

旋转二维可压缩流动的谱和特征函数

II: 谱和谱函数结构的分析

曾庆存 李荣凤 张 铭

(LASG, 中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文第一部分(I)已给出了线性化旋转二维可压缩流动方程的谱分布,并作了初步分析.本部分(II)对这些谱及谱函数作进一步的分析讨论.设基流是低速流,此时可用摄动法求得谱和谐函数,将它们与用差分法所得结果进行比较,表明二者吻合得很好.摄动法中的离散谱初级近似就是无基流时的相应的谱,而连续谱对应的谱函数初级近似则与准地转模式的结果一致.由初级近似和一级修正项可以清楚地说明计算所得的谱和谐函数的许多重要性质.

在低速基流情况下:(1)重力-惯性波为准简谐波,基流和可变的 Coriolis 参数只给以较小的修正.(2)由于基流在 Coriolis 力作用下使自由表面有一坡度, Kelvin 波必定具有横穿波射线的速度分量,同时顺传和逆传的 Kelvin 波不再在形态上相似;当基流愈强时上述两性质愈明显; Coriolis 参数随空间的变化也改变了顺传和逆传波的相似性,此外, Kelvin 波是非频散的.(3)不为零的基流或科氏参数的变化使慢波离散谱变为非简并的即分立的,它们或者有无穷多个且基流流速为相速的聚点(当基流为常数时),或者只有有限个,甚至不存在;而当基流有切变时则有连续谱.对应于离散谱的谱函数为准简谐波;而对应于连续谱的谱函数则为广义解,但有有限能量.

本问题的谱函数与其伴随算子的谱函数正交,满足同样边界条件的一切扰动可按本问题的谱函数展开.在低速基流情况下,可用摄动法求解,初级近似下的伴随算子是自伴的.

关于高速基流情况的结果将在本文的第三部分(III)发表.

关键词: 离散谱; 连续谱; 广义解; 正交性; 展开定理.

为便于阅读,这里重新写出本特征值问题,但略作改写,有

$$\begin{cases} -(f - \bar{U}')v + mc_0^2 \phi = \tilde{\sigma}u, \\ -fu - c_0^2 d\phi/dy = \tilde{\sigma}v, \\ mu + dv/dv = \tilde{\sigma}\phi, \end{cases} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$$v(0) = v(1) = 0, \quad (\text{A} \cdot 2)$$

其中 $\tilde{\sigma} = \sigma - m\bar{U}(v)$, (A·3)
 σ 即为特征值(频率); (u, v, ϕ) 为特征函数(向量), 依赖于 y , (u, v) 本是速度乘上基流的自由表面重力位势 c_0^2 . 其实(A·1)早在本文第一部分(即(I))中出现过, 只不过那里基流 $\bar{U}$ 为常数^[1].

一、 $\bar{U}=0$ 和 f 为常数情况

$\bar{U}=0$ 和 f 为常数时, c_0^2 也为常数, 问题最简单, 其解答已为人所熟知. 但将一般情况和这最简单情况进行比较是很有益的, 我们这里先列出最简单情况下的结果.

1. 简谐波

在(I)中已列出了相应问题(A·1)和(A·2)的解:

$$(u, v, \phi)_{kn} = (A, iB, C)_{kn} e^{inx}, \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 1)$$

$$k = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, \dots,$$

分别对应于离散谱

$$\sigma_{1n} = 0, \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 2)$$

$$\sigma_{2n} = \left[f^2 + c_0^2(m^2 + n^2\pi^2) \right]^{1/2}, \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 3)$$

$$\sigma_{3n} = - \left[f^2 + c_0^2(m^2 + n^2\pi^2) \right]^{1/2}, \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 4)$$

其中 $(A, B, C)_{kn}$ 为依赖于 k 和 n 的三常数, 我们将在第二节给出. 这里要指出的是: 无论是快波(重力-惯性波, $n=2, 3$), 还是慢波($n=1$), 特征函数沿 y 方向的结构都是简谐波. 所不同的是速度场 (A, B) 和压力场 (C) 的关系.

2. Kelvin 波

除(II·1·1)外, (A·1)和(A·2)还有 $v \equiv 0$ 的解, 即 kelvin 波. (由于疏忽, 在(I)中没有提及). 其实, 取 $v \equiv 0$, 则 u 和 ϕ 不可能为简谐波结构, 而有

$$\begin{cases} mc_0^2 \phi = \sigma u, \\ -fu - c_0^2 d\phi/dy = 0, \\ mu = \sigma \phi, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 5)$$

故有解

$$\sigma^2 = m^2 c_0^2, \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 6)$$

$$u = -f_0^{-1} c_0^2 d\phi/dy = (\sigma/m)\phi, \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 7)$$

$$d\phi/dy + (f\sigma/mc_0^2)\phi = 0. \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 8)$$

当 f 为常数 f_0 时就有

$$\begin{cases} \sigma_{2,0} = mc_0, \\ u_{2,0} = c_0 \phi_{2,0}, \quad v_{2,0} = 0, \\ \phi_{2,0} = C_{2,0} \exp \left\{ -f_0 c_0^{-1} (y - 1/2) \right\}; \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 9)$$

$$\begin{cases} \sigma_{3,0} = -mc_0, \\ u_{3,0} = -c_0 \phi_{3,0}, \quad v_{3,0} = 0, \\ \phi_{3,0} = C_{3,0} \exp \left\{ f_0 c_0^{-1} (y - 1/2) \right\}. \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 10)$$

上二式中我们已分别取了 $k=2, 3; n=0$, 以便和 (II · 1 · 1) — (II · 1 · 4) 衔接.

Kelvin 波相速为 $\pm c_0$, 它们应归属于重力-惯性波支. 它们沿 x 方向的结构确实与重力波无异, 但在 y 方向的结构却满足地转平衡, 且是单调变化的. 其次, c_0 也是重力-惯性波的最小相速, 比较接近于慢波. 故 Kelvin 波具有某些混合的性质, 也可称为混合型波. 还有, 与其他重力-惯性波不同, Kelvin 波不频散.

