

近共振热力强迫作用下多重平衡态的 激发、建立和转换(二) ——多重平衡态机制的理论分析

秦建春

朱抱真

(国家海洋局海洋环境预报研究中心) (中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文通过文[1]中求得的热力强迫多重平衡态渐近解,研究了热力强迫激发的近共振强迫不稳定产生多重平衡态的理论机制。分析得到:非线性性和外强迫是产生多重平衡态的决定因素;在适当的“环境条件”下,热力强迫可激发稳定的多重平衡态,特别是可以存在三个稳定的平衡态。其中两个具有共振特性的大振幅解,对热强迫变化不敏感;而另一小振幅解,对热强迫依赖性很大。一般地,热强迫增大,多重平衡态存在的范围扩大,但稳定性减弱。定常热强迫波总不稳定。热力强迫与地形强迫具有同样的动力触发作用,摩擦对多重平衡态解的性态有很大影响。

分析还得到:改变“环境参数”可引起多重平衡态之间的相互转换。

一、引 言

本文是[1]的继续。在这部分,我们将根据前文已求得的热强迫多重平衡态渐近解及求解的具体过程,剖析热力强迫激发的近共振强迫不稳定产生多重平衡态的数学物理结构;阐明热力强迫与地形强迫具有同样的动力作用激发多重稳定平衡态,而且在某些方面热力强迫还有比地形更广的强迫特性。归纳分析结果,本文还具体提出了一种平衡态之间相互转换的机制。

二、热力强迫多重平衡态激发、建立和转换的理论分析

本节研究文献[1](2.12)式中叠加在热强迫波 $X_n(x, y)$ 上的近共振扰动 $\phi_n(x, y, T)$ 在热强迫作用下发生不稳定,增至有限振幅,最后趋于平衡态的机制。

1. 热强迫不稳定对平衡态的激发

先讨论激发平衡态建立的所谓热强迫不稳定,即 $X_n(x, y)$ 上扰动 $\phi_n(x, y, T)$ 的线性不稳定。Charney^[2,3], Pedlosky^[4] 等曾先后描述过引入地形而产生的基本纬向流的不稳

定——地形不稳定。这里将指出,本文模式引进的热强迫具有同样的特性。

因在文献[1]的(2.15)、(2.17)、(2.18)中已假设了 $\phi_n(x, y, T)$ 的结构形式, ϕ_n 中不确定部分仅在于首项解 $\phi_1^{(0)}$ 中的函数 $F(x, T)$, 因此问题转为研究 $F(x, T)$ 在 $|F'| \ll 1$ ——线性场合的瞬时不稳定性。现对基本态

$$F \equiv 0, \quad K \equiv 0 \quad (2.1)$$

作线性化小扰动分析。在文[1](2.25)式中令

$$\begin{cases} F = 0 + F' = F' = e^{\sigma T} \sum_{n=1}^3 [A_n \cos nx + B_n \sin nx] \\ K = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

因(2.25)式中的 a_6 、 a_8 和 a_{11} 等项含 K , 故扰动方程为:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial F'}{\partial T} + a_2 \frac{\partial^3 F'}{\partial x^3} + \frac{\partial F'}{\partial x} (a_4 + a_7 \cos 2l_0 x) + F' (a_5 \\ + a_9 \sin 2l_0 x) + a_{10} \int_0^x F' \cos l_0 x \, dx \cos l_0 x \\ + a_{13} \int_0^{2x} F' \cos l_0 x \, dx \cos l_0 x = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

利用三角函数系的正交性,可得到一关于谱系数 A_n 、 B_n 的线性齐次代数方程组;其系数矩阵的行列式取零值,确定了(2.2)式中特征值 σ 的一特征问题(略)。用“Q-R 分解法”计算特征值 σ , 得到:在相当宽的参数范围内,当没有加热和耗散 ($Q_0 = r = 0$) 时(此时文[1](2.12)式中的热强迫波退化为纯纬向基本流),所得特征值均为负实根或负实部复根;而当引入加热和耗散,所得特征值出现正实根或正实部复根。很显然,正是外强迫的加入,才使定常热强迫波产生不稳定。注意到已假设斜压基本流垂直切变是次临界稳定的,而在(2.2)式中的扰动具有与热强迫相同的大尺度性。可见,这里的不稳定与通常的斜压不稳定有别,称之为近共振强迫不稳定。

