

再论发展方程差分格式的构造和应用*

季仲贞 王 斌

(LASG, 中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文把一大类大气、海洋方程归结为一种发展方程, 具体构造了若干定时间步长的显式完全平方守恒差分格式, 并证明在一定条件下, 这类格式也具有能量守恒、“广义能量”守恒和“平均尺度”守恒的特性, 它表明这类格式具有较好的计算稳定性和省时性. 文中还探讨了显式平方守恒格式与隐式平方守恒格式之间的密切联系. 最后给出了令人满意的用四波的 R-H 波作数值检验的结果.

关键词: 发展方程; 完全平方守恒; 完全能量守恒; 平均尺度守恒; 显式差分格式

一、引 言

计算地球流体动力学是当今较活跃的一个学科分支, 其中的一个重要问题是差分格式的计算稳定性问题, 尤其是非线性计算稳定性问题. 由于这类问题的一个基本要求是要能作长时间的数值积分, 因此如何才能构造出长时间计算稳定的差分格式, 是人们十分关心的问题. 在文献[1-3]中我们已把数值天气预报、气候数值模拟和海浪数值模拟等问题归结为如下形式发展方程的数值求解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{A}F = G, \\ \lim_{t \rightarrow 0} F = F^{(0)}(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F = F^{(0)}(x), \quad (2)$$

其中 $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(F, x, t)$ 是一个非线性或线性算子, $F \equiv F(x, t)$ 是待求函数. 在 (x, t) 空间布网 $(mh, n\tau)$, 取空间步长为 h , 时间步长为 τ . 于是可构造与(1)式相对应的差分格式如下:

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + A_x(F^n)[\theta F^{n+1} + (1-\theta)F^n] = G^{n+1/2}. \quad (3)$$

定义两个网格函数的内积为

$$(G, F) = \sum_m F_m G_m \Delta_m, \quad (4)$$

其中 Δ_m 依赖于问题的维数可为 h , h^2 或 h^3 . 而函数 F 的范数取为

$$\|F\| = (F, F)^{1/2}. \quad (5)$$

在文献[1, 2]中曾庆存等已证明了如下定理:

1990年3月26日收到, 9月1日收到修改稿.

* 本文属国家“七五”科技攻关项目“09-01-15-3-1”子专题内容, 并已经验收鉴定.

定理 1 若 A 为非负算子, 则格式(3)当 $1 \geq \theta \geq 1/2$ 时无条件稳定; 若 $(AF, F) = 0$ 且 $0 \leq \theta \leq 1/2$ 时, 则格式(3)绝对不稳定.

定理 2 若 $(AF, F) = 0$ 且 $\theta = 1/2$, 则格式(3)有如下守恒性:

(i) 能量守恒: $\|F^n\|^2 = \text{常数};$ (6)

(ii) “广义能量”守恒: $\|F^n\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|AF^n\|^2 = \text{常数};$ (7)

(iii) “平均尺度”守恒: $\frac{\|F^{n+1}\|^2}{\|AF^{n+1}\|} = \frac{\|F^n\|^2}{\|AF^n\|}.$ (8)

从以上定理不难看出, 满足完全能量守恒和计算稳定的格式都是隐式的(即 $\theta \geq \frac{1}{2}$). 然而隐式格式在求解时不方便, 要费较多机时, 在作长时间数值积分时其矛盾尤为突出. 自然, 人们会问, 能否构造出显式的完全能量守恒或平方守恒的差分格式, 使得既能保持计算稳定又能显式地直接求解呢? 答案是肯定的, 在文献 [4] 中我们已作了简要的介绍, 本文继续从发展方程(1)出发, 较详细地阐述显式能量守恒差分格式的构造问题, 也试图揭示显式能量守恒格式与隐式能量守恒格式之间的内在联系. 为了叙述方便起见, 以下不妨暂取 $G \equiv 0$.

