delta p^{-1} \omega - k_d \nabla^2 \Psi_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1 - \Psi_2) + J\left(\frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2}, \Psi_1 - \Psi_2\right) - \lambda^2 f_0 \Delta p^{-1} \omega = CQ \quad (2.3)$$

其中 $\lambda^2 = \sigma \Delta p^2 / f_0$ 为内 Rossby 变形半径的平方; $\sigma = -\frac{1}{\rho \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p}$ 为静力稳定度参数, 设为常数; f_0 为中纬度科氏参数; $\beta = \frac{df}{dy}$; $\Psi_{1,2}$ 分别为 250 hPa 和 750 hPa 上的流函数; ω 为 500 hPa 上垂直速度 $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{500}$; k_d 所乘的项为 Ekman 层内由摩擦辐合所造成的涡管伸缩; $C = \Delta p / \rho_2 T_2 f_0 c_p$ 为常数; Q 为外热力强迫, 仅是 (x, y) 的函数; $\Delta p = 500$ hPa; ρ_2 、 T_2 分别为 750 hPa 上的常数密度和温度。

在 (2.1)–(2.3) 式中设:

$$\begin{cases} \Psi_n = -U_n y + \phi_n & (n = 1, 2) \\ U_1 = U \text{ (常数)} & U_2 \equiv 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

并消去 ω 有:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) [\nabla^2 \phi_1 - \lambda^{-2} (\phi_1 - \phi_2)] + J(\phi_1, \nabla^2 \phi_1 + \lambda^{-2} \phi_2) \\ & + (\beta + U \lambda^{-2}) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\lambda^{-2} CQ - k_d \nabla^2 \phi_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\nabla^2 \phi_2 + \lambda^{-2} (\phi_1 - \phi_2)] + J(\phi_2, \nabla^2 \phi_2 + \lambda^{-2} \phi_1) \\ & + (\beta - U \lambda^{-2}) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \lambda^{-2} CQ - k_d \nabla^2 \phi_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

为对 (2.5)–(2.6) 式无量纲化, 设:

$$x = L_x x', \quad y = L_y y', \quad U = U u', \quad t = \frac{L_x}{U} t',$$

$$\phi_n = \Phi \phi'_n (n = 1, 2), \quad Q = \Theta Q'.$$

其中 L_x 、 L_y 、 U 、 Φ 、 Θ 均为各相应量的特征尺度。考虑超长波一类的纬向尺度远大于经向尺度的准地转运动, 设:

$$L_x \approx 10^7; \quad L_y \approx 10^6; \quad \lambda^2 \approx 10^{11-12}; \quad L_y/L_x \approx \delta (\ll 1); \quad \Phi/UL_y \approx 0(\delta) \approx \delta;$$

$$\beta L_y^2/U \approx 0(1) \approx \tilde{\beta}, \quad \lambda^{-2} L_y^2 \approx 0(\delta) \approx \delta E; \quad CL_y^2 \lambda^{-2} \cdot L_x \Theta / U \Phi \approx 0(1) \approx 1;$$

$$L_x k_d / U \delta^2 \approx 0(1) = r; \quad E \text{ 为常数, } 0(E) = 1.$$

又设波动场与外强迫处于近共振态, 位相几乎驻定, 而波振幅缓变, 故可引入“慢时间” $\tau' \equiv \delta t'$ 和 $T' \equiv \delta^2 t'^{(a)}$ 。这里 t' 为无量纲“快变”时间 (尺度)。将这些代入 (2.5)–(2.6) 式, 并略去“ $''$ ”, 则得无量纲形式:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \delta \frac{\partial}{\partial \tau} + \delta^2 \frac{\partial}{\partial T} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_1 - \delta E (\phi_1 - \phi_2) \right] \\ & + \delta J \left[\phi_1, \left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_1 + \delta E \phi_1 \right] \end{aligned}$$

$$+ (\tilde{\beta} + \delta EU) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -Q - \delta^2 r \left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_1 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \delta \frac{\partial}{\partial r} + \delta^2 \frac{\partial}{\partial T} \right) \left[\left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_2 + \delta E (\phi_1 - \phi_2) \right] \\ & + \delta J \left[\phi_2, \left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_2 + \delta E \phi_1 \right] \\ & + (\tilde{\beta} - \delta EU) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = Q - \delta^2 r \left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_2 \quad (2.8) \end{aligned}$$

(2.7)–(2.8) 式构成一个包含通过无量纲化而引入的小参数 δ 的控制 $\phi_{1,2}$ 的封闭系统。以下研究在“窄通道” $|y| \leq \frac{\pi}{2k}$ ($k^2 = \tilde{\beta}/U$) 内, 系统 (2.7)–(2.8) 所确定的运动。并假设:

$$\begin{cases} \text{i) } \phi_{1,2} \text{ 沿 } x \text{ 以 } 2\pi \text{ 为周期变化;} \\ \text{ii) } \phi_{1,2} \text{ 满足刚壁条件, } \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \Big|_{y=\pm\pi/2k} = 0 \quad (n=1, 2) \end{cases} \quad (2.9)$$