2. 平衡态解的结构和存在域

为分析解结构,需先确定文[1]中非线性系统(3.4)式的自振频率与振幅的关系及系统与外强迫发生强迫共振的条件。在文[1]的(3.15)式中令 $c_3 = c_6 = 0$ (无强迫和无摩擦)有:

$$2l_1 \omega_0^2 + \frac{1}{6l_3^2} (c_2 \xi a)^2 = 0 \quad (2.4)$$

式中 l_0 为非线性系统近似谐波解的频率。利用文[1]中近共振假设: $\omega_0 = l_0(1 + \varepsilon l_1)$, $|l_0 l_1 \varepsilon| \ll 1$, 即得非线性自由系统频率对振幅的依赖关系:

$$\omega = \omega_0(1 - \varepsilon l_1) = \omega_0 + \frac{\varepsilon(c_2 \xi a)^2}{12l_0^2 \omega_0} \quad (2.5)$$

当加上强迫和耗散,并令 $\omega(a) = l_0$ (这里 l_0 为外强迫频率),利用近共振假设和(2.5)式即得非线性共振条件:

$$a = \left(-\frac{12l_1 l_0^4}{c_2^2 \xi^2} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

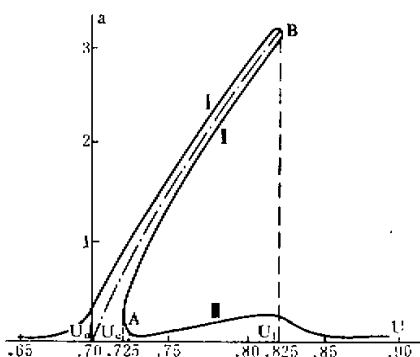


图1 多平衡态解曲线(实线)和共振曲线(点划线)

$$Q_0 = 0.1, r = 0.03 \left(\frac{1}{7} \right)^{1/2}$$

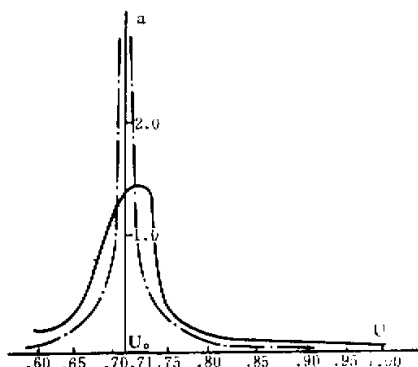


图2 无摩擦线性解(点线)和大摩擦解(实线)分布

$$Q_0 = 0.1, \text{其余参数同文[1]中图1.}$$

这需 $l_1 < 0$, 即 $\omega_0 < l_0$. 又, $\omega_0 \propto \frac{1}{U^{3/2}}$, 因此所考虑的基流切变对固定外强迫是大于线性共振临界值的.

再注意到, $c_3 = c_6 = 0$ 时, 文[1]中确定平衡态解振幅的代数方程(3.15)的解为:

$$a^2 = 0, \quad a^2 = -\frac{12l_1l_0^4}{c_2^2l_0^2} \quad (\text{二重根}) \quad (2.7)$$

因此(2.6)式也对应了无强迫(包括无摩擦)时文[1]中(3.1)式的唯一有意义的解.

另一方面, 若在文[1](3.15)式中令 $c_2 = 0$, 可得:

$$a = |c_3| / \left(\frac{c_6^2}{l_0^2} + 4l_1^2l_0^4 \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

因此在无非线性时, 文[1]中(3.1)式也仅有单解可存在. 综上分析, 我们得到: 对文[1]中系统(2.25)–(2.26), 若无外强迫和非线性, 任何多解都不可能出现.

图1重新给出了文[1]中图1, 其中共振曲线由(2.6)式确定. 由图可见, 很弱的强迫能激发两个量级比它大一倍以上的平衡态解, 这显然来自共振效应. 具体地, 设由文[1](3.22)式中 $DET = 0$, 可分别得多解出现和消失的临界“分支”点 U_c 和 U_1 , 则当 $U_c < U < U_1$ 时, 文[1]中(3.15)式有三个解, 其中两个大振幅解在形态上相似于文[1](3.15)式中 $c_3 = c_6 = 0$ 时的平衡态, 具有共振的特性, 可用(2.6)式逼近之; 另一解值较小, 相似于文[1](3.15)式中 $c_2 = 0$ 时的线性解, 可用(2.8)式逼近之. 从(2.6)和(2.8)式即得: 文[1](3.15)式的共振形式大振幅解对热强迫强度 Q_0 的变化并不敏感, 而线性解则相当依赖于 Q_0 .

