

行星边界层湍流特征的非线性模式

毛 琦

(上海台风研究所)

提 要

本文以行星边界层理论为基础,设计了一个定常行星边界层湍流特征非线性模式。根据行星边界层湍流现象具有波动和团块结构的特点,在模式设计中引用了量子化概念,构造了一个适合于大气湍流运动的波函数用以闭合方程组,并在类比的意义上考察了该方案的合理性。采用WKB渐近方法与数值解相结合,对行星边界层湍流特征进行了定量分析,并且与实验资料以及其他作者的模式作了比较。结果表明,本文设计的模式有能力描述定常行星边界层内湍流运动的非线性特征。

一、引 言

行星边界层的湍流运动决定了该层流体高度的非线性特征,因此,研制边界层模式的主要困难取决于在多大程度上对湍流运动的物理现象和本质的了解。如何确定反映行星边界层湍流特征的湍流交换系数,多年来一直是人们感兴趣并受到重视的一个课题,在这方面,Prandtl的混合长理论迄今已得到极其广泛的应用^[1,2]。许多作者早先曾根据相似理论,直接寻找湍流交换系数与混合长之间的关系。濮培民^[3]运用相似理论,以统一的观点对大气近地面层的湍流运动作了详尽的物理分析。引进湍流能量平衡方程后,很多作者提出了不同形式混合长的卡曼综合公式,以使基本方程组闭合。基本想法源于湍流尺度可通过动力和热力因素的某种组合表示。也有作者放弃相似理论而从其他角度出发,如Busch等^[4]用数值方法求解混合长随高度的非定常变化。

对湍流现象的进一步认识,使我们有可能就上述问题提出新的见解和方法,显然湍流运动具有随机性特点。从大量观测事实看,形成湍流运动的涡旋单体,一方面由于空气密度不均而具有明显的“粒子”性,利用声雷达探测已经发现,在大气边界层内,湍流活动具有明显的团块结构^[5];另一方面,湍流还表现出“波动”性的特点,这从烟带的波动状延伸飘散和背风坡后气流的振动现象来看是容易理解的。很多作者运用能谱分解法研究湍流脉动,实际上就是考虑了“波动”这一点。虽然湍流的这种波动粒子性与微观粒子的“波粒二象性”^[6]本质迥异,但可以从中受到启发,Prandtl曾根据湍流运动与分子运动平均自由程的类比引入“混合长”概念,从而我们有理由在类比基础上考虑应用量子力学的观点和方法的可能性。

1986年8月19日收到,1986年12月3日收到修改稿。

二、基本方程

考虑水平均匀和定常情形,由 Ekman 近似,边界层湍流运动方程和能量平衡方程可表示为

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + f \frac{\sigma}{K} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dz^2} - f \frac{\eta}{K} = 0 \quad (2)$$

$$\alpha_b \frac{d}{dz} K \frac{db}{dz} - c \frac{b^2}{K} + \frac{\eta^2 + \sigma^2}{K} - \frac{g}{T_0} \alpha_T K \frac{d\theta}{dz} = 0 \quad (3)$$

其中 $\eta = K \frac{du}{dz}$, $\sigma = K \frac{dv}{dz}$ 为湍流剪应力在 x, y 方向的分量, f 为地转参数, K 为湍流交换系数, b 为湍流动能, $K_b = \alpha_b K$, $K_T = \alpha_T K$ 为动量湍流交换系数和热量湍流交换系数, $\frac{g}{T_0}$ 为浮力参数, θ 为空气位温, c, α_b, α_T 为无量纲系数。热流入量方程取以下形式的插值公式代替^[7]

$$K_T \frac{d\theta}{dz} = - \frac{D_0}{1 + \frac{1}{2} \varphi_a''(0) \frac{fz^2}{K}} + K\Pi$$

其中层结稳定度参数

$$D_0 = -\alpha_T K \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z \rightarrow 0}, \quad \Pi = \alpha_T \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty}$$