2. 非线性问题构造

先考虑慢时间(尺度) T 内的问题 (2.7)–(2.9), 此时诸量均可看成仅是 (x, y, T) 的函数^[6]。并设:

$$U_1 - U_2 = U < \tilde{\beta}/\delta E$$

可以证明在本文的模式中普通斜压不稳的最小临界切变即为 $\tilde{\beta}/\delta E$ 。设理想化热力强迫函数为:

$$Q = Q_0 \cos l_0 x \cos k_0 y \quad (2.10)$$

其中 $l_0 = 1, 2, \dots$; $k_0 = (2m+1)k$, $m = 0, 1, 2, \dots$; $k^2 = \tilde{\beta}/U$ 。将 (2.10) 式代入 (2.7)–(2.8) 式, 可求得定常线性热强迫波:

$$\begin{cases} X_n(x, y) = Q_n \sin l_0 x \cos k_0 y \quad (n=1, 2) \\ Q_1 = Q_0/l_0 U (k_0^2 - k^2), \quad Q_2 = Q_0/l_0 \tilde{\beta} \end{cases} \quad (2.11)$$

在 (2.11) 式中已取 $k_0 \approx k$ ($m \approx 0$), 以排除线性共振点。

为考虑强迫波与自由波的相互作用以及热力强迫激发多平衡态的过程, 设:

$$\psi_n = -U_n y + \phi_n = -U_n y + X_n(x, y) + \phi_n(x, y, T), \quad n=1, 2 \quad (2.12)$$

代入 (2.7)–(2.8) 式, 注意到 $\frac{\partial}{\partial t} + \delta \frac{\partial}{\partial r} \equiv 0$, 得关于 ϕ_n 的方程:

$$\begin{aligned} & \left(\delta^2 \frac{\partial}{\partial T} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (X_1 + \phi_1) - \delta E (X_1 - X_2 + \phi_1 - \phi_2) \right] \\ & + \delta J \left[X_1 + \phi_1, \left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (X_1 + \phi_1) + \delta E (X_1 + \phi_1) \right] \\ & + (\tilde{\beta} + \delta EU) \frac{\partial}{\partial x} (X_1 + \phi_1) = -Q - \delta^2 r \\ & \cdot \left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (X_1 + \phi_1) \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (X_2 + \phi_2) + \delta E (X_1 - X_2 + \phi_1 - \phi_2) \right] \\
& + \delta J \left[X_1 + \phi_1, \left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (X_2 + \phi_2) + \delta E (X_1 + \phi_1) \right] \\
& + (\tilde{\beta} - \delta EU) \frac{\partial}{\partial x} (X_2 + \phi_2) = Q - \delta^2 r \\
& \cdot \left(\delta^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (X_2 + \phi_2)
\end{aligned} \quad (2.14)$$

选取 $\{\delta^i | i = 0, 1, 2, \dots\}$ 为小参数序列;则可设:

$$\phi_n(x, y, T) = \phi_n^{(0)} + \delta \phi_n^{(1)} + \delta^2 \phi_n^{(2)} + \dots \quad (n = 1, 2) \quad (2.15)$$

代入 (2.13) 和 (2.14) 式, 分出关于 δ 的各次幂阶问题:

1) $O(1)$ 阶问题

$$\begin{cases} \left(U \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{\beta} \right) \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial x} = 0 \\ \tilde{\beta} \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

解 (2.16) 式, 并利用 (2.9) 式, 可有:

$$\phi_1^{(0)} = F(x, T) \cos ky + Ky^2 \quad (2.17)$$

$$\phi_2^{(0)} = G(y, T) \quad (2.18)$$

其中 $F(x, T)$ 、 $G(y, T)$ 为待定普适函数; K 是与纬向流的经向切变成正比的比例系数, 设为常数。以下可看到 Ky^2 项能使基本流(包括平直气流和定常热强迫波)与扰动发生非线性相互作用。

2) $O(\delta)$ 阶问题

$$\begin{aligned}
& \left(U \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{\beta} \right) \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x} = -EU \frac{\partial}{\partial x} (X_2 + \phi_1^{(0)}) \\
& - J \left[X_1 + \phi_1^{(0)}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X_1 + \phi_1^{(0)}) \right]
\end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\tilde{\beta} \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial x} = EU \frac{\partial}{\partial x} (X_2 + \phi_2^{(0)}) - J \left[X_2 + \phi_2^{(0)}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X_2 + \phi_2^{(0)}) \right] \quad (2.20)$$

把 (2.11)、(2.17)、(2.18) 式代入 (2.19)–(2.20) 式, 并展开可知: 方程 (2.19) 和 (2.20) 右端不包含 $\phi_n^{(0)}$ 的久期项, 而两齐次方程的通解可归入 $O(1)$ 阶问题中, 因此只需求非齐次特解。用待定系数法和直接积分法求得 (2.19) 和 (2.20) 式的特解为:

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(1)} = & Q_3 \sin l_0 x \cos k_0 y + Q_4 \sin l_0 x [\gamma \cos k_0 y - K_2 (\sin k_0 y - (-1)^m \sin ky)] \\
& - K_1 F \left[(y^2 - x^2/4k^2) \sin ky + \frac{1}{k} y \cos ky \right] - \frac{g_1 - g_2}{\delta_1} \sin (k_0 + k)y \\
& - \frac{g_1 + g_2}{\delta_2} \sin (k_0 - k)y
\end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\phi_2^{(1)} = Q_2 \left(EU - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - k_0^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \sin l_0 x \cos k_0 y \quad (2.22)$$

其中

$$\frac{dg_1}{dx} = Q_3 F'_x \sin l_0 x, \quad \frac{dg_2}{dx} = Q_4 F \cos l_0 x;$$

其余常数见附录 I. $F(x, T)$ 和 $G(y, T)$ 仍需由 δ 的高阶问题确定. 可以验证 $\phi_w^{(1)}$ 均满足 (2.9) 式.

3) $O(\delta^2)$ 阶问题

$$\begin{aligned} \left(U \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{\beta} \right) \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial x} = & -U \frac{\partial^3}{\partial x^3} (X_1 + \phi_1^{(0)}) - \frac{\partial^3}{\partial T \partial y^2} \phi_1^{(0)} - EU \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial x} \\ & - J \left[X_1 + \phi_1^{(0)}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_1^{(1)} + E(X_2 + \phi_2^{(0)}) \right] \\ & - J \left[\phi_1^{(1)}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\phi_1^{(0)} + X_1) \right] - \gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X_1 + \phi_1^{(0)}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial x} = & - \frac{\partial^3}{\partial T \partial y^2} (X_2 + \phi_2^{(0)}) - J \left[X_2 + \phi_2^{(0)}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_2^{(1)} \right. \\ & \left. + E(X_1 + \phi_1^{(0)}) \right] - J \left[\phi_2^{(1)}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X_2 + \phi_2^{(0)}) \right] \\ & + EU \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^{(1)} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X_2 + \phi_2^{(0)}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

根据 (2.23)–(2.24) 式有解的充要条件: “非齐次项对齐次方程的共轭特征解无投影”可消去 (2.23)–(2.24) 式右端中的“久期项”, 从而导出关于 $\phi_w^{(0)}$ 的所谓“可解性条件方程”. 为此, 把 (2.11)、(2.17)、(2.18)、(2.21)、(2.22) 式代入 (2.23) 和 (2.24) 式右端, 并对

(2.23) 式两端作 $\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} [\] \cdot \cos ky dy$, 对 (2.24) 式两端作 $\int_0^{2\pi} [\] dx$, 分别得到:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial F}{\partial T} + a_2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + a_3 F \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} (a_4 + a_6 \sin l_0 x + a_7 \cos 2l_0 x) \\ + F(a_5 + a_8 \cos l_0 x + a_9 \sin 2l_0 x) \\ + a_{10} \int_0^x F \cos l_0 x dx \cos l_0 x + a_{11} \cos l_0 x + a_{12} \cos 2l_0 x \\ + a_{13} \int_0^{2\pi} F \cos l_0 x dx \cos l_0 x = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$(b_1 \cos k_0 y \sin ky - b_2 \sin k_0 y \cos ky) \int_0^{2\pi} F \cos l_0 x dx - b_3 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \quad (2.26)$$

(2.25)–(2.26) 式给出了确定 $F(x, T)$ 、 $G(y, T)$ 的非线性封闭方程组. 其中诸系数 $a_1, a_2, \dots, b_3$ 均见附录 I.

在求解 (2.25)–(2.26) 式前, 我们先粗略地考虑两式中各项所对应的物理形象. 由推导过程和诸系数的表达式可看出 (2.25) 式中大致有如下五项: i) a_1, a_2 所对应的时空涡度平流项; ii) a_3 所对应的扰动自身相互作用项; iii) a_4, a_6, a_8 所对应的自由波与强迫波相互作用项; iv) a_{11} 所对应的强迫源汇项; v) a_9 所对应的摩擦耗散项. 以下还将指出 a_7, a_9, a_{10}, a_{12} 等项极小可略去; 而 a_{13} 所对应的下层流场对上层的斜压性影响由于 a_{13} 较小故作用也不大. 因此 (2.25) 式基本上反映了上述 i)–v) 五项间的平衡关系. 至于 (2.26) 式, 由于取了假设 $U_2 = 0$, 且考虑了慢时间(尺度)内的运动, 因此不出

现涡度平流项;而且低层波动具有纬向对称性,从而也没有扰动自身相互作用项。所以(2.26)式的平衡关系退化为 b_3 项对应的耗散效应和 b_1 、 b_2 项对应的强迫波与上层自由波相互作用的平衡。