图2是线性无摩擦解($r = 0$)和大摩擦值解(实线)($r = 0.28$)的分布. 其中, 图1中的骨髓曲线变得和 $l_1 = 0$ ($U_0 = 0.71$) 的直线对称. 且因 $c_6 = 0$, $l_1 \rightarrow 0$ 时有 $a \rightarrow \infty$, 于是解发生线性共振. 又, (2.5)式与 Trevisan 和 Buzzi (1980)^[9] (以下称 T·B) 的结论完全一致: 非线性的存在对线性系统固有频率产生一正比于振幅平方的修正项. 比较

图 1、2 可知:非线性产生修正效应的直观形象就是使原线性问题中的共振曲线 $l_1 = 0$ 偏向 $l_1 < 0$ ($U > U_0 = 0.71$) 的区域,从而使产生多解成为可能;非线性越强,曲线偏向越大,多解存在域越宽,解之间的量值差越小。

在图 1 中还可看到的一个现象是:下支小振幅(III)并不象 T·B 指出的多平衡态解曲线随 U 的增加而减小,而是象 Pedlosky^[4] 在斜压问题的多平衡态解曲线中表明的那样,随基流(切变) U 增大而增大。下面将指出,在去掉摩擦后,对应图 1 的多解图 5 仍具有上述特性;又注意到图 1 相应于固定的 Q_0 值,再与 T·B 的正压模式所得的平衡态解结构进行比较,可知:在多解区小振幅解随 U 增大而增加的特性并非由于摩擦或热力与地形强迫的差别造成,而很可能是由于本文模式的斜压性引起的。它体现了象基本流垂直切变所造成的热成风涡度平流那样的斜压性对平衡态的影响。

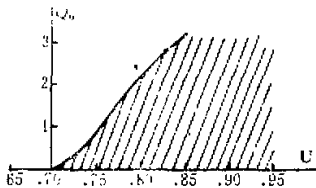


图 3 文[1]中(3.15)式关于 a^2 的多解区
上边界由(2.9)式确定,下边界为 $Q_0 = 0$, 所取其余参数同图 2。

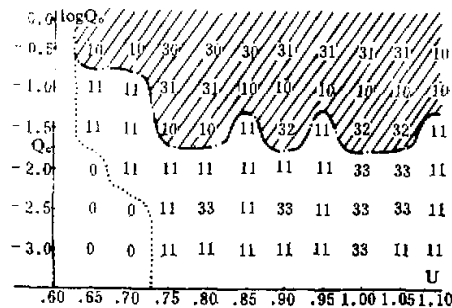


图 4 文[1]中(3.15)式解 a 的个数及解的稳定性在 Q_0-U 平面的分布。
 $Q_0 = -2 + \log^2 r \approx 0.028$, 阴影部分为至少有一个解不稳定的区域。

再分析解在参数域的分布情况。在文[1](3.21)式中令 $DET = 0$, 得到文[1]中(3.15)式关于 a^2 多解的 Q_0 与 $-l_1$ (从而与 U) 的临界关系:

$$c_3^2 = \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{13}{3} l_1^2 - \frac{c_6^2}{l_0^2} \right)^{3/2} - \frac{2}{9} l_1^2 - l_1 c_6^2 / 2 l_0^2 \right] / \left(\frac{c_2^2}{36 l_0^2} \right)^2 \quad (2.9)$$

又在文[1](3.21)式中令 $c_3 = c_6 = 0$ 得:

$$DET \propto \left(\frac{2}{9} \right)^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{13}{3} \right)^3 < 0$$

即此时文[1]中(3.15)式关于 a^2 仍有多解。但(2.6)或(2.7)式指出,此时关于 a , 文[1]中(3.15)式仅有唯一解。

图 3 是以(2.9)式为上界的 a^2 的多解区。可看到:多解区随基流 U 的增大而加宽;在 U 的近共振区域内,多解区关于 Q_0 的上边界远大于文[1]中求解(3.1)式时对 Q_0 的限制值;当 $Q_0 = 0$ (即 $c_3 = 0$, 此时模式的“相容性”要求应取 $c_6 = 0$), 因文[1]中(3.1)式关于 a 无多解,所以包含在 a^2 的多解区内的关于 a 的多解区,可取 $Q_0 = 0$ 这一“奇异线”作为下边界。因此只要 $Q_0 \approx 0$ 则不论 Q_0 多小,文[1]中(3.1)式关于 a 总可存在多解。