这样实际上已包含了辐射热流入量的影响。

根据大气中大量的湍流运动观测事实,我们不难把湍流场中的湍涡理解为具有某种平均属性(如温度、密度等)的单体,湍涡在运动过程中不断与环境大气进行质量和能量交换,其运动具有随机性、“粒子”性和“波动”性的特点。假定湍涡行为可以类比地用描写微观粒子运动状态的“波函数”^[6]刻划,则由于湍涡所处重力场与时间无关,势能仅仅是高度的函数,所以湍涡波函数 ϕ 满足定态薛定谔方程

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + b \frac{2M}{h^2} \phi = 0 \quad (4)$$

其中 h 为普朗克常数, M 为湍涡平均质量,从统计意义上说,同一尺度的湍涡质量相同。

我们于边界层任意高度 z 处隔离一厚度为 dz 的空气层。按波函数的物理意义,如果该高度上湍流运动愈强(即 K 愈大),对大量湍涡而言,表明在 dz 层内出现湍涡的数目愈多,对单个湍涡而言,表明在 dz 层内发现该湍涡的几率愈大;如果该高度上湍流运动愈弱(即 K 愈小),则情形相反。据波函数的统计诠释,于 dz 层内发现任一湍涡的几率正比于 $|\phi|^2 dz$; 而该层湍流运动的强弱变化可用交换系数 K 的微分 dK 表示。显然, dK 与 $|\phi|^2 dz$ 之间应成立以下关系

$$dK = \beta_0 \Omega |\phi|^2 dz \quad (5)$$

其中 β_0 为无量纲比例系数, Ω 为一综合作用函数,反映空气的动力、热力等综合因素对湍

流运动的影响。

边界层高度 H 将按照以下原则确定, 即在边界层上界, 湍流剪应力与下垫面附近的剪应力相比已足够小, 故有

$$\left| \frac{\eta^2 + \sigma^2}{u_*^2} \right|_{z=H} = \varepsilon \quad (6)$$

其中 u_* 为动力摩擦速度, ε 为积分控制小参量。

如果函数 Q 的形式给定, 则方程组 (1)–(6) 闭合。相应边界条件为

$$z \rightarrow 0 \text{ 时, } \eta \rightarrow u_*^2, \sigma \rightarrow 0, b \rightarrow u_*^2 c^{-\frac{1}{2}}, K \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0 \quad (7)$$

$$z \rightarrow \infty \text{ 时, } \eta \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0, b \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0 \quad (8)$$

三、 Q 函数和无量纲方程

我们把湍流场中的涡旋看成是具有平均特征尺度为 l 的空气微团, l 可表为

$$l = \begin{cases} k \bar{z}_f & z < z_m \\ k \bar{z}_r & z \geq z_m \end{cases} \quad (9)$$

其中 k 为卡曼常数, z_m 为转换高度, 即湍流发展最强烈的高度, 其下为惯常区, 其上为抑制区。 $\bar{z}_f$, $\bar{z}_r$ 分别为平均特征高度。 z_m 按以下条件确定。

$$\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=z_m} = 0 \quad (10)$$

对函数和变量选择适当的尺度, 取

$$\begin{aligned} \eta &= u_*^2 \eta_n, \sigma = u_*^2 \sigma_n, z = k u_* f^{-1} z_n \\ b &= c^{-\frac{1}{2}} u_*^2 b_n, K = k^2 u_*^2 f^{-1} K_n, |\phi|^2 = f u_*^{-1} |\phi_n|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

带下标 n 的均为无量纲量。原方程系可表为

$$\frac{d^2 \eta_n}{dz_n^2} + \frac{\sigma_n}{K_n} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \sigma_n}{dz_n^2} - \frac{\eta_n}{K_n} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\alpha \frac{d}{dz_n} K_n \frac{db_n}{dz_n} - \frac{b_n^2}{K_n} + \frac{\eta_n^2 + \sigma_n^2}{K_n} \\ &- \left[\frac{D_n}{1 + \frac{1}{2} \varphi_n'' \frac{z_n^2}{K_n}} + K_n \Pi_n \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \phi_n}{dz_n^2} + \lambda_n^2 l_n^2 b_n \phi_n = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dK_n}{dz_n} = \beta_0 f Q |\phi_n|^2 k^{-1} u_*^{-2} \quad (16)$$

$$|\eta_n^2 + \sigma_n^2|_{z_n=H_n} = \varepsilon \quad (17)$$

其中

$$l_n = \begin{cases} k \bar{z}_{fn} & z_n < z_{mn} \\ k \bar{z}_{rn} & z_n \geq z_{mn} \end{cases} \quad (18)$$