三、摄动法和平衡态渐近解

本节我们在适当条件下,用奇异摄动法来寻求由(2.25)–(2.26)式所确定的系统的平衡态渐近解。

在(2.25)–(2.26)式中令 $\frac{\partial}{\partial T} \equiv 0$, 并记 $F(x, \infty) = f(x)$, $G(y, \infty) = g(y)$, (2.25)–(2.26) 式重写为:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d^3 f}{dx^3} + a_3 f \frac{df}{dx} + \frac{df}{dx} (a_4 + a_5 \sin l_0 x + a_7 \cos 2l_0 x) + f(a_5 + a_8 \cos l_0 x \\ + a_9 \sin 2l_0 x) + a_{10} \int_0^x f \cos l_0 x dx \cos l_0 x + a_{11} \cos l_0 x + a_{12} \sin 2l_0 x \\ + a_{13} \int_0^{2x} f \cos l_0 x dx \cos l_0 x = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(b_1 \cos k_0 y \sin ky - b_2 \sin k_0 y \cos ky) \int_0^{2x} f \cos l_0 x dx - b_3 \frac{d^2 g}{dy^2} = 0 \quad (3.2)$$

假设形如(2.10)式的热强迫具有大尺度性,且强度较弱;纬向基本流处于斜压稳定状态;摩擦耗散也较弱。选取:

$$\begin{cases} Q_0 = 10^{-3} \sim 10^{-1} & Q_0^* = \max Q_0 & l_0 = 2 & k_0 = 3k(m=1) \\ U = 0.5 \sim 1.2 & r = 0.2(Q_0^*/0.7)^{\frac{1}{2}} \sim 0.02(Q_0^*/0.7)^{\frac{1}{2}} & K = -0.75 & \beta = 1.5 \end{cases} \quad (3.3)$$

具体计算(3.1)中诸系数可知: a_7 、 a_9 、 a_{10} 、 a_{12} 比其它系数小几个量级(见附录 II), 故可略去它们所相应的项。从计算还看到: a_5 、 a_6 、 a_8 、 a_{11} 、 a_{13} 比 a_1 、 a_3 、 a_4 小, 但比 a_7 、 a_9 、 a_{10} 、 a_{12} 大, 故仍保留相应的项, 而在求解中适当处理。显然求解应先从(3.1)开始。为此记:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 = c_1 = a_4/a_2 & \quad c_2 = a_5/2a_2 & \quad c_3 = -a_{11}/l_0 Q_0^* a_2 & \quad c_4 = a_6/Q_0^* a_2 \\ c_5 = a_8/Q_0^* a_2 & \quad c_6 = a_9/\varepsilon_1 a_2 & \quad c_7 = a_{13}/Q_0^* a_2 & \quad \varepsilon_1 = (Q_0^*/0.7)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

略去(3.1)式中小项, 重写为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 f}{dx^2} + \omega_0^2 f + c_2 f^2 - Q_0^* c_3 \sin l_0 x \right] + Q_0^* c_4 \frac{df}{dx} \sin l_0 x \\ + Q_0^* c_5 f \cos l_0 x + \varepsilon_1 c_6 f + Q_0^* c_7 \int_0^{2x} f \cos l_0 x dx \cos l_0 x = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 c_1 、 c_2 、 $\dots$ 、 c_7 具有相同量级。(3.4)式与研究 Rossby “孤立波”中所得到的著名的“K-dv”方程很相似^[1], 以下可看到它可化为一关于空间变量 x 的二阶非线性强迫“振动”系统(我们借用了振动理论中的振动概念来描述波动在纬向关于 x 的周期变化性态)。为用奇异摄动法求其渐近解, 考虑物理背景后, 再作如下假设:

(1) (3.4) 式处于线性近共振态, 即 $|\omega_0 - l_0| \ll 1$ 。若选 $\varepsilon = (Q_0^*/\xi)^{\frac{1}{2}}$ 为小参数(这里 ξ 为一量级不超过 0(1) 的常数, 使得 $\xi = Q_0^* \varepsilon^{-3/2} = 0(1)$), 具体计算时, 可取

$\xi = 0.7$, 于是 $\varepsilon_1 = \varepsilon$), 则可设:

$$\omega_0 = l_0(1 + \varepsilon l_1) \quad |l_0 l_1 \varepsilon| \ll 1 \quad (3.5)$$

这可由适当选取参数(如 U, K 等)使其满足.

(2) 弱非线性, 即 $|f(x)|^2 \ll 1$. 因略去非线性项后有:

$$|f(x)| \sim \frac{Q_0^*}{\omega_0^2 - l_0^2} = \frac{Q_0^*}{2\varepsilon l_0 l_1} \sim Q_0^*/\varepsilon \quad (3.6)$$

故可设:

$$f(x) = Q_0^*[\varepsilon^{-1}f^{(-1)} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}f^{(-1/2)} + \varepsilon^0 f^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}f^{(1/2)} + \varepsilon f^{(1)} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})] \quad (3.7)$$

在(1)、(2)假设下, 展开(3.4)式, 分出关于 ε 幕次的方程:

1) $O(\varepsilon^{-1})$ 阶问题

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} + l_0^2 \right) f^{(-1)} = 0 \quad (3.8)$$

对(3.8)式积分一次, 由(2.9)式可寻求满足 $\overline{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ (关于 x 的周期

解, 故可取积分常数 $c^{(-1)} = 0$, 再直接求解得:

$$f^{(-1)} = a \cos(\theta + \alpha_1) \quad (3.9)$$

这里 a, α_1 为待定常数, $\theta = l_0 x$.