二、显式完全平方守恒差分格式的构造

由发展方程(1)可得

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\mathcal{A}F, \quad (9)$$

对 t 微分一次得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathcal{A}F}{\partial t}. \quad (10)$$

对网格函数 F_j^{n+1} 作 Taylor 展开得

$$F_j^{n+1} = F_j^n + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_j^n + \dots \quad (11)$$

以(9)、(10)代入(11)得

$$F_j^{n+1} = F_j^n - \tau (\mathcal{A}F)_j^n - \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{A}F}{\partial t} \right)_j^n + \dots \quad (12)$$

按照论文 [5] 中灵活性替代的观点, 可把(12)式改写为

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} + (AF)_j^n + \varepsilon_n \frac{\tau}{2} \left(\frac{\delta AF}{\delta t} \right)_j^n = 0, \quad (13)$$

其中 $(A)^n$ 为 t_n 时刻对应于 $\mathcal{A}$ 的空间差分算子, $\left(\frac{\delta AF}{\delta t} \right)_j^n$ 为 t_n 时刻对应于 $\frac{\partial \mathcal{A}F}{\partial t}$ 的差分表示, ε_n 为待定系数, 或称之为灵活性系数. 可以通过适当选择系数 ε_n 而达到使(13)式保持完全能量守恒或完全平方守恒的目的. 下面给出具体的做法.

为了讨论方便起见, 不妨把(13)式第三项推广为算子形式 $\varepsilon_n \tau B$, 其中 B 为耗

散算子, ε_n 可称为耗散系数. 进一步令

$$(L_n F)_i^n \equiv (A_n F)_i^n + \varepsilon_n \tau (B_n F)_i^n, \quad (14)$$

于是(13)式可写为

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\tau} + (L_n F)_i^n = 0. \quad (15)$$

于是不难证明如下定理:

定理 3 若成立关系式

$$\tau \|L_n F^n\|^2 - 2(L_n F^n, F^n) = 0, \quad (16)$$

则(15)式为显式完全平方守恒的差分格式.

定理 3 的证明很容易, 现从略.

定理 4 设 A_n 为反对称算子, B 为正算子, 且

$$(B_n F)^n \leq 0(1) \text{ 和 } 2K_3 \frac{\tau}{h} < 1, \quad (17)$$

则当

$$\varepsilon_n = K_1 \left/ \left[\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3 \right)^2} \right] \right. \quad (18)$$

时, 格式(15)为定时间步长的显式完全平方守恒差分格式, 其中

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \|A_n F^n\|^2 / (B_n F^n, F^n); \\ K_2 &= (B_n F^n, A_n F^n) \cdot h / (B_n F^n, F^n); \\ K_3 &= \|A_n F^n\| \cdot \|B_n F^n\| \cdot h / (B_n F^n, F^n). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

证明: 把(14)式代入(16)式, 经整理可得

$$\tau^2 \|B_n F^n\|^2 \varepsilon_n^2 - 2[(B_n F^n, F^n) - \tau(B_n F^n, A_n F^n)] \varepsilon_n + \|A_n F^n\|^2 = 0. \quad (20)$$

(20)式是关于 ε_n 的二次代数方程, 易于导出 ε_n 为实数的条件为

$$J = (B_n F^n, F^n)^2 \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3 \right)^2 \right\} > 0,$$

由于 $|K_2| \leq K_3$, 故有

$$\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3 \right)^2 \geq 1 - 2K_3 \frac{\tau}{h},$$

只要 $2K_3 \tau / h < 1$, 则必有 $J > 0$. 于是在经过一些具体推导之后, 可得方程(20)的实根为

$$\varepsilon_n = K_1 \left/ \left[\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right) \mp \sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3 \right)^2} \right] \right.$$

为使 $\varepsilon_n \leq 0(1)$, 必须取

$$\varepsilon_n = K_1 \left/ \left[\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3 \right)^2} \right] \right., \quad (21)$$

否则, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时会有 $\varepsilon_n \rightarrow \infty$, 从而破坏了差分方程(15)与对应微分方程的相容性. 至此定理 4 已证毕.

三、关于算子 B 的选取

由定理 4 可知, 要使格式 (15) 是显式完全平方守恒的一个必要条件是算子 B 为止. 关于 $(BF)_j^n$ 的具体差分形式可以有多种选取方式, 下面我们将具体给出几种. 在此以前要先证明两个引理.