$$\left. \frac{dQ_n}{dz_n} \right|_{z_n=z_{nn}} = 0 \quad (19)$$

$$\alpha = k^2 \alpha_0 c^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$D_n = -\frac{g}{T_0} \cdot \frac{k^2 D_0}{f u_*^2} \quad (21)$$

$$\Pi_n = \frac{g}{T_0} \cdot \frac{k^2 \Pi}{f^2} \quad (22)$$

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{3k^2} \pi \rho (k u_* f^{-1})^2 u_*^2 c^{-\frac{1}{2}} \quad (23)$$

其中 ρ 为空气密度。相应无量纲边界条件为

$$z_n \rightarrow 0 \text{ 时, } \eta_n \rightarrow 1, \sigma_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 1, K_n \rightarrow 0, \phi_n \rightarrow 0 \quad (24)$$

$$z_n \rightarrow \infty \text{ 时, } \eta_n \rightarrow 0, \sigma_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0, \phi_n \rightarrow 0 \quad (25)$$

根据函数 Q 的物理意义,出于最一般的考虑,可以认为 Q 与浮力因素 $\frac{g}{T_0} \cdot \frac{P}{\rho c_p}$ (P 为感热通量, c_p 为空气定压比热)、科氏参数 f 、动力摩擦速度 u_* 以及高度 z 有关。按 π 定理, $\frac{g}{T_0} \cdot \frac{P}{\rho c_p}$, f , u_* , z 至多可构成两个独立无量纲量,易得

$$\frac{f}{k^2 u_*^2} \cdot Q \left(\frac{g}{T_0} \cdot \frac{P}{\rho c_p}, f, u_*, z \right) = Q_n \left(D_n, \frac{z_n}{k^2} \right) \quad (26)$$

其中无量纲函数 Q_n 为

$$Q_n = \left(1 - \frac{D_n}{\mu} \right) \left(\gamma - \frac{z_n}{k^2} \right) \exp \left(-\frac{z_n}{k^2} \right) \quad (27)$$

μ 和 γ 为数值模拟参数。 Q_n 满足下列极限条件

$$Q_n|_{z_n \rightarrow 0} \neq 0, \quad Q_n|_{z_n \rightarrow \infty} = 0 \quad (28)$$

四、解 和 讨 论

对于非线性方程 (15), 我们首先应用 WKB 方法结合边界条件 (24)、(25) 求得其渐近解(见附录)

$$|\phi_n|^2 = c_2^2 (I_n^2 b_n)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin^2 \left(\lambda_n \int_0^{z_n} \sqrt{I_n^2 b_n} dz_n \right) (c_2 \neq 0) \quad (29)$$

c_2 是波函数 ϕ_n 的归一化系数,原则上由归一化条件确定。

考虑计算优化及行星边界层不同高度上湍流运动的变化特点,于垂直方向作坐标变换

$$z_n = \xi_n^2 \quad (30)$$

于是有

$$\frac{d}{dz_n} = \frac{1}{2\xi_n} \cdot \frac{d}{d\xi_n} \quad (31)$$

$$\frac{d^2}{dz_n^2} = \frac{1}{4\xi_n^3} \cdot \frac{d^2}{d\xi_n^2} - \frac{1}{4\xi_n^3} \cdot \frac{d}{d\xi_n} \quad (32)$$

在行星边界层中,地转摩擦系数 $\chi = \frac{u_*}{kG}$ 和地面湍流剪应力与地转风之间的夹角 ω (又称风向全偏角)是反映边界层特征的两个重要参数。由 Ekman 近似得

$$u = u_g + \frac{u_*}{k} \cdot \frac{d\sigma_n}{dz_n} \quad (33)$$

$$v = v_g - \frac{u_*}{k} \cdot \frac{d\eta_n}{dz_n} \quad (34)$$

其中 u_g, v_g 为地转风分量。考虑到 $z_n \rightarrow z_{0n}$ 时, $u, v \rightarrow 0$, 故有

$$\chi = \frac{u_*}{kG} = \left[\left(\frac{d\eta_n}{dz_n} \right)^2 + \left(\frac{d\sigma_n}{dz_n} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \Big|_{z_n \rightarrow z_{0n}} \quad (35)$$