2) $O(\varepsilon^{-1/2})$ 阶问题

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} + l_0^2 \right) f^{(-1/2)} = -\frac{d}{dx} (\xi c_2 f^{(-1)}) \quad (3.10)$$

积分一次, 同上理可取积分常数 $c^{(-1/2)} = c_2 \varepsilon a^2 / 2$, 再用待定系数法求得解:

$$f^{(-1/2)} = b \cos(\theta + \alpha_2) + \frac{1}{6l_0^2} c_2 \xi a^2 \cos 2(\theta + \alpha_1) \quad (3.11)$$

b, α_2 为待定常数, a, α_1 仍需由 ε 的高阶方程确定.

3) $O(\varepsilon^0)$ 阶问题

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} + l_0^2 \right) f^{(0)} = -\frac{d}{dx} [2l_1 \omega_0^2 f^{(-1)} + 2c_2 \xi f^{(-1/2)} - c_3 \sin \theta] - c_4 f^{(-1)} \quad (3.12)$$

积分一次, 并取积分常数 $c^{(0)} = c_2 \xi a b \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$, 得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + l_0^2 \right) f^{(0)} = & -2l_1 \omega_0^2 a \cos(\theta + \alpha_1) - c_2 \xi a b \cos(2\theta + \alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{6l_0^2} (c_2 \xi)^2 \\ & \cdot a^3 (\cos 3(\theta + \alpha_1) + \cos(\theta + \alpha_1)) + c_3 \sin \theta - \frac{c_6}{l_0} a \sin(\theta + \alpha_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.13) 式右端有与 $\sin \theta, \cos \theta$ 成正比的“久期项”, 它们的存在将破坏(3.7)式的一致渐

近性. 可用“正交法”消去之: 对(3.13)式两端分别作 $\int_0^{2\pi} [\] \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta$ 运算, 得:

$$\begin{cases} \left(2l_1 \omega_0^2 a + \frac{1}{6l_0^2} c_2^2 \xi^2 a^3 \right) \cos \alpha_1 + \frac{c_6}{l_0} a \sin \alpha_1 = 0 \\ \left(2l_1 \omega_0^2 a + \frac{1}{6l_0^2} c_2^2 \xi^2 a^3 \right) \sin \alpha_1 - \frac{c_6}{l_0} a \cos \alpha_1 = -c_3 \end{cases} \quad (3.14)$$

消去 α_1 , 相似得到与 Charney^[1] 和 Pedlosky^[6] 所得的确定系统频率与解振幅关系的方程:

$$a^2 \left[\frac{c_6^2}{l_0^2} + \left(2l_1\omega_0^2 + \frac{1}{6l_0^2} c_2^2 \varepsilon^2 a^2 \right)^2 \right] = c_3^2 \quad (3.15)$$

其中 c_3 、 c_6 分别表示热强迫和摩擦耗散; c_2 表示非线性项; l_1 表示系统离开线性共振点的偏差。(3.15) 式可化为 a^2 的三次代数方程求解。

在求出 (3.15) 式的解, 并代入 (3.14) 式, 得 a 、 α_1 后, 可用待定系数法求得 (3.13) 式的解为:

$$f^{(0)} = c \cos(\theta + \alpha_3) + \frac{c_2^2}{48l_0^4} \varepsilon^2 a^3 \cos 3(\theta + \alpha_1) + \frac{c_2}{3l_0^2} \xi a b \cos(2\theta + \alpha_1 + \alpha_2) \quad (3.16)$$

c 、 α_3 为待定常数; b 、 α_2 仍需由 ε 的高阶方程确定。

4) $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ 阶问题

在这阶问题中重复以上步骤, 消去 $f^{\frac{3}{2}}$ 方程右端的“久期项”, 可得关于 b 、 α_2 的代数方程组:

$$- \left[\frac{c_6}{l_0} + \frac{(c_2 \xi a)^2}{6l_0^2} \right] \sin \alpha_1 - \left[2l_1\omega_0^2 + \frac{(c_2 \xi a)^2}{6l_0^2} (\cos 2\alpha_1 + 2) \right] \cos \alpha_2 = 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{c_6}{l_0} - \frac{(c_2 \xi a)^2}{6l_0^2} \right] b \cos \alpha_2 + \left[2l_1\omega_0^2 - \frac{(c_2 \xi a)^2}{6l_0^2} (\cos 2\alpha_1 - 2) \right] b \sin \alpha_2 \\ & = \frac{\pi}{l_0} \xi a \cos \alpha_1 [l_0 c_4 - c_5 + \pi c_7 / l_0^2] \end{aligned} \quad (3.18)$$

易解得:

$$\begin{cases} b = \frac{|H_3|}{H_4} (H_1^2 + H_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \alpha_2 = \sin^{-1} \left(-\frac{H_2 H_3}{b H_4} \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