不妨取 $C_{2,0} = C_{3,0} > 0$, (II · 1 · 9) 和 (II · 1 · 10) 表明: 逆向传播的 Kelvin 波可以通过用 $(-x, -y)$ 换 (x, y) 而得到. 另外, ϕ 和 u (以沿波传播方向为正) 在横过波射线的方向上向右增加, 扰动质量在右岸堆积. 其本质是必须有压力梯度平衡 Coriolis 力, 否则必将引起横过波射线的速度分量 (即 v).

Kelvin 首先发现在海洋中有与岸线平行传播而波形只在岸线附近明显的波, 后来人们就称之为 Kelvin 波. 显然, 刚壁边界的束缚是重要因子. 当 f 随空间变化时, Matsuno^[2] 发现: 即使没有边界约束, 也有类似的波存在, 波形只在赤道附近明显, 但只有东传的一支, 而西传者被抑制了. 不过, 由 (II · 1 · 6) — (II · 1 · 8) 可见, 即使在赤道附近, 只要有南北边界, 东传和西传的两支 Kelvin 波是同时存在的.

计入 Kelvin 波, 一切有有限能量的扰动都可展开如下:

$$\begin{aligned} (u, v, \phi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 a_{mkn} (A, iB, C)_{mkn} e^{i(m\lambda + n\kappa) - \sigma_{mkn} t} \\ + \sum_{k=2}^3 a_{mko} (U_{k,o}, \phi_{k,o}) e^{i(m\lambda - \sigma_{mko} t)}. \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 11)$$

(由于疏忽, 在 (I) 中漏写了右端第二项).

3. 简并情况下谱函数的重组、波包和拍

注意到 $\sigma=0$ 是无限重特征值 (在物理学上称无穷维简并). 在简并情况下谱函数可以重组, 以便得到更方便的空间基底 (正交的或不正交的). 今对慢波特征函数作以下重组:

为方便起见, 略去下标 k , 由 (II · 1 · 1) 知: $\sigma=0$ 的解为

$$u_n = a_n \cos n\pi y, \quad v_n = -\frac{ma_n}{n\pi} \sin n\pi y, \quad \phi_n = -\frac{fa_n}{n\pi c_0} \sin n\pi y, \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 12)$$

其中 a_n 由归一化条件 (能量为 1 单位) 定出,

$$a_n^2 \left[1 + \left(\frac{m}{n\pi} \right)^2 + \left(\frac{f}{n\pi c_0} \right)^2 \frac{1}{4c_0^2} \right] = 1,$$

且不妨取 $a_n > 0$, 从而有

$$a_n = 2c_0 [1 + O(n^{-2} \pi^{-2})]. \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 13)$$

任给 n_1 和 n_2 , 则相应谱函数之差仍为谱函数. 记 $n_l = n^* + 1, n^* + 2, \dots$; 并记

$$\begin{cases} n_l = n^* + l/2, & \delta_l = l/2, \\ U_l = U_{n^*} - U_{n^* + l}, \\ l = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 14)$$

就有

$$U_l = 2C_0 \{ \sin n_l \pi y \cdot \sin \delta_l \pi y + O(n^{*-2} \pi^{-2}) \cos n^* \pi y + O([n^* + l]^{-2} \pi^{-2}) \cos(n^* + l) \pi y \}. \quad (\text{II} \cdot 1 \cdot 15)$$

当 n^* 足够大时, u_l 主要项为上式右端第一项, 它是主频为 n_l 而由半波长为 l 的波所调制的波包, 并出现拍现象. 这说明将尺度不大的扰动按波包展开是可能的和有理的.

二、低速基流情况(一)离散谱及谱函数

1. 摄动法

我们先讨论低速基流对谱和谐函数的影响. 低速基流是指 $O(\bar{U}) \ll O(C_0)$. 在这里, 我们已取 $O(C_0) = 1$, 故 $O(\bar{U}) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$ 为小参数. 今用摄动法, 且以 $\bar{U} \equiv 0$ 时的结果作为初级近似. 令

$$\begin{cases} \bar{U}(y) = \varepsilon(\bar{U}_0 + \bar{U}_1(y)) + \varepsilon^2 \bar{U}_2(y) + \dots, \\ f = f_0 + \varepsilon f_1(y) + \varepsilon^2 f_2(y) + \dots, \\ c_0^2 = c_{00}^2 - \int_{1/2}^y f \bar{U} dy = c_{00}^2 + \varepsilon c_1(y) + \varepsilon^2 c_2(y) + \dots, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 1)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 + \varepsilon \tilde{\sigma}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\sigma}_2 + \dots, \\ (u, v, \phi) = (u_0, v_0, \phi_0) + \varepsilon(u_1, v_1, \phi_1) + \varepsilon^2(u_2, v_2, \phi_2) + \dots, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 2)$$

其中 $f_1 = \beta(y - 1/2)$, $dq/dy = -f_0(\bar{U}_0 + \bar{U}_1)$; $\bar{U}_0, f_0, c_{00}^2, \beta$ 都为常数, 并取

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 - \varepsilon m \bar{U}_0, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 3)$$

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 - m \bar{U}_1(y), \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 4)$$

以便在初级近似中即考虑入多卜勒效应, σ_0, σ_1 是待求常数. 零级近似方程和边界条件为

$$\begin{cases} -f_0 v_0 + m c_{00}^2 \phi_0 = \tilde{\sigma}_0 u_0, \\ -f_0 u_0 - c_{00}^2 d\phi_0/dy = \tilde{\sigma}_0 v_0, \\ m u_0 + d v_0 / dy = \tilde{\sigma}_0 \phi_0. \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 5)$$

$$v_0(0) = v_0(1) = 0, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 6)$$

一级近似方程和边界条件为

$$\begin{cases} -f_0 v_1 + m c_{00}^2 \phi_0 - \tilde{\sigma}_0 u_1 = (f_1 - \bar{U}_1') v_0 - m c_1 v_0 + \tilde{\sigma}_1 u_0, \\ -f_0 u_1 - c_{00}^2 d\phi/dy - \tilde{\sigma}_0 v_1 = f_1 u_0 + c_1 d\phi_0/dy + \tilde{\sigma}_1 v_0, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 7)$$

$$\begin{cases} m u_1 + d v_1 / dy - \tilde{\sigma}_0 \phi_1 = \tilde{\sigma}_1 \phi_0, \\ v_1(0) = v_1(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 8)$$

高级近似方程可逐次推出, 此处从略.