引理 1 若定理 4 成立, 且 $\varepsilon_n \tau B \equiv A_\varepsilon$ 满足 $|(A_\varepsilon F^n, A_n F^n)| \ll \|A_n F^n\|^2$, 则有 $(A_n F^n, F^{n+1}) < 0$ 对所有 $n \geq 1$ 成立.

证明: 由 (15) 式可得

$$F^{n+1} = F^n - \tau A_n F^n - \tau A_\varepsilon F^n,$$

于是

$$\begin{aligned} (A_n F^n, F^{n+1}) &= (A_n F^n, F^n - \tau A_n F^n - \tau A_\varepsilon F^n) \\ &= -\tau [\|A_n F^n\|^2 + (A_\varepsilon F^n, A_n F^n)]. \end{aligned}$$

由于 $|(A_\varepsilon F^n, A_n F^n)| \ll \|A_n F^n\|^2$, 故有 $(A_n F^n, F^{n+1}) < 0$, 且 $(A_n F^n, F^{n+1}) \approx -\|A_n F^n\|^2 \tau$.

引理 2 设 $\tilde{F}^{n+1} = F^n - \tau A_n F^n$ (A_n 为反对称算子), 且对固定的 n , A_n 为线性的, 则

$$(A_n \tilde{F}^{n+1}, F^n) = \tau \|A_n F^n\|^2 > 0,$$

证明: 由于 A 为反对称的, 所以有

$$(A_n \tilde{F}^{n+1}, \tilde{F}^{n+1}) = 0,$$

即

$$(A_n \tilde{F}^{n+1}, F^n - \tau A_n F^n) = 0,$$

于是

$$(A_n \tilde{F}^{n+1}, F^n) = \tau (A_n \tilde{F}^{n+1}, A_n F^n),$$

又由于 A_n 的线性性质 (对固定的 n), 故有

$$A_n \tilde{F}^{n+1} = A_n F^n - \tau A_n^2 F^n,$$

于是

$$(A_n \tilde{F}^{n+1}, A_n F^n) = \|A_n F^n\|^2 - \tau (A_n (A_n F^n), A_n F^n) = \|A_n F^n\|^2.$$

因 A_n 为反对称, 所以

$$(A_n \tilde{F}^{n+1}, F^n) = \tau \|A_n F^n\|^2 > 0.$$

定理 5 在定理 4 中, 若取

$$B_n F^n = \frac{A_n F^n - A_{n-1} F^{n-1}}{\tau}, \quad (22)$$

则定理 4 成立.

证明: 由引理 1 可得

$$(B_n F^n, F^n) = -\frac{1}{\tau} (A_{n-1} F^{n-1}, F^n) > 0,$$

且

$$(B_n F^n, F^n) \approx \|A_{n-1} F^{n-1}\|^2. \quad (23)$$

这说明此时算子 B_n 确实是正算子, 故定理 4 成立.

定理 6 在定理 4 中若取

$$B_n F^n = \frac{A_n \tilde{F}^{n+1} - A_n F^n}{\tau}, \quad (24)$$

则定理 4 成立, 其中 $\tilde{F}^{n+1} = F^n - \tau A_n F^n$.

利用引理 2 易于证明定理 6, 并且有

$$(B_n F^n, F^n) = \|A_n F^n\|^2. \quad (25)$$

定理 7 在定理 4 中若取

$$B_n F^n = \frac{A_n \tilde{F}^{n+1} - A_{n-1} F^{n-1}}{2\tau}, \quad (26)$$

则定理 4 成立, 其中 $\tilde{F}^{n+1} = F^n - \tau A_n F^n$.

利用引理 1 和引理 2, 易于证明定理 7, 并且此时有

$$(B_n F^n, F^n) \approx \frac{1}{2} (\|A_n F^n\|^2 + \|A_{n-1} F^{n-1}\|^2). \quad (27)$$

四、显式完全平方守恒格式的性质

正如前面定理 4 所看到的, 显式格式(15)可写为

$$F_j^{n+1} - F_j^n = -\tau (A_n F)_j^n - \varepsilon_n \tau B_n F_j^n, \quad (28)$$