其中 H_1 、 H_2 分别为 (3.17) 式中 $\sin \alpha_2$ 、 $\cos \alpha_2$ 前的系数; H_3 为 (3.18) 式中右端项; $H_4 = H_1 H_3 - H_2 H_4$, H_3 、 H_4 分别为 (3.18) 式中 $b \cos \alpha_2$ 、 $b \sin \alpha_2$ 前的系数。把由 (3.14) 式求出的 a 、 α_1 代入 (3.19) 式, 即得 b 、 α_2 。于是最后我们有:

$$\begin{aligned} f(x) = Q_0^* & \left\{ \varepsilon^{-1} a \cos(\theta + \alpha_1) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left[b \cos(\theta + \alpha_2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{6l_0^2} c_2 \xi a^2 \cos 2(\theta + \alpha_1) \right] \right\} + O(\varepsilon^0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

将 (3.20) 代入 (3.2) 式, 即可求得 $g(y)$ 。

至此, 我们把对 (3.1)–(3.2) 式的求解归为对代数方程 (3.15) 的求解。化 (3.15) 式为关于 a^2 的三次方程, 用标准求根公式, 容易求得解 a^2 , 从而也得 a (> 0)。 a^2 解的个数判别式为:

$$DET = \frac{6^2 l_0^{24}}{(c_2 \xi)^{12}} \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left\{ \left[\frac{2}{9} l_1^2 + \frac{l_1 c_6^2}{2 l_0^2} + \frac{(c_2 c_3 \xi)^2}{36 l_0^2} \right]^2 - \frac{1}{48} \left[\frac{13}{3} l_1^2 - \frac{c_6^2}{l_0^2} \right]^3 \right\} \quad (3.21)$$

当

$$DET \equiv 0 \text{ 时有 } \left. \begin{array}{l} \text{一个实根} \\ \text{二个实根} \\ \text{三个实根} \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

我们并不需要用到各解的具体表达式,故不在此给出。

选取由 (3.3) 式所给出的参数值域,具体计算由 (3.15) 和 (3.20) 式所确定的 (3.1)–(3.2) 式的平衡态解,得到:在很大的参数范围内都可存在多重平衡态解。我们将在文章的第二部分(待续)讨论之。

图 1 给出了在图中所取参数下, (3.15) 式的解 a 随基流(切变) U 的形如古典弹性振动理论中著名的“骨髓曲线”分布和所谓的“共振曲线”(确定共振曲线的方程可由 (3.15) 式导出)。可得到, (3.22) 式中 $DET = 0$ 确定了两个临界点 U_c 和 U_l 。在 $U < U_c$, $U > U_l$ 时, (3.15) 式关于 a 仅有一解;而当 $U_c \leq U \leq U_l$ 便出现多解。在有三个解时,接近共振曲线的那两个解 (I、II) 振幅比远离共振曲线的那个解 (III) 大一个量级以上。我们又一次得到了 Charney^[1,2] 的结果。

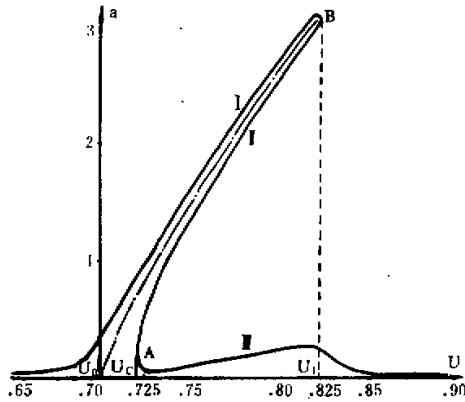


图 1 多平衡态解曲线(实线)与共振曲线(点划线)
 $Q_0 = 0.1$, $r = 0.03\sigma$, $\sigma = (1/7)^{1/2}$, $K = -0.75$, $\beta = 1.5$

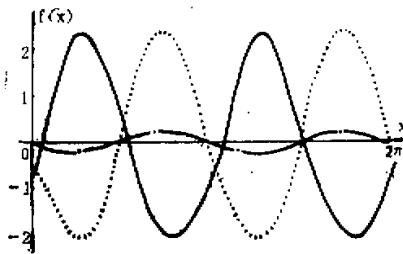


图 2 三个平衡态解随 x 的分布
实线对应图 1 中 I; 虚线对应 II; 点划线对应 III, $U = 0.75$

图 2 给出了在图中所取参数下, (3.20) 式中平衡态解 $f(x)$ 的分布。大小振幅解对比很明显, x 方向呈现两个波的周期结构。我们将在文章的第二部分详细讨论它们的性态、特征, 由此试图来剖析热力强迫激发多重平衡态的理论机制。

四、结 论

本文通过一简化的两层斜压模式, 导出一投影在 x - T 平面上的热强迫波扰动的偏微分方程组。在一定的假设下求出了该方程的渐近平衡态解。得到: 在很大的参数范围内都可存在三重平衡态解。其中两个近共振态的解的振幅异常大、另一解, 远离共振态, 振幅较小。

参 考 文 献

- [1] Charney, J. G. and J. G. Devore, 1979, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 36, p. 1205—1216.
- [2] ——— and D. M. Strauss, 1980, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 37, p. 1157—1176.
- [3] Egger, J. 1978, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 35, p. 1788—1801.
- [4] Vickory J. G. and J. A. Dutton, 1979, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 36, p. 42—52.
- [5] 朱正心, 朱抱真, 1982, 中国科学, 4 期, p. 361—371.
- [6] Pedlosky, J., 1981 *J. Atmos. Sci.*, Vol. 38, p. 2626—2641.
- [7] Long, R., 1964, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 21, p. 197—200.