零级近似方程与上节者无异, 只不过 $\tilde{\sigma}_0$ 代替了那里的 σ .

2. 慢波, 它的结构和计算伪拍现象

将 $\tilde{\sigma}_0 = 0$ 及取 (u_0, v_0, ϕ_0) 为 (II · 1 · 12), 代入 (II · 2 · 7) 和 (II · 2 · 8), 即可求出慢波谱点和谱函数的修正项. 为简单起见, 下面我们将略去下标 k 和 n .

由 (II · 2 · 7) 第一、二式消去 ϕ_1 , 得

$$\begin{aligned} d v_1 / dy + m u_1 = -\phi_0 \left\{ \sigma_1 \frac{c_{00}^2}{f_0^2} (m^2 + n^2 \pi^2) + m (\bar{U}_0 + \bar{U}_1) \right. \\ \left. + m \frac{c_{00}^2}{f_0^2} \left[(\beta - \bar{U}_1'') - \bar{U}_1 (m^2 + n^2 \pi^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

将上式代入 (II · 2 · 7) 第三式, 得到

$$\begin{aligned} \sigma_1 = -\frac{m}{1 + c_{00}^2 (m^2 + n^2 \pi^2) / f_0^2} \\ \left\{ \bar{U}_0 + \frac{c_{00}^2}{f_0^2} (\beta - \bar{U}_1'') - \frac{c_{00}^2}{f_0^2} (m^2 + n^2 \pi^2) \bar{U}_1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 9)$$

我们要求 σ_1 为常数, 故上式只当 $\bar{U}_1$ 不依赖于 y 时才成立. 这或许说明了: 只有低速基流同时还是缓变的 ($\bar{U}_1, \bar{U}_1''$ 量级为 $O(\varepsilon)$) 才能由摄动法求得慢波离散谱; 而当低速基流是非缓变的, 或者慢波谱不存在, 或者得用另外摄动法求解.

下面我们就取 $\bar{U}_1 \equiv 0$, 从而 $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1$, 不难发现有解

$$v_1 \equiv 0, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 10)_1$$

从而由 (II · 2 · 7) 第一、三式得

$$u_1 = (\sigma_1 / m) \phi_0, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 10)_2$$

$$\phi_1 = f_1 v_0 - m c_1 \phi_0 + \sigma_1 u_0. \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 10)_3$$

因 σ_1 满足 (II · 2 · 9), 故解 (II · 2 · 10) 也满足 (II · 2 · 7) 第二式, 即确是本问题的解.

由 (II · 2 · 9), (II · 1 · 12) 及 (II · 2 · 10) 可知, 当 n 够大时,

$$O(\sigma_1) = O(1 / [m^2 + n^2 \pi^2]), \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 11)$$

$$O(u_0) = O(1), O(v_0) = O(1 / n\pi), O(\phi_0) = O(1 / n\pi), \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 12)$$

$$v_1 \equiv 0, O(u_1) = O(n^{-3} \pi^{-3}), O(\phi_1) = O(1 / n\pi). \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 13)$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_1, u_1, v_1, \phi_1$ 都趋于 0.

综合零级近似和一级修正的分析, 可得:

在低速且缓变基流情况下有:

(1) 在 $\bar{U}$ 为常数但不为零情况下, 在基流流速近旁有无穹多个分立的离散慢波谱点, 即 $\sigma = \sigma_n$, 且 $\sigma_n \rightarrow m\bar{U}$, 即以 $m\bar{U}$ 为聚点. (这在 (I) 中有论证, 而摄动法给出更明白的结果). 且当 $\bar{U} > 0$ 时, 所有 $\sigma_n < m\bar{U}$. 当 $\bar{U}$ 不为常数但为缓变者, 即 $\bar{U}_t \equiv 0$, 但 $\bar{U}_y(y) \neq 0$, 也许可以得到与上述相同的结论, 但我们既未作严格的分析证明, 也没作数值计算验证.

(2) 慢波特征函数为准简谐波, 特别是当 n 足够大 (即沿 y 方向的尺度足够小) 时更是如此. 当 $|n/m|$ 足够大时, 主要分量为准带状环流, 即 $O(v) \ll O(u)$, 这由慢波的准地转性和准无辐散性不难推知.

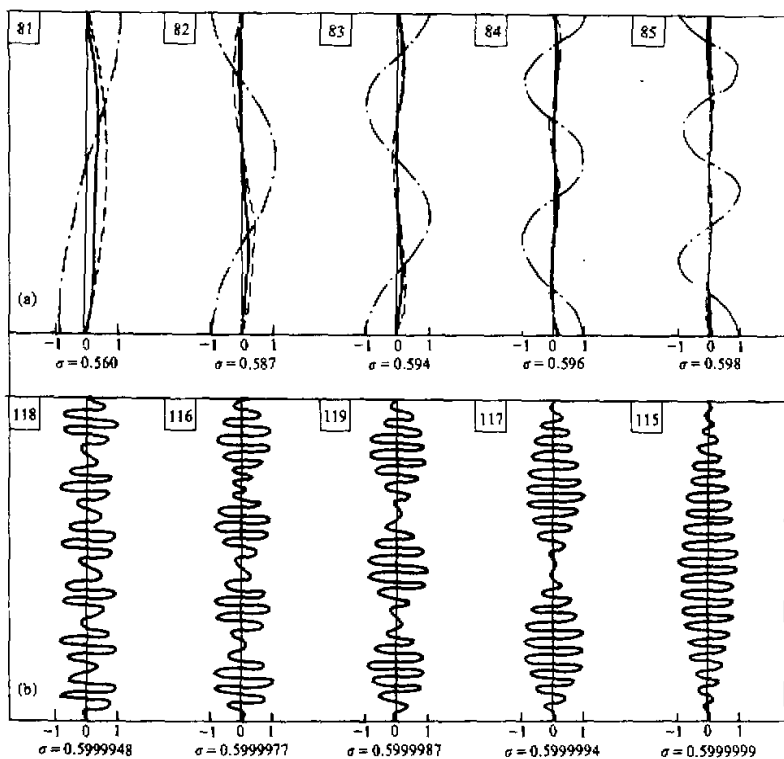


图 1 用差分法算得的慢波谱点和谱函数

纵坐标为 y , 图下数目字为特征频率 σ_n , 方框内数字为计算机输出的特征值序号 $\bar{n}$. 计算中取 $N=40$.