图 4 是数值计算的结果,数字 0、11、31、32、33 分别表示该处不存在解、有一稳定

$$\begin{vmatrix}
 a_1\sigma + a_2 + (a_3 - a_4)/2 + \frac{a^2}{2} N^2 & 0 & -\frac{a_3}{2} (N_2 - N_4) & -\frac{1}{2} a_3 M_2 & 0 & \frac{1}{2} a_3 (M_2 - M_4) \\
 0 & a_1\sigma + a_2 + \frac{1}{2} a_{11} + a_3 N_4 & 0 & 0 & 2a_4 - 8a_1 - a_3 M_4 & 0 \\
 (a_6 + a_7)/2 + \frac{3}{2} a_3 (N_2 + N_4) & 0 & a_1\sigma + a_2 & \frac{3}{2} a_3 (M_2 - M_4) & 0 & 3a_4 - 27a_1 \\
 a_1 - a_4 - \frac{a_3}{2} M_2 & 0 & -\frac{a_3}{2} (M_1 + M_4) & a_1\sigma + a_2 + \frac{1}{2} a_4 & 0 & -a_3 N_2 - \frac{3}{2} a_6 \\
 0 & 8a_2 - 2a_4 - a_3 M_4 & 0 & 0 & a_1\sigma + a_2 - a_3 N_2 & 0 \\
 -\frac{3}{2} a_3 (M_1 + M_4) & 0 & 27a_2 - 3a_1 & \frac{1}{2} a_4 & 0 & a_1\sigma + a_2
 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)^*$$

*其中 M_2, M_4, N_2, N_4 分别是由文[1](3.20)式确定的平衡态解 $f(x)$ 中 $\cos 2x, \cos 4x, \sin 2x, \sin 4x$ 前的系数。

解、三个解中有一稳定、有二稳定、三解都稳定。由图知,正如以上指出的:虽然 σ 的多解区随 Q_0 减小而变窄,但即使 Q_0 很小,仍有多重平衡态解存在。

3. 稳定性分析

在文[1](2.25)式中令

$$F(x, T) = f(x) + F'(x, T) \quad (2.10)$$

其中 $f(x)$ 为文[1]中求得的平衡态解, $F'(x, T)$ 为其扰动。将(2.10)式代入文[1]中(2.25)式,并作线性化处理,得扰动方程:

$$\begin{aligned}
 & a_1 \frac{\partial F'}{\partial T} + a_2 \frac{\partial^3 F'}{\partial x^3} + a_3 \frac{\partial f F'}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial x} (a_4 + a_6 \sin l_0 x + a_7 \cos 2l_0 x) \\
 & + F' (a_5 + a_8 \cos l_0 x + a_9 \sin 2l_0 x) + a_{10} \int_0^x F' \cos l_0 x \, dx \cos l_0 x \\
 & + a_{11} \int_0^{2\pi} F' \cos l_0 x \, dx \cdot \cos l_0 x = 0 \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

取:

$$F'(x, T) = e^{\sigma T} \sum_{n=1}^3 (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (2.12)$$

式中 A_n, B_n 为常数。代入(2.11)式,按照前面讨论热强迫不稳定的方法,可确定一关于 σ 的特征值问题,见(2.13)式。在所考虑的参数范围内,计算 σ 得到如图4所示的结果。当热强迫强度较小时,所有平衡态解都是稳定的;特别是在 $U = 1.0$ 、 $Q_0 = 10^{-2.5} \sim 10^{-2.0}$ 附近的某参数区域内,可存在三重稳定的平衡态,但三个解的稳定程度有所差别,通常中间支解的稳定性较弱;当热强迫增大到 $Q_0 = 0.02$,就开始有不稳解出现,但一些参数点上仍有二个稳定的平衡态。此时,必定是图1中上支大振幅解和下支小振幅解稳定;而中间支解不稳定。当仅有一个稳定解时,或上支大振幅解或下支小振幅解都可能是稳定的。

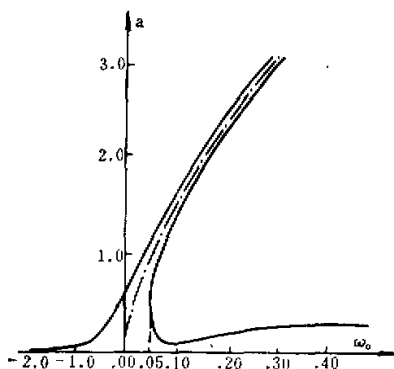


图5 无摩擦多平衡态解和共振曲线
所取参数同图2, 但 $r = 0$, $\omega_1 = -\epsilon l_1 = 1 - \omega_0/l_0$