THE EXCITING, ESTABLISHING AND TRANSITION OF MULTIPLE EQUILIBRIA FORCED BY NEARLY RESONANT THERMAL DRIVING PART I: APPROXIMATE SOLUTIONS OF MULTIPLE EQUILIBRIA

Qin Jianchun Zhu Baozhen

(National Research Center for marine Environment Forecasts)

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

A two layer-baroclinic model in a narrow, longitudinally periodic channel on a β -plane is used in this paper. In the model, nearly resonant thermal forcing, Ekman's friction and a uniformly sheared basic current are considered. By means of multiple scale method, a simplified partial differential equation on the X - T plane is derived to describe the interaction between forced waves and free waves. Secular perturbation method is used to find the equilibria approximately. The results show that multiple equilibria can exist in a wide domain of parameters.

附 录

I. (2.25)~(2.26) 中诸系数的表达式:

$$a_1 = k\pi/2$$

$$a_2 = -U\pi/2k$$

$$a_3 = 16K_1/3$$

$$a_4 = \frac{\pi}{4}(3 - \pi^2)KK_1 + \frac{\pi}{8k} k_0 Q_1 Q_2 \left[k_0^2 \cdot \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) - (\delta_1 + \delta_2) \right]$$

$$a_5 = k\pi r/2$$

$$a_6 = (-1)^m Q_4 \left\{ (k_0^2 - k^2) \left[\left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_0}{k_0^2 - 4k^2} \right) - k_0 \left(\frac{1}{k_0^2} - \frac{k_0^2 + 4k^2}{(k_0^2 - 4k^2)^2} \right) \right] \right\} + (-1)^m k_0 \cdot K_1 Q_1 \left\{ \frac{k_0^2 + k^2}{k_0^2 - 4k^2} + \left(\frac{1}{k_0^2} - \frac{k_0^2 + 4k^2}{(k_0^2 - 4k^2)^2} \right) \cdot \left(3k + \frac{k_0^2}{k} \right) - (k_0^2 - k^2) (1/2k(k_0^2 - 4k^2) - 1/(k_0 - 2k)^2 + 1/(k_0 + 2k)^2) \right\} + \varepsilon_1 Q_4$$

$$a_7 = k_0 \pi Q_1 Q_2 \left[(\delta_2 + \delta_4) - k_0^2 \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) \right] / 8k$$

$$a_8 = (-1)^m I_0 K_1 Q_1 \left\{ (4k_0^2 - 10k^2) k k_0 / (k_0^2 - 4k^2)^2 + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_0}{k_0^2 - 4k^2} \right) \left[\left(3 + \frac{\pi^2}{4} \right) \cdot k + \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{k_0^2}{k} \right] + (k_0^2 - k^2) \left(\frac{1}{k_0} \right. \right.$$

$$\left. - k_0 / 4(k_0^2 - 4k^2) \right) \frac{\pi^2}{k} \left. \right\} - (-1)^m I_0 k$$

$$\cdot Q_4 \{ 2kk_0 / (k_0^2 - 4k^2) - 4kk_0(k_0^2 - k^2) / (k_0^2 - 4k^2)^2 \} - \varepsilon_2 Q_1$$

$$a_9 = I_0 \pi Q_1 Q_2 [k_0^2 (\delta_1 + \delta_2) - \delta_1 - \delta_2] /$$

$$8k + k_0 \pi Q_1 Q_2 \left[\delta_1 - \delta_2 + k_0^2 \left(\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_2} \right) \right] / 8k$$

$$a_{10} = \frac{I_0 \pi}{4k} \{ -k_0^2 \delta_1 Q_1 (I_0 Q_4 + Q_7) + k_0^2 \delta_2 Q_2 (-I_0 Q_4 + Q_7) + \delta_1 (I_0 Q_4$$

$$+ k_0^2 \delta_2 Q_2 (-I_0 Q_4 + Q_7) + \delta_2 (I_0 Q_4$$

$$+ Q_4 + Q_1 Q_2) + \delta_1 (I_0 Q_4 Q_4 - Q_1 Q_7) \}$$

$$a_{11} = I_0 \pi K (-1)^m Q_4 [4k_0^2 (k_0^2 + k^2) - k k_0 (3k^2 + k_0^2)] / k (k_0^2 - k^2)^2$$

$$a_{12} = \frac{I_0}{2} Q_1 Q_2 \left\{ \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{4k_0^2 - k^2} \right) [2k_0^2 + K_2 (k_0^2 - k^2)] - 2k k_0 \left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_0}{k_0^2 - 4k^2} \right) + 2k_0 \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{4k_0^2 - k^2} \right) \right\}$$

$$a_{13} = \frac{E I_0 \pi}{8k r} \left[Q_1 \left(\frac{b_1 - b_2}{k_0 + k} - \frac{b_1 + b_2}{k_0 - k} \right) + 2U Q_2 (k b_1 - k_0 b_2) \right]$$