$m=2, f=1+0.3v, \bar{U}=0.3, c_{00}^2=1$. (a) 离聚点最远的五个谱点, $\cdots \cdots u, \cdots \cdots v, \cdots \cdots \phi$.

(b) 离聚点最近的五个谱点, 只给出 u 的曲线.

图 1 是按 (I) 中差分格式算得的结果, 其中取了格点数 $N=40, m=2, f=1+0.3v$.

$\bar{U}=0.3$, (即 $\varepsilon=0.3, f_0=1.15, \beta=1, \bar{U}=\varepsilon\bar{U}_0, \bar{U}_0=1$). 图 1.a 给出离聚点最远的 5 个离散谱及相应的归一化特征向量, 即

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{C_0^2} \left(u_{kn}^2 + v_{kn}^2 \right) + \phi_{kn}^2 \right] dy = 1, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 14)$$

此处 $k=1$. 由图可见特征波动为准简谐波. 图 1.b 给出最靠近聚点的几个谱点和谐函数 u_{1n} . 虽然从理论上说 σ_{1n} 各不相同, 然而 $u_{1n} \approx a_n \cdot \cos n\pi y$ 也各自为准简谐波. 但计算出来的这五个 σ_{1n} 值与 $m\bar{U}$ 之差已为 $-(0.42 \sim 0.01) \times 10^{-5}$, 也许已在计算机误差范围之内, 计算得的 u_{1n} 竟然呈现出 (II · 1 · 15) 那样的波包和拍. 为什么在有很微小误差时计算机自动导致谱函数重组化? 这也许对计算机科学和软件研究是有趣的.

3. Kelvin 波

当基流不为零时, Kelvin 波必有横过波射线的速度分量 v . 其实, 即使

$\bar{U}$ 为常数, 则因 C_0^2 为 y 的函数, (II · 1 · 5) 无解.

零级近似仍由 (II · 1 · 5) 决定, 只需取其中的 f, C_0^2 和 σ 为 f_0, C_{00}^2 和 $\tilde{\sigma}_0$. 仍略去下标 k 和 n , 将 $v_0=0$ 代入 (II · 2 · 7), 经过运算可得

$$\frac{dv_1}{dy} - \left(\frac{mf_0}{\tilde{\sigma}_0} \right) v_1 = \left(2\sigma_1 - 2m\bar{U}_1 + m^2 c_1 \tilde{\sigma}_0^{-1} \right) \phi_0, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 15)$$

其中

$$\tilde{\sigma}_0^{\pm} = \pm mc_{00}, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 16)$$

$\tilde{\sigma}_0^-$ 为沿 x 正方向传播的波, $\tilde{\sigma}_0^+$ 为沿反方向传播者. 又 v_1 需满足边界条件 (II · 2 · 8).

先取 $v_1(0) = 0$, 由 (II · 2 · 16) 得

$$v_1 = e^{f_0 m y / \tilde{\sigma}_0} \int_0^y \left\{ 2\sigma_1 - 2m\bar{U}_1 + \frac{m^2 q}{\tilde{\sigma}_0} \right\} \phi_0 e^{-f_0 m y / \tilde{\sigma}_0} dy. \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 17)$$

将 ϕ_0 代入上式, 并要求 $v_1(1) = 0$, 即得

$$\sigma_1 = \frac{-mf_0}{\tilde{\sigma}_0 [1 - \exp(-2mf_0/\tilde{\sigma}_0)]} \int_0^1 \left\{ -2m\bar{U}_1 + \frac{m^2}{\tilde{\sigma}_0} c_1 \right\} e^{-2mf_0 y / \tilde{\sigma}_0} dy. \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 18)$$

将 (II · 2 · 17) 和 (II · 2 · 18) 代入 (II · 2 · 7) 第一、二式, 即得决定 u_1 和 ϕ_1 的方程为

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dy} + \frac{f_0 m}{\tilde{\sigma}_0} u_1 = & - \left[\left(\frac{f_0}{m\tilde{\sigma}_0} \right) \frac{dv_1}{dy} + v_1 \right] - \left(\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0} \right) \frac{du_0}{dy} \\ & - \left[\frac{d\tilde{\sigma}_1}{dy} + mf_1 \right] \frac{u_0}{\tilde{\sigma}_0} + \frac{m}{\tilde{\sigma}_0} c_1' \phi_0, \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dy} + \frac{f_0 m}{\tilde{\sigma}_0} \phi_1 = & \left[-m^2 + f_0^2 c_{00}^{-2} \right] \frac{v_1}{\tilde{\sigma}_0} + \frac{f_0}{c_{00}^2} \left(\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_0} - \frac{f_1}{f_0} \right) u_0 \\ & + c_1 \left[f_0 \left(\frac{m}{\tilde{\sigma}_0} \right)^3 \phi_0 + \left(\frac{m}{\tilde{\sigma}_0} \right)^2 \frac{d\phi_0}{dy} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 20)$$

将(II·2·8)代入(II·2·7)第一式即得关于 u_1 和 ϕ_1 的边界条件为

$$mc_{00}^2 \phi_1 - \tilde{\sigma}_0 u_1 = \tilde{\sigma}_1 u_0 - mc_1 \phi_0, \quad (y=0, 1). \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 21)$$

求出满足(II·2·19), (II·2·20)满足边界条件(II·2·21)的解 u_1, ϕ_1 是不难的.

当基流还是缓变的, 即 $\bar{U}_1 = 0$, 由(II·2·18)得

$$\sigma_1^{\pm} = \frac{m\bar{U}_0}{4} \left[1 - \left(\frac{\pm f_0}{c_{00}} \right) \text{cth} \left(\frac{\pm f_0}{c_{00}} \right) \right]. \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 22)$$

综上分析可得, 在低速基流情况下有

(1) 由于基流在 Coriolis 力作用下伴随有自由表面倾斜, Kelvin 波必有横过波射线的速度分量 v, u 和 ϕ 也不再完全满足地转平衡. 当基流越强时, 上述特性将更明显.