若 A 为反对称的, B_n 为正且 $2K_3 \frac{\tau}{h} < 1$, 则只要适当选取耗散系数 ε_n , 就有

$$\|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2, \quad (29)$$

即能量守恒. 如果把算子 A 作用于方程(28)的两边, 可得

$$A_n F_j^{n+1} - A_n F_j^n = -\tau A_n (A_n F)_j^n - \varepsilon_n \tau A_n B_n F_j^n, \quad (30)$$

若算子 A_n 与 B_n 是可交换的(由(24)式所定义的 B_n 就满足此性质), 即

$$A_n B_n = B_n A_n, \quad (31)$$

则(30)式可写为

$$A_n F_j^{n+1} - A_n F_j^n = -\tau A_n (A_n F)_j^n - \varepsilon_n \tau B_n A_n F_j^n. \quad (32)$$

令 $Z^n = A_n F^n$, 则(32)式可写为

$$Z_j^{n+1} = Z_j^n - \tau A_n Z_j^n - \varepsilon_n \tau B_n Z_j^n, \quad (33)$$

由于(33)式与(28)式具有相同的形式, 故只要同样适当选取 ε_n , 就有

$$\|Z^{n+1}\|^2 = \|Z^n\|^2, \quad (34)$$

即

$$\|A F^{n+1}\|^2 = \|A F^n\|^2. \quad (34)'$$

在数值实验中发现, 使(34)成立的 ε_n 与(18)式中的 ε_n 是非常接近的, 因此, 我们就取此 ε_n , 这样, 近似地有

$$\|F^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|A_n F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|A_n F^n\|^2, \quad (35)$$

(35)式即为“广义能量”守恒. 由(29)和(34)式可得如下“平均尺度”守恒:

$$\frac{\|F^{n+1}\|^2}{\|A_n F^{n+1}\|} = \frac{\|F^n\|^2}{\|A_n F^n\|}. \quad (36)$$

总之, 只要算子 A 和 B 是可交换的, 显式完全能量守恒差分格式保持了隐式完全能量守恒格式所具有的能量守恒、“广义能量”守恒和“平均尺度”守恒的性质. 如果 A 和 B 是不可交换的, 则只保持能量守恒, 其余两个守恒性就不一定能成立了.

五、显式与隐式完全平方守恒差分格式的联系

对于格式(3), 取 $\theta = 1/2$ 得

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} + A \left[\frac{1}{2} (F_j^{n+1} + F_j^n) \right] = 0, \quad (37)$$

把展开式(12)代入(37)式的第二项可得

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} + A \left[F_j^n - \frac{\tau}{2} (AF)_j^n - \frac{\tau^2}{4} \left(\frac{\partial AF}{\partial t} \right)_j^n + \dots \right] = 0. \quad (37)'$$

同样地, 引入灵活性参数 ε_n , 可把(37)式改写为

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} + A \left[F_j^n - \varepsilon_n \frac{\tau}{2} (AF)_j^n \right] = 0, \quad (38)$$

即

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} + AF_j^n - \varepsilon_n \frac{\tau}{2} A^2 F_j^n = 0. \quad (39)$$

只要算子 A 与 $\frac{\partial}{\partial t}$ 是可交换的, 则有

$$-A^2 F \approx -A(AF) \approx -A \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \approx -\frac{\partial AF}{\partial t} \approx \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (40)$$

由此可见, 在截断误差是 $O(\tau^2)$ 的意义下, (39)式与(13)式是等价的, 亦即(37)式与(13)式是等价的.

六、显式完全平方守恒格式的应用

球坐标下的正压原始方程可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + f^* v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - f^* u, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (u \varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v^* \varphi) \right], \end{cases} \quad (41)$$

令 $\Phi = \sqrt{\varphi}$, $U = \Phi u$, $V = \Phi v$, 则球坐标下的正压原始方程组(41)可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \left[\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u U}{\partial \lambda} + u \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial v^* U}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right\} \right] + f^* V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \left[\Phi \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u V}{\partial \lambda} + u \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial v^* V}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right\} \right] - f^* U, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (U \Phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (V^* \Phi) \right]. \end{cases} \quad (42)$$

其中 $v^* = v \cos \theta$, $f^* = 2 \Omega \sin \theta + u \operatorname{tg} \theta / a$, θ 是纬度.