其中 χ 为地表摩擦系数, G 为地转风模量, 地面无量纲粗糙度 $z_{0n} = z_0 \cdot \frac{f}{ku_*}$, 风向全偏角

$$\omega = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\frac{d\eta_n}{dz_n}}{\frac{d\sigma_n}{dz_n}} \right\} \Big|_{z_n \rightarrow z_{0n}} \quad (36)$$

(35)、(36) 表明, 只要知道小 z_n 区内湍流剪应力的垂直变化, 就可求得 χ 和 ω 。由于小 z_n 范围内湍流剪应力与高度无关, 因此(35)、(36)中 $z_n \rightarrow z_{0n}$ 可直接写成 $z_n \rightarrow 0$ 。

数值求解时取参数 $k = 0.4$, $\alpha_b = 0.73$, $c = 0.046$, $\varphi_n'' = 20$, $\Pi_n = 3.5 \times 10^3$, $G = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 与文献 [7] 同。其余参量 $\rho = 1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $h = 1.05 \times 10^{-14} \text{ J} \cdot \text{s}$, $\mu = 10^3$, $\beta = 3.0 \times 10^{-6}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ 。计算步长以 $\Delta \xi_n = 0.0288$ 为最佳, 参数 γ 及湍流平均特征尺度 l_n 依不同的 D_n 有所变化(见表 1)。

表 1

D_n	γ	$\bar{\xi}_{f,n}$	$\bar{\xi}_{r,n}$
100	0.85	4.6	5.45
50	0.95	4.6	5.45
0	1.00	4.6	5.20
-50	1.10	4.6	4.85
-100	1.25	4.6	4.85

五、结果分析

图 1、图 2 是无量纲湍流交换系数、湍流动能和湍流剪应力的垂直分布廓线。易见, 层结愈不稳定, 转换高度 z_m 愈大, 即湍流发展强烈的区域离地面愈高, 且脉动动能愈大。一般 z_m 约是边界层高度的 $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{4}$ 。 z_m 以下交换系数随高度迅速增加, z_m 以上随高度迅速减小(图 1)。中性和稳定层结下, 动能值变化于 0~1 之间; 不稳定层结下, 转换高度附近的动能值大于其边界值, 这是由于热力因素在产生涡旋能量中的作用而引起的(图

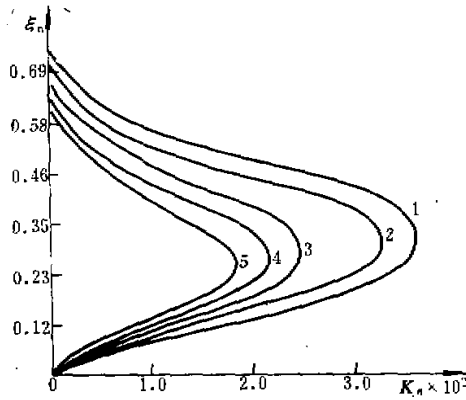


图1 无量纲湍流交换系数
(1) $D_n = -100$, (2) $D_n = -50$, (3) $D_n = 0$,
(4) $D_n = 50$, (5) $D_n = 100$

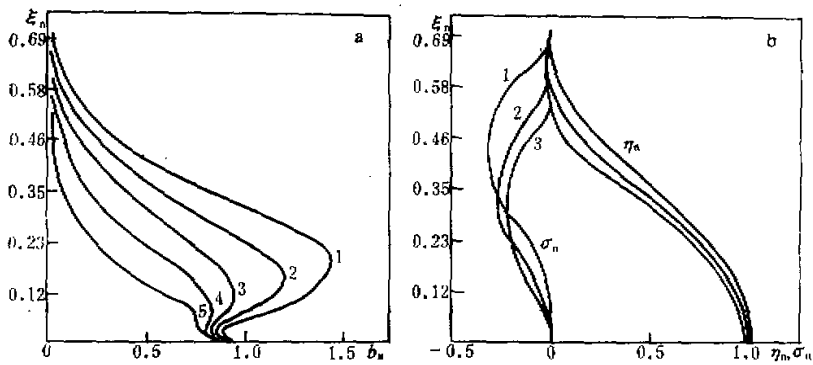


图2 无量纲湍流 (a) 动能
(1) $D_n = -100$, (2) $D_n = -50$, (3) $D_n = 0$, (4) $D_n = 50$, (5) $D_n = 100$
(b) 剪应力
(1) $D_n = -100$, (2) $D_n = 0$, (3) $D_n = 100$

2(a)). 不同层结条件下的湍流剪应力分布廓线,从整体变化特点看与文献[1]非常一致(图2(b)).