(2) 若 f 不为常数, 或基流不为零, 或由此二者共同作用, “介质”不再为各向同性, 顺传波 (u^+, v^+, ϕ^+) 和逆传波 (u^-, v^-, ϕ^-) 具有不同结构, 后者不能由前者通过坐标变换而得

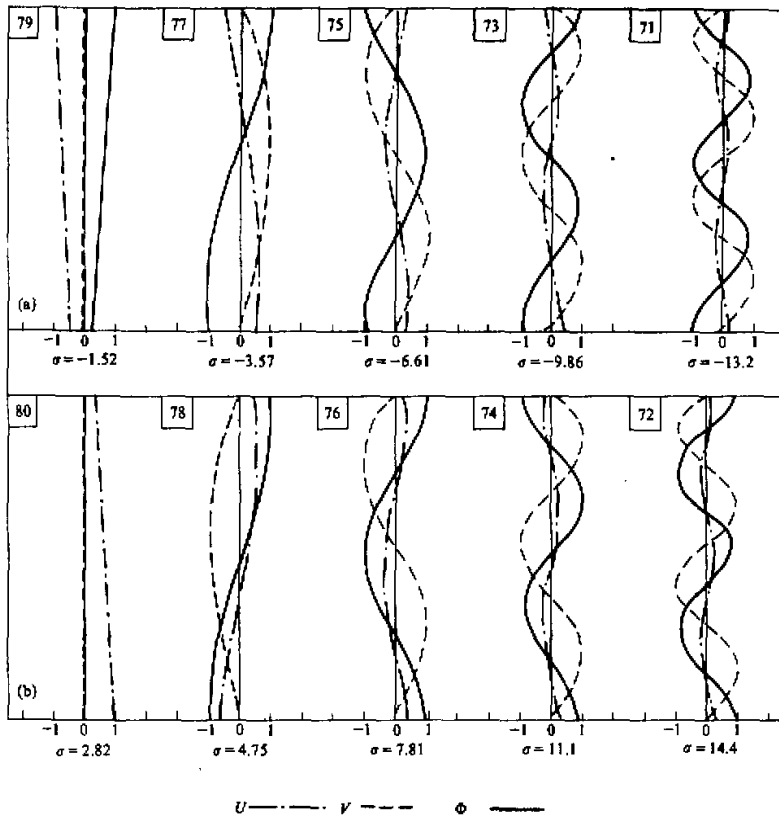


图 2 用差分法算得的 Kelvin 波和部分重力-惯性波的谱点和谱函数, 参数和说明同图 1.a

a(上图)为西传波, b(下图)为东传波. $\bar{n} = 79$ 和 80 者为 Kelvin 波, 其余为重力-惯性波

出. 特别是当 $f_0=0, f_1=\beta y$ 时, 若南北边界延至无限, 则西传波被完全抑制了 (Matsuno 解).

(3) 准确到一级近似, Kelvin 波是非频散的, 这由 $\tilde{\sigma}_0/m$ 不依赖于 m 和 σ_1 正比于 m 直接推出.

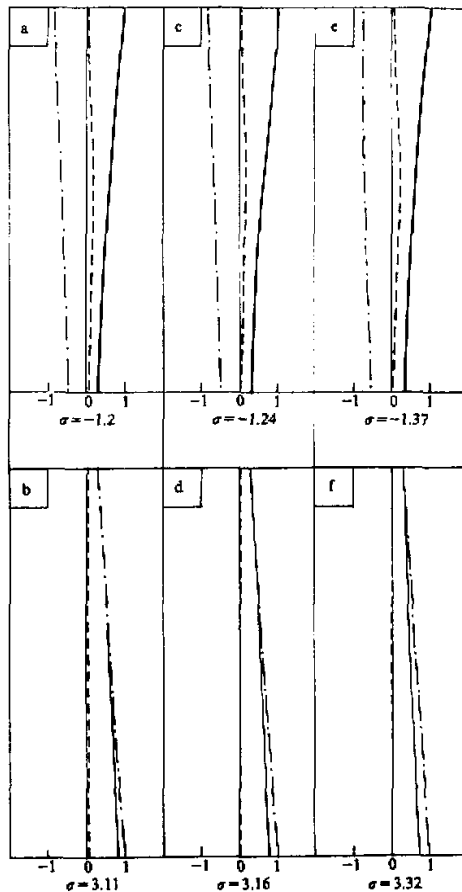


图 3 基流有切变时对应于 Kelvin 波的谱点和谱函数

$N=40, m=2, \bar{U}=0.3+0.3y$. 上半为西传波, 下半为东传波. a, b: $f=1$; c, d: $f=1+0.3y$; e, f: $f=2+0.2937y$.

--- u , — v , — ϕ .

图 2 和图 3 给出用差分法计算的结果. 图 2 中所有参数和图 1 的相同, 基流无切变. 其中序号 $\tilde{n}=79$ 和 80 的二幅分别为西传 ($\sigma^-=-1.52$) 和东传 ($\sigma^+=2.82$) Kelvin 波, 可见 $\sigma^\pm$ 和 $u^\pm$ 都为 y 的单调函数, 扰动质量在右岸边集中, 同时 v 虽小但不为零. 另外, u^+ 几乎与 ϕ^+ 重合, 故 u^+ 没法画出. 图 3 为基流有切变的情况, $\bar{U}=0.3(1+y)$, 且取了各种不同的 f (常数的和随 y 而变的), 可见西传者 v^- 已较明显, 东传者 u^+ 与 ϕ^+ 不重合 (非地转平衡). 对比图 3c, d 和 e, f 的 σ 值可知, 即使 f_0 由近于 1 到近于 2, σ 值也只有很小的变化.

4. 重力-惯性波

重力-惯性波的零级近似频率就是

$$\tilde{\sigma}_0^{\pm} = \pm \left[f_0^2 + c_{00}^2 (m^2 + n^2 \pi^2) \right]^{1/2}, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 23)$$

略去符号“ $\pm$ ”, 有

$$(u_0, v_0, \phi_0) = (A, iB, C)e^{in\pi y}, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 24)$$

$$\begin{cases} A = \frac{m\tilde{\sigma}_0 - in\pi f_0}{m^2 + n^2 \pi^2} C, \\ iB = \frac{in\pi\tilde{\sigma}_0 - mf_0}{m^2 + n^2 \pi^2} C, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 25)$$

由于压力梯度对于重力-惯性波是根本性的, 在归一化时可取 $O(C) = O(1)$. 可见当 $n \rightarrow \infty$, 有 $O(B) = O(1)$, $O(A) = O(n^{-1})$. 这是容易理解的: 因为重力-惯性波有明显的辐散辐合, 当 $|n/m|$ 很大时, 沿 y 方向的尺度较小, 故 $|v|$ 明显而 $|u|$ 很小.