一般地看, 热强迫增大, 虽然多平衡态解出现的机会增多, 但因稳定性减弱, 因此实际存在多重稳定平衡态解的机会减少; 而在适当热源强度时, 二个稳定甚至三个稳定的平衡态解的存在机会都很多, 后者似乎是一新的结论。

4. 摩擦耗散对多平衡态存在性及稳定性影响

我们再来看摩擦耗散的作用。当无摩擦 ($c_0 = 0$) 时, 由文[1]中 (3.21) 式

$$DET \propto l_1^4 \left\{ \left[\frac{2}{9} + \left(\frac{c_2 c_{35}}{36 l_0^4} \right)^2 / l_1^2 \right]^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{13}{3} \right)^3 \right\}$$

当

$$l_1^2 < - \left(\frac{c_2 c_{35}}{36 l_0^4} \right)^2 / \left[\frac{1}{\sqrt{48}} \left(\frac{13}{3} \right)^{3/2} + \frac{2}{9} \right]$$

时, $DET < 0$, 文[1]中 (3.15) 式恒有多平衡态解。亦即, 图1中的 U_1 将趋于 $\gg 1$, 而在任何 $U > U_c$ 的有限区域内, 都存在多平衡态解。

当摩擦较大时, 若

$$c_0^2 \geq \frac{13}{3} l_1^2 l_0^4$$

式中 l_1^* 是在近共振假设有效范围内 l_1 的最大值, 则总有 $DET > 0$, 文[1]中 (3.15) 式只存在唯一解。图2和图5分别给出了 $r = 0.2(Q_0^*/0.7)^{2/3}$ 和 $r = 0$ 时文[1]中 (3.15) 式解 a 随 U 的分布曲线。

为分析摩擦对平衡态稳定性的影响, 我们计算了不同摩擦下 (2.12) 式的特征值 σ 。结果得到: 当摩擦很大时, 所获得的单个平衡态解总是稳定的; 而在无摩擦时, 图5所示的多解曲线仅在 $\omega_1 \geq 0.2$ 和 $\omega_1 \leq 0.03$ ($\omega_1 = -\epsilon l_1 = 1 - \omega_0/l_0$) 区间内, 上支大振幅解稳定; 而在三个解发生转换的区域 (即单解向多解分支区) 没有稳定解存在。

比较图5与T·B所讨论的地形强迫问题的结果, 在我们的热强迫斜压模式中, 无摩擦时, 稳定的多平衡态存在的可能性小于正压地形强迫的情况; 并且平衡态之间的转换也

很难实现我们将在本工作的第三部分讨论这问题)。但在合理的模式大气中,我们总是考虑热强迫和摩擦耗散同时并存,因此不会出现上述情况。

5. 改变外参数引起的多重平衡态的相互转换

平衡态之间相互转换的机制是相当复杂的。我们这里通过分析和计算给出一种实现转换的可能途径:改变大气环境参数可引起平衡态之间的突变性转换。我们借助图 1 来描述这一理想化的突变过渡模型。设图 1 中当基本流(切变) U 从大向小递减时对应系统的一个状态沿下支小振幅解向 U_c 方向移动,则在 U 到达 U_c 时,它将在 A 点处突变,过渡到上支大振幅解。另一方面,若 U 从只有一个解的区域向多解区“前进”,则系统的解将不改变位相,而相应地增大,进入上支大振幅解,直至 U_1 所对应的 B 处,它又将突变过渡到下支小振幅解。我们将在以后的工作中利用更完整的模式,模拟这一突变机制。

除 U 的变化能引起突变外,热强迫强度的变化也具有这种特性。如图 4 所示:以固定 $U = 0.75$ 为例,当 $Q_0 = 10^{-2}$ 时,文[1]中(3.1)式有一稳定的单解;当 Q_0 增至 $10^{-3/2}$ 时,此平衡态已变成不稳定; Q_0 继续增至 10^{-1} 时,文[1]中(3.1)式变为具有三个解。计算表明仅最大振幅解是稳定的,它可以认为是 $Q_0 = 10^{-2}$ 时那个稳定的单解,由于 Q_0 的变化而突变过渡形成的。这种过渡模型来自数学理论中的所谓“突变学”,Hopf 定理对此作了定性的数学描述。Dutton (1979, 1981)^[6,7]证明了在加热耗散的大气系统中,非线性准地转 Rossby 波确实具有这种“突变”特性;李麦村(1983)^[8]在类似的系统中,研究大气流突变的非线性机制时也得到了相似的结论。