图3、图4为湍流能量平衡方程各分量的垂直分布廓线。由平均运动产生的能量(图3(a))和能量耗散(图3(b))在边界层底部变化非常剧烈,其数值远远大于其余两个分量,且层结愈不稳定量值愈大。这表明,在边界层底部这两项在能量平衡中起着决定性的作用。位能项在边界层中明显地表现出层结因素的影响。稳定层结下,湍流克服浮力做功,该项为正,不稳定层结下,浮力对湍流做功,能量减少,该项为负。中性层结时,近地面层位能项趋于零,其上由于受边界层顶温度层结影响,该项维持较小的正值(图4(a))。能量扩散的作用是使湍流能量在边界层内由下往上输送。因此,扩散项在边界层底部和上

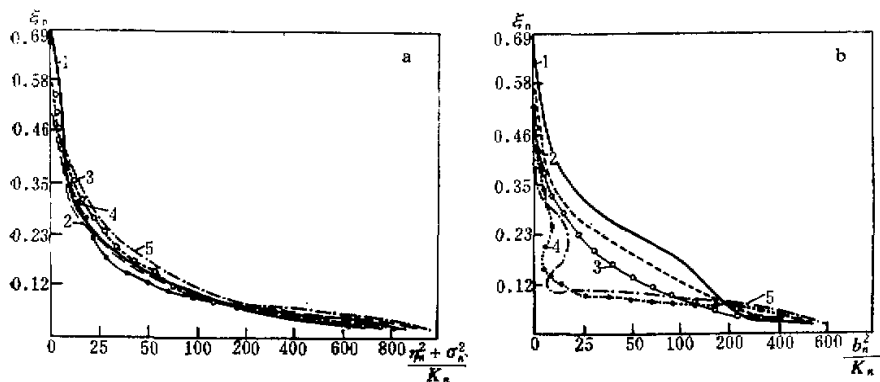


图 3 无量纲湍流 (a) 动能产生项 (b) 耗散项
(1) $D_n = -100$, (2) $D_n = -50$, (3) $D_n = 0$, (4) $D_n = 50$, (5) $D_n = 100$

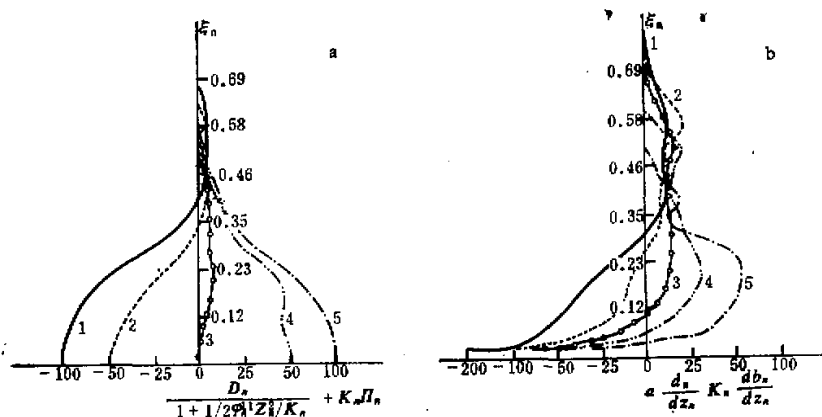


图 4 无量纲湍流 (a) 位能项 (b) 扩散项
(1) $D_n = -100$, (2) $D_n = -50$, (3) $D_n = 0$, (4) $D_n = 50$, (5) $D_n = 100$

部自然应具有不同的符号, 图 4(b) 中的分布廓线与上述分析是一致的。值得注意的是, 惯常内层结愈不稳定则扩散项发生变号的高度愈高, 而在中性和稳定层结时, 变号高度远低于不稳定时情形。这表明湍流运动愈强烈时, 扩散能量自下往上输送得愈高。抑制区内, 扩散项所起的作用最为显著。