不妨取 B 为实数, 并取 $v_0 = \text{Re}(iB e^{in\pi y})$, 即

$$v_0 = -B \sin n\pi y, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 26)$$

于是有

$$A = \frac{mn\pi c_{00}^2 - if_0 \tilde{\sigma}_0}{f_0^2 + n^2 \pi^2 c_{00}^2} B, \quad C = \frac{n\pi \tilde{\sigma}_0 - imf_0}{f_0^2 + n^2 \pi^2 c_{00}^2} B.$$

可见, 当 n 很大时有

$$\begin{cases} u_0^{\pm} = \text{Re}(A e^{in\pi y}) \approx 0, \\ \phi_0^{\pm} = \text{Re}(C e^{in\pi y}) \approx \pm c_{00}^{-1} B \cos n\pi y, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 27)$$

即 ϕ_0 与 v_0 正好相差位相 $\pi/2$.

今求一级修正项. 引入算子 $\tilde{\mathcal{L}}_0$ 和两向量 Y_1, Y_2 的内积 (Y_1, Y_2) 如下:

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & -f_0 & mc_{00}^2 \\ -f_0 & 0 & -c_{00}^2 d/dy \\ m & d/dy & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 28)$$

$$(Y_1, Y_2) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{c_{00}^2} (u_1 u_2^* + v_1 v_2^*) + \phi_1 \phi_2^* \right] dy \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 29)$$

其中 u_2^* 等表示 u_2 等的共轭复数. 易知: 若 X 和 Y 都满足条件 $v(0) = v(1) = 0$, 则 $\tilde{\mathcal{L}}_0$ 为自伴算子, 即

$$(\tilde{\mathcal{L}}_0 X, Y) = (X, \tilde{\mathcal{L}}_0(Y)). \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 30)$$

(II · 2 · 7) 可改写如下:

$$(\tilde{\mathcal{L}}_0 - \tilde{\sigma}_0)X = Z(f_1, \bar{U}, \tilde{\sigma}_1, X_0), \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 31)$$

其中 X 为由 (u_1, v_1, ϕ_1) 组成的向量, X_0 为向量 (u_0, v_0, ϕ_0) , 而向量 Z 依赖于 X_0 和 f_1 .

$\bar{U}$, $\bar{\sigma}_1$ 等, 用 X_0 右乘 (II · 2 · 31) 两边, 作内积, 考虑到 $(\bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_n) X_0 = 0$, 故 (II · 2 · 31) 有解的条件为

$$(Z, X_0) = 0. \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 32)$$

展开之, 即得

$$\sigma_1 \int_0^1 \left[\frac{1}{c_0^2} (|u_0|^2 + |v_0|^2) + |\phi_0|^2 \right] dy = m \int_0^1 \left[\frac{1}{c_0^2} (|u_0|^2 + |v_0|^2) + |\phi_0|^2 \right] \bar{U}_1 dy \\ - \int_0^1 \left\{ \frac{1}{c_0^2} \left[f_1 (u_0 v_0^* + u_0^* v_0) - \bar{U}_1 v_0 u_0^* \right] - c_1 \left[m \phi_0 u_0^* - v_0^* \frac{d\phi_0}{dy} \right] \right\} dy. \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 33)$$

将 σ_1 代入 (II · 2 · 7), 不难求出满足边界条件 (II · 2 · 8) 的解 (u_1, v_1, ϕ_1) .

将 (II · 2 · 26) 和 (II · 2 · 27) 代入 (II · 2 · 33) 可知, 当 n 很大时有

$$\frac{\sigma_1^{\pm}}{n\pi} \approx \frac{B^{\pm}}{2} \int_0^1 c_1(y) \sin^2 n\pi y dy, \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 34)$$

故三维空间的相速

$$c^{\pm} = c_0^{\pm} + \varepsilon c_1^{\pm} + \dots = \frac{\sigma_0^{\pm} + \varepsilon m \bar{U}_0 + \varepsilon \sigma_1^{\pm} + O(\varepsilon^2)}{(m^2 + n^2 \pi^2)^{1/2}} \quad (\text{II} \cdot 2 \cdot 35)$$

仍为有限值, 展开法是合理的.

综合起来, 当基流为低速流时有:

(1) 重力-惯性波为准简谐波, 其频率 $|\sigma|$ 随着沿 y 方向的结点数而增大, 且当 $|n/m|$ 足够大时, 主要表现为 y 方向的波动, 基流和科氏参数的变化只给以很小的修正.

(2) (I) 中已指出, 用有限差分法可以较准确地求出频率不太大的重力-惯性波谱点及谱函数; 但当 n 接近格点数 N 时, 计算谱有较大误差, 从而计算谱函数也可能有较大误差. 不过, 摄动法可以给出较好结果.

图 2 给出低速基流影响下的重力-惯性波谱点及谱函数, 用差分法算得. 由于 σ 不很大, 谱函数基本上是准简谐波.

三、低速基流情况 (二) 连续谱和谐函数

1. 摄动法 (续)

当基流有切变时, 存在连续谱, 我们得用与第二节不同的摄动法求解相应的谱函数.