$$\delta_1 = (-1)^m 2K \left\{ \delta_1 \left(\frac{1}{k_0^2} - \frac{1}{(k_0 + 2k)^2} \right) + \delta_2 \left(\frac{1}{k_0^2} - \frac{1}{(k_0 - 2k)^2} \right) \right\}$$

$$\delta_2 = (-1)^m 2K \left\{ \delta_2 \left(\frac{1}{k_0^2} - \frac{1}{(k_0 + 2k)^2} \right) - \delta_1 \left(\frac{1}{k_0^2} - \frac{1}{(k_0 - 2k)^2} \right) \right\}$$

$$Q_1 = Q_0 / I_0 U (k_0^2 - k^2)$$

$$Q_2 = Q_0 / I_0 \tilde{\beta}$$

$$Q_3 = E Q_0 / I_0 \tilde{\beta} (k_0^2 - k^2)$$

$$Q_4 = 2k_0^2 K Q_0 / I_0 U^2 (k_0^2 - k^2)^2$$

$$Q_5 = k_0 Q_0 / 2 I_0 U^2$$

$$Q_6 = k_0 Q_0 / 2 U^2, \quad b_3 = r$$

$$K_1 = kK/2U, \quad k^2 = \tilde{\beta}/U$$

$$b_1 = I_0 k Q_1, \quad b_2 = I_0 k_0 E Q_1$$

$$Q_4 = k_0 Q_0 / 2 I_0 U^2$$

$$\delta_{1,2} = k^2 - (k_0 \pm k)^2$$

$$\delta_3 = (k_0 + k) / \delta_1$$

$$\delta_4 = (k_0 - k) / \delta_1$$

$$\delta_5 = (k_0 + k)^2 / \delta_1$$

$$\delta_6 = (k_0 - k)^2 / \delta_1$$

$$\delta_7 = (k_0 + k)^3 / \delta_1$$

$$\delta_8 = (k_0 - k)^3 / \delta_1$$

II. 图 1 中平衡态解所对应的方程 (2.25) 中各系数具体计算值取:

$$I_0 = 2, \quad Q_0 = 0.1,$$

$$K = -0.75, \quad \tilde{\beta} = 1.5,$$

$$r = 0.02 \left(\frac{1}{7} \right)^{2/3}$$

计算 $a_2, a_3, \dots, a_{13}$ 有:

U a_i	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
a_1	-0.83	-0.92	-1.1	-1.12	11.23	-1.34	-1.45	-1.57	-1.81	-1.94
a_2	-9.17	-7.36	-6.85	-6.57	-6.48	-5.54	-4.72	-4.00	-3.80	-3.30
a_3	-4.34	-3.88	-3.50	-3.18	-2.90	-2.66	-2.45	-2.27	-1.97	-1.84
a_4	0.16×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.14×10^{-1}	0.14×10^{-1}	0.13×10^{-1}	0.13×10^{-1}	0.13×10^{-1}	0.12×10^{-1}	0.12×10^{-1}
a_5	-0.42	-0.35	-0.31	-0.27	-0.23	-0.21	-0.18	-0.16	-0.13	-0.12
a_6	0.13×10^{-2}	0.11×10^{-2}	0.91×10^{-3}	0.77×10^{-3}	0.66×10^{-3}	0.57×10^{-3}	0.50×10^{-3}	0.44×10^{-3}	0.35×10^{-3}	0.31×10^{-3}
a_7	0.64×10^{-1}	0.60×10^{-1}	0.56×10^{-1}	0.52×10^{-1}	0.49×10^{-1}	0.46×10^{-1}	0.44×10^{-1}	0.41×10^{-1}	0.37×10^{-1}	0.35×10^{-1}
a_8	-0.32×10^{-2}	-0.27×10^{-2}	-0.22×10^{-2}	-0.19×10^{-2}	-0.16×10^{-2}	-0.14×10^{-2}	-0.12×10^{-2}	-0.11×10^{-2}	-0.86×10^{-3}	-0.77×10^{-3}
a_9	-0.012	-0.88×10^{-3}	-0.66×10^{-2}	-0.5×10^{-2}	-0.38×10^{-2}	-0.29×10^{-2}	-0.23×10^{-2}	-0.18×10^{-2}	-0.11×10^{-2}	-0.94×10^{-3}
a_{10}	0.23	0.21	0.20	0.19	0.18	0.16	0.15	0.15	0.14	0.13
a_{11}	0.47×10^{-2}	0.40×10^{-2}	0.35×10^{-2}	0.31×10^{-2}	0.27×10^{-2}	0.23×10^{-2}	0.21×10^{-2}	0.20×10^{-2}	0.16×10^{-2}	0.15×10^{-2}
a_{12}	-0.54×10^{-1}	-0.56×10^{-1}	-0.58×10^{-1}	-0.60×10^{-1}	-0.61×10^{-1}	-0.63×10^{-1}	-0.65×10^{-1}	-0.66×10^{-1}	-0.70×10^{-1}	-0.71×10^{-1}