由于参数化方案的差异, 本文得到的边界层高度 H_n 略大于文献 [7] 的计算结果。中性和稳定层结下两者变化特点比较一致, 不稳定层结时本文得到的 H_n 随 D_n 的变化更加明显。这表明 H_n 与层结状况是密切有关的。

图 5、图 6 反映了地转摩擦系数和风向全偏角同 Rossby 数及 D_n 的关系以及相应的实验结果。图 5 中本文计算结果同实验资料吻合很好, 尤其在近中性层结下。图 6 中当 Rossby 数较小时, 本文计算值大于文献 [1] 的结果, 当 Rossby 数大于 10^4 时, 两者很

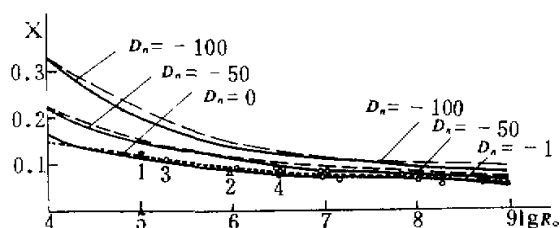


图5 地转摩擦系数与 Rossby 数关系

---文献[1]计算值, —本文计算值

(1)布鲁克霍文 (Brookhaven), 1950年7月 (2)布鲁克霍文, 1950年11月25日
(3)莱海 (Lettau) (4)汉福德 (Hanford), 1959年。

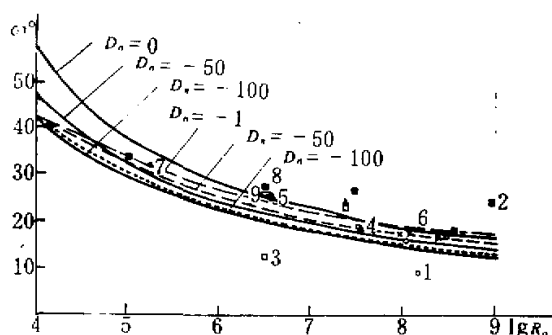


图6 风向全偏角与 Rossby 数关系

---文献[1]计算值, —本文计算值

(1)西姆利湖 (О. Симли) (莱海) (2)舍帕尔特 (Шепард) 和奥马尔 (Омар) (3)乌佩文 (Упэвен) [多普松 (Добсон)] (4)莱普齐克 (Лейпциг) (莱海) (5)奥尼尔 (О'нейл) (中性平衡) (6)北海 [杰弗里斯 (Джефрис)] (7)布鲁克霍文 (8)哈尔丁纳 (Халтинер) 和马丁 (Мартин) (中性平衡) (9)美国大草原 [伯恩斯坦 (Бернштейн)]

接近,而且与实验资料基本符合。

六、结 语

在定常、水平均匀情形下,考虑到交换系数不是外参数,故由水平基本运动方程和湍流能量平衡方程构成的方程组不闭合,基于湍流与微观粒子的类比,借用量子力学的数学处理方法,设计了一个行星边界层湍流特征的非线性模式。考虑到湍流运动特点及数值计算优化,对垂直自变量采用了二次幂函数坐标变换。主要结论如下:

(1) 湍流在表象上具有某种相似的“量子”化特征,从类比的意义上出发,假定其运动状态可以用满足薛定谔方程的波函数描写。

(2) 根据湍流运动特点,行星边界层以转捩高度为界可划分为惯常区和抑制区。转

转捩高度约是边界层高度的 $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{4}$, 主要取决于温度层结。