三、结 论

在文[1]所求出的热力强迫多重平衡态渐近解的基础上,本文剖析和讨论了求得的平衡解的数学物理结构、存在域、稳定性等问题。得到:在很大的参数范围内,可存在三个平衡态解,其中两个解振幅异常大,表现了共振的特性,对热强迫强度变化不敏感;另一解振幅较小,量值直接依赖于热力强迫。稳定性分析表明:平衡态的稳定性随热强迫增大而减弱;在适当的热强迫 Q_0 值下,多重稳定的平衡态可以存在,它表现为文[1](3.1)式中较小热强迫时平流项 $\frac{d^3f}{dx^3}$ 与非线性项 $\frac{df}{dx}$ 之间较稳定的平衡。若三个平衡中仅有一个稳定,则或最大振幅解或最小振幅解都可能是稳定的;若两个稳定,则必是象文[1]的图 1 中上支大振幅解和下支小振幅解稳定,而中间支解不稳定。特别地,在 Q_0 不大时,可存在三重稳定的平衡态;但稳定强度有所不同。

研究多重平衡态的理论机制,我们还得到:非线性效应和近共振外强迫是多平衡态产生的两决定性因素,而摩擦耗散则是重要因素。这里的非线性包括了强迫波与扰动以及扰动与扰动自身的相互作用;通过前者近共振外强迫能够作为一种触发机制来发挥其强迫效应,通过后者对系统内部的线性结构产生一种修正,从而使多重平衡态的出现成为可能。强迫波与扰动的非线性共振性还导致了平衡态振幅大而有限的特性。在激发多重平衡态中,纯热力作用与地形强迫具有同样的动力触发作用。尽管热强迫很小时,多解出现机

会很小,但只要热强迫不为零,就有多解存在。

进一步的分析和讨论得到: 大气环境参数的改变可引起平衡态间的突变性过渡转换,它通常需要有一不稳定或弱稳定平衡态作为“桥梁”。我们已得到单独改变基本流(切变) U 的量值或热强迫强度 Q_0 的值都能触发平衡态转换。引起平衡态转换的机制很多,在我们工作的第三部分,将在讨论平衡态建立过程的同时提出另一种平衡态间相互转换的可能机制。

参 考 文 献

- [1] 秦建春、朱抱真, 1986 大气科学, Vol.10, No.4, 371—382.
- [2] Charney, J. G. and J. G. Devore, 1979, *J. Atmos. Sci.*, 36, 1205—1216.
- [3] ——— and D. M. Strauss, 1980, *J. Atmos. Sci.*, 37, 1157—1176.
- [4] Pedlosky, J., 1981, *J. Atmos. Sci.*, 38, 2626—2641.
- [5] Trevisan, A. and A. Buzzi, 1980, *J. Atmos. Sci.*, 37, 947—957.
- [6] J. A. Dutton, 1981, *J. Atmos. Sci.*, 38, 690—716.
- [7] Vickory, J. G. and J. A. Dutton, 1979, *J. Atmos. Sci.*, 36, 42—52.
- [8] 李麦材、罗哲贤, 1983, 中国科学, 2期, 187—192.

THE EXCITING, ESTABLISHING AND TRANSITION OF MULTIPLE EQUILIBRIA FORCED BY NEARLY RESONANT THERMAL DRIVING PART II: THEORETICAL ANALYSES OF THE MECHANISM OF EQUILIBRIA

Qin Jianchun

Zhu Baozhen

(National Research Center for Marine Environment Forecasts) (Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

Based on the results attained in the first part of our paper, the theoretical mechanism of thermal forcing exciting multiple equilibria and the stability of the equilibria solutions are studied in this part. It is known from our analyses that nonlinear effect and external forcing are the two most important elements to produce multiple equilibria. It is also known that under proper restrictive conditions, thermal forcing can also excite multiple stable equilibria, and three of them in particular, can exist, in which the small-amplitude solution is sensitive to the change of thermal forcing but two large-amplitude near-resonant solutions are not. In general, the increase of thermal forcing will broaden the parameter domain in which multiple equilibrium solutions can exist, but destabilize the equilibria. Stationary thermal forced waves are always unstable. Thermal forcing has the same function as topographic forcing in exciting multiple stable equilibria and friction is of a great influence on the behavior of equilibria.

By analysis, we also get that latering the values of external parameters can induce the so-called catastrophe transition between equilibria. Changing both the shear of the basic current and the amplitude of the thermal forcing has the same function.