由 (A · 1) 可求得只含有 $\tilde{r} = \varepsilon c_0^2$ 的方程 (参见 [3]):

$$-[(f - \bar{U}') \tilde{r}]' - \frac{fm}{m^2 c_0^2 - \bar{\sigma}^2} \left[-m(c_0^2 \tilde{r})' + \bar{\sigma}(f - \bar{U}') \tilde{r} \right] \\ = \left[\bar{\sigma} \frac{(f - \bar{U}') \tilde{r} - m(c_0^2 \tilde{r})'}{m^2 c_0^2 - \bar{\sigma}^2} \right]' + m \bar{\sigma} \tilde{r}, \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 1)$$

其中 $\tilde{r}$ 实即原本的速度分量. 现在我们只欲求切变基流情况下的慢波, 故可将 $\bar{U}_0$ 并入 $\bar{U}_1(y)$ 中去, 而令 $\bar{U}_0 = 0$, 且有 $O(\bar{\sigma}) = O(\varepsilon)$. 其他的同 (II · 2 · 1). 今取

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \varepsilon(\tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1 + \cdots), \\ \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 - m\bar{U}_1, \end{cases}, \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 2)$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \varepsilon\tilde{v}_1 + \cdots, \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 3)$$

代入(II·3·1), 零级近似给出

$$\tilde{\sigma}_0 \left[\tilde{v}_0'' + \left(m^2 + f_0^2 / c_{00}^2 \right) \tilde{v}_0 \right] + \left(f_1' - \bar{U}_1'' \right) \tilde{v}_0 = 0. \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 4)$$

这正是准地转模式方程, 而 $\tilde{v}_0$ 满足边界条件(II·2·6).

下面我们只讨论连续谱.

2. 线性切变基流情况

$$\text{令} \quad \bar{U}_1 = U_0 + U_1 y, \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 5)$$

其中 U_0 和 U_1 为常数, 给定

$$\sigma_0 = m\bar{U}_1(y_c), \quad (0 \leq y_c \leq 1), \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 6)$$

有 $\tilde{\sigma}_0(y_c) = 0$, 即(II·3·4)在 $y = y_c$ 有奇点.

为简单起见, 我们取特例 $f_1' = 0$, 此时(II·3·4)有满足边界条件的广义解

$$\tilde{v}_0 = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{m}}{2} \text{sh} \tilde{m} \right)^{-1} \cdot \text{sh} \left(\frac{\tilde{m} [\bar{U}_c - \bar{U}_1(1)]}{U_1} \right) \cdot \text{sh} \tilde{m} y, & (0 \leq y \leq y_c), \\ \left(\frac{\tilde{m}}{2} \text{sh} \tilde{m} \right)^{-1} \cdot \text{sh} \left(\frac{\tilde{m} [\bar{U}_c - \bar{U}_1(0)]}{U_1} \right) \cdot \text{sh} \tilde{m} (y - 1), & (y_c \leq y \leq 1), \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 7)$$

其中记

$$\tilde{m}^2 \equiv m^2 + f_0^2 / c_{00}^2, \quad \bar{U}_c \equiv \bar{U}_1(y_c). \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 8)$$

此外, 由零级近似慢波满足地转风关系, 又有

$$\begin{cases} \tilde{u}_0 = -m^{-1} d\tilde{v}_0 / dy, \\ \tilde{\phi}_0 = m^{-1} f_0 \tilde{v}_0. \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 7)_2$$

关于一般情况下准地转模式的连续谱和谐函数, 请参阅[4, 5].

综合起来, 在低速基流情况下有:

(1) $m\bar{U}_{\min} < \sigma < m\bar{U}_{\max}$ 为连续谱区, 属于慢波系, 谱函数为特征值问题的广义解, 其中 v 和 ϕ 为连续函数, 但 u, v 和 ϕ 在 y_c 点有间断. 这从分析(II·3·7)以及(A·1)可以推出.

(2) 记连续谱函数为 (u_c, v_c, ϕ_c) , 由上面结果可知它有有限能量, 即

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{c_0^2} (u_c^2 + v_c^2) + \phi_c^2 \right] dy < \infty. \quad (\text{II} \cdot 3 \cdot 8)$$

图4是用差分法算得的部分连续谱点和谱函数, 其中取了 $\bar{U} = 0.3(1+y)$, 即 $\varepsilon = 0.3$, $\bar{U}_1 = 1+y$; $f = 1$; $m = 2$, $N = 40$. 由图可清楚看到上述两个特点. 此外, (I)中已给出 $0.3 < \sigma < 0.6$ 确为连续谱区.

按(II·3·7)算得的结果(图未给出)和差分法算得的结果甚为吻合.

在本例中, 差分法没有给出慢波离散谱, 也许是基流虽为低速但非缓变之故(参见第二节).

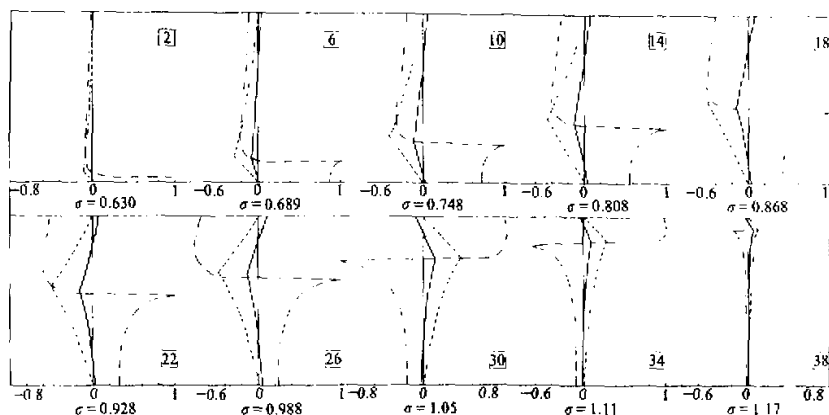


图 4 用差分法算得的部分连续谱和谐函数, σ 值列于图下

$$\bar{U} = 0.3(1+y), f=1, m=2, N=40.$$

$$- \cdot - \cdot - \cdot u, \text{——} v, \text{——} \phi.$$

四、谱函数的正交性和展开定理

1. 一般情况

一般情况下我们需要引入 $\mathcal{L}$ 的伴随算子 $\mathcal{M}$, 定义如下:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} m\bar{U} & -(f - \bar{U}') & mc_0^2 \\ -f & m\bar{U} & -c_0^2 d/dy \\ m & d/dy & m\bar{U} \end{bmatrix}, \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 1)$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m\bar{U} & -f & mc_0^2 \\ -(f - \bar{U}') & m\bar{U} & -c_0^2 d/dy \\ m & d/dy & m\bar{U} \end{bmatrix}. \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 2)$$

两向量 Y_1 和 Y_2 的内积仍定义为

$$(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{c_0^2} (u_1 u_2^* + v_1 v_2^*) + \phi_1 \phi_2^* \right] dy. \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 3)$$

若 Y 满足边界条件(A·2), 就有

$$(\mathcal{L}Y_1, Y_2) = (Y_1, \mathcal{M}Y_2). \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 4)$$

设 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 分别有谱 σ 和 λ , 谱函数为 X_σ 和 Y_λ , 即

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \sigma)X_\sigma = 0, \\ (\mathcal{M} - \lambda)Y_\lambda = 0, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 5)$$

且 X_σ 和 Y_λ 满足边界条件 (A·2), 以 Y_λ 右乘 (II·4·5) 第一式, 作内积, 并利用 (II·4·4) 及 (II·4·5) 第二式, 可得

$$(\sigma - \lambda^*)(X_\sigma, Y_\lambda) = 0. \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 6)$$

故当 $\sigma \neq \lambda^*$ 时, X_σ 与 Y_λ 正交.