(3) 由平均运动产生的能量和能量耗散在湍流能量平衡中起着决定性作用; 转捩高度以上, 能量扩散对湍流运动的维持最为重要。

(4) 边界层高度与层结状况有关, 层结愈不稳定, 湍流运动愈强烈, 则边界层高度发展得愈高。层结稳定时, 边界层高度相对较低。

(5) 计算所得地转摩擦系数和风向全偏角同 Rossby 数的关系与实验结果基本一致。

致谢: 本文承中国科学院南京地理研究所濮培民副研究员指导, 南京气象学院王鹏飞教授提出了有益建议, 在此一并致谢。

附 录

对于非线性方程 (15), 令

$$B_n(x_n) = P_n b_n(x_n) \quad (A1)$$

并设 ϕ_n 之形式解

$$\phi_n(x_n) = \exp(F_n(x_n)) \quad (A2)$$

代入 (15), 有

$$F_n'' + (F_n')^2 + \lambda_n^2 B_n = 0 \quad (A3)$$

暂略去高阶项, 即假定

$$|F_n''| \ll |(F_n')^2| \quad (A4)$$

故有

$$F_n' = \pm i \lambda_n \sqrt{B_n} \quad (A5)$$

再将略去的高阶项估计在内

$$F_n'' = \pm i \frac{\lambda_n}{2} \cdot \frac{B_n'}{\sqrt{B_n}} \quad (A6)$$

代入 (A3) 后积分, 得

$$F_n = \pm i \lambda_n \int_0^{x_n} \sqrt{B_n} dx_n + \ln B_n^{-1/4} \quad (A7)$$

由于 $B_n \geq 0$, 故由 (A2) 得

$$\phi_n(x_n) = c_1 B_n^{-1/4} \cos \left(\lambda_n \int_0^{x_n} \sqrt{B_n} dx_n \right) + c_2 B_n^{-1/4} \sin \left(\lambda_n \int_0^{x_n} \sqrt{B_n} dx_n \right) \quad (A8)$$

其中 c_1, c_2 为待定常数。

由 (A5)、(A6) 知, (A4) 等价于

$$|\lambda_n| \gg \frac{1}{2} \left| \frac{B_n'}{\sqrt{B_n}} \right| \quad (A9)$$

对于本模式情形, λ_n 确是一个足以满足上式的大参数。

由边界条件 (24) 知

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} c_1 B_n^{-1/4} \cos \left(\lambda_n \int_0^{x_n} \sqrt{B_n} dx_n \right) \approx 0 \quad (A10)$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} c_2 B_n^{-1/4} \sin \left(\lambda_n \int_0^{x_n} \sqrt{B_n} dx_n \right) = 0 \quad (A11)$$

故必须 $c_1 = 0$ 。于是有

$$|\psi_n|^2 = c_2^2 (I_n^2 b_n)^{-1/2} \cdot \sin^2 \left(\lambda_n \int_0^{z_n} \sqrt{I_n^2 b_n} dz_n \right) \quad (c_2 \neq 0) \quad (A12)$$

c_2 即为归一化系数,原则上由归一化条件确定。上式中 $b_n = 0$ 的点 z_n 对渐近解来说是个支点,这种奇异性是由于采用该近似方法引起的。由边界条件(25)式知,当 $z_n \rightarrow \infty$ 时上述近似失效,故 c_2 不宜由(25)式或归一化条件确定,由于(16)式中尚有一比例系数 β_n ,故 c_2 将与 β_n 合并,由数值模拟确定。

参 考 文 献

- [1] И. М. Бобылева, С. С. Зилитинкевич, Д. Л. Лайхтман, 1965, Турбулентный режим в термически-стратифицированном планетарном пограничном слое атмосферы. Междун. colloquium по микроструктуре атмосферы и влиянию турбулентности на распространение радиоволн. Наука, М., 126—138.
- [2] Д. Л. Лайхтман 著, 濮培民译, 大气边界层物理学, 科学出版社。
- [3] 濮培民, 1964, 大气近地面层中不同温度层结下的湍流运动, 气象学报, Vol. 34, No. 2, 211—224.
- [4] Busch, N. E., Simon W. Chang, Richard A. Anthos, 1976, A multi-level model of the Planetary Layer suitable for use with mesoscale dynamic models. *Journal of Applied Meteorology*. Vol. 15, No. 9, 909—919.
- [5] 周明煜等, 1981, 大气边界层中湍流场的团块结构, 中国科学, 5 期, 614—622.
- [6] 曾谨言编著, 1984, 量子力学, 科学出版社。
- [7] Лайхтман, Д. Л. Е. В. Курцова, 1980, Модель планетарного пограничного слоя. Изв. АН СССР. ФАО, No. 7, 690—697.