注意到离散谱的谱函数和连续谱的谱函数均为平方可积, 故有展开定理如下:

若 $F = (u, v, \phi)$ 为平方可积, 且满足边界条件 (A·2), 则 F 可按 X_σ 展开,

$$F = \sum_{(\sigma d)} a_{\sigma d} X_{\sigma d} + \int_{m l^*, \min}^{m l^*, \max} a_{\sigma c} X_{\sigma c}(\sigma) d\sigma, \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 7)$$

其中 (σd) 和 (σc) 分别表离散谱和连续谱, 且

$$a_{\sigma d} = \frac{(F, Y_{\sigma \cdot d})}{(X_{\sigma d}, Y_{\sigma \cdot d})}, \quad a_{\sigma c} = \frac{(F, Y_{\sigma \cdot c})}{(X_{\sigma c}, Y_{\sigma \cdot c})}. \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 8)$$

2. 低速基流情况

在低速基流情况下, 可用摄动法:

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \varepsilon \mathcal{L}_1 + \cdots, \\ \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \varepsilon \mathcal{M}_1 + \cdots, \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 9)$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \cdots, \\ \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \cdots, \\ X_\sigma = \bar{X}_{\sigma 0} + \varepsilon \bar{X}_{\sigma 1} + \cdots, \\ Y_\lambda = \bar{Y}_{\lambda 0} + \varepsilon \bar{Y}_{\lambda 1} + \cdots. \end{cases} \quad (\text{II} \cdot 4 \cdot 10)$$

重复上二节的讨论, 可得 $\mathcal{L}_0 = M_0$, 从而 $\sigma_0 = \lambda_0, X_0 = Y_0$. 这就是为什么在我们计算的例子中 X 几乎两两正交.

致谢: 张立凤重复计算和验证了我们原有的计算结果; 王婉文、孙燕斌帮助绘图, 谨此致谢.

参 考 文 献

- [1] 曾庆存, 李荣凤, 张 铭, 1990, 旋转二维可压缩流动的谱和特征函数, I: 谱点的分布, 大气科学, 14, No.2, 129—142.
- [2] Matsuno T., 1966, Quasigeostrophic motions in the equatorial area, *J. Meteor. Soc. Japan*, ser. II, 14, No.1.
- [3] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 第十一章, 科学出版社.
- [4] Zeng Qingcun, Lu Peisheng, Li Rongfeng and Yuan chongguang, 1986 Evolution of Large scale disturbances and their interaction with mean flow in a rotating barotropic atmosphere, II, *Advances in Atmospheric Sciences*, 3, No.2, 172—188.
- [5] 卢佩生, 卢理, 曾庆存, 1986, 正压准地转模式的谱和扰动的演变, 中国科学, B辑, 第11期, 1225—1233.

SPECTRA AND SPECTRAL FUNCTIONS OF ROTATING TWO-DIMENSIONAL COMPRESSIVE MOTION PART(II): STRUCTURE OF SPECTRAL FUNCTIONS AND FURTHER DISCUSSION ON SPECTRA

Zeng Qingcun, Li Rongfeng and Zhang Ming

(LASG, Institute of Atmospheric Physics)

Abstract

The distribution of spectra of rotating two-dimensional compressive motion and its preliminary analysis have been given in part I of our paper. The structure of spectral function and further discussion on the spectra is given in part II. In the case of low-speed basic flow it is convenient to apply the perturbation method to solve the spectra and spectral functions and to compare the results with those obtained by using finite difference method described in Part I. The comparison between the results obtained by these two methods shows a very good agreement. Our perturbation method takes the first-order approximation of discrete spectra as the spectra in the case of zero basic flow and the one of spectral functions corresponding to continuous spectrum as the results of quasigeostrophic model. The analyses of the zero-order approximations and the first-order corrections give clear interpretations of many important characteristics of the spectra and spectral functions computed by using finite different method.

In the case of low-speed basic flow: (1) The inertia-gravity (characteristic) waves are quasi-harmonic, and the corrections for the influence of the basic flow and the spatial variability of the Coriolis parameter are only small. (2) Due to the permanent slop of the free surface which is accompanied by the nonzero basic flow, the kelvin waves necessarily possess component of velocity perpendicular to the wave ray; and the downwad and upward propagating Kelvin waves are no longer similar to each other in their shape. The stronger the basic flow is, the clearer the characters mentioned above appear. Their similarity is also violated by the spatial variability of the Coriolis parameter. Besides, both the two kelvin waves are almost non-dispersive. (3) The nonzero basic flow or the spatial variability makes the discrete spectra corresponding to the slow (characteristic) waves separate from each other, there are either infinite numbers of such spectra which approach the velocity of the basic flow by their correspondent phase velocity (if the basic flow is constant) or finite numbers, and even no one exists. The continuous spectrum necessarily exists if the basic flow is not a constant. The spectral functions corresponding to the discrete spectra are all quasi-harmonic waves, but every of those corresponding to the continuous spectrum is only a generalized solution with finite energy.

Spectral functions of the problem are orthogonal to those of the adjoint operator. Every disturbance satisfying the same boundary conditions as in the eigenvalue problem can be expanded by using the spectral functions of the adjoint operator. In the case of low-speed basic flow both the operator and its adjoint one can be expanded by using the perturbation method, and they are self-adjoint in the zero-order approximation.

The problem with high-speed basic flow will be studied in Part II.

Key words: Discrete spectrum; Continuous spectrum; Generalized solution; Orthogonality; Expansion theorem.