在 (λ, θ, t) 空间布网, 分别取空间和时间步长为 $\Delta \lambda = h_1$, $\Delta \theta = h_2$, $\Delta t = \tau$, 并以 F^n_{ij} 表示函数 $F(\lambda, \theta, t)$ 在点 $(i\Delta \lambda, j\Delta \theta, n\Delta t)$ 处的值, 设 F, G 为任意两个网格函数, 记

$$\begin{cases} \bar{F} = \frac{F^{n+1} + F^n}{2}, & F_{\pm i} = \frac{F^{n+1} - F^n}{\tau}, & \bar{F}'_i = \frac{F^{n+1} - F^{n-1}}{2\tau}, \\ \bar{F}'_i = \frac{F_{i-\frac{1}{2}, j} + F_{i+\frac{1}{2}, j}}{2}, & \bar{F}'_\theta = \frac{F_{i, j+\frac{1}{2}} + F_{i, j-\frac{1}{2}}}{2}, \\ F'_i = \frac{F_{i+\frac{1}{2}, j} - F_{i-\frac{1}{2}, j}}{h_1 a \cos \theta_j}, & F'_\theta = \frac{F_{i, j+\frac{1}{2}} - F_{i, j-\frac{1}{2}}}{h_2 a \cos \theta_j}. \end{cases} \quad (43)$$

容易证明在 λ 方向有如下关系式:

$$\begin{cases} \bar{F}'_i = \frac{1}{2} [F_{-i} + F_{-i-1}], \\ (\bar{F}' G')_i = \frac{1}{2} [(\overline{FG})'_i + F \bar{G}'_i + G \bar{F}'_i], \\ \overline{\bar{F}' G'}_i = \frac{1}{2} [(\overline{FG})'_i + F \bar{G}'_i - G \bar{F}'_i]. \end{cases} \quad (44)$$

在 θ 方向也有类似的关系.

利用前述定理, 我们可构造逼近于(42)式的如下定步长显式平方守恒格式:

$$\begin{cases} U_{+i} = -[\Phi \bar{\varphi}'_i]^n - \frac{1}{2} [(\overline{uU})'_i + u \bar{U}'_i + (\overline{v^*U})'_\theta + v^* \bar{U}'_\theta]^n + f^* V^n - \mathcal{A} U^n, \\ V_{+i} = -[\Phi \cos \theta \bar{\varphi}''_\theta]^n - \frac{1}{2} [(\overline{uV})'_i + u \bar{V}'_i + (\overline{v^*V})'_\theta + v^* \bar{V}'_\theta]^n - f^* U^n - \mathcal{A} V^n, \\ \varphi_{-i} = -[(\overline{U\Phi})'_i + (\overline{V^*\Phi})'_\theta]^n - \mathcal{A} \Phi^n, \end{cases} \quad (45)$$

其中 $\mathcal{A} F = \varepsilon_n \Delta t B F$. 令

$$\begin{cases} -A_1 U^n = -\Phi \bar{\varphi}'_i - A_0 U^n + f^* V^n, \\ -A_2 V^n = -\Phi \cos \theta \bar{\varphi}''_\theta - A_0 V^n - f^* U^n, \\ -A_3 \Phi^n = -[(\overline{U\Phi})'_i + (\overline{V^*\Phi})'_\theta], \end{cases} \quad (46)$$

其中

$$A_0 F^n = \frac{1}{2} [(\overline{uF})'_i + u \bar{F}'_i + (\overline{v^*F})'_\theta + v^* \bar{F}'_\theta]^n, \quad (47)$$

则(45)式可简写为

$$\begin{cases} U_{+i} = -A_1 U^n - \mathcal{A} U^n \equiv -A_1 U^n - \varepsilon_n \Delta t B U^n, \\ V_{+i} = -A_2 V^n - \mathcal{A} V^n \equiv -A_2 V^n - \varepsilon_n \Delta t B V^n, \\ \varphi_{+i} = -A_3 \Phi^n - \mathcal{A} \Phi^n \equiv -A_3 \Phi^n - \varepsilon_n \Delta t B \Phi^n. \end{cases} \quad (48)$$

而

$$\varepsilon_n = K_1 / [1 - \Delta t K_2 + \sqrt{(1 - \Delta t K_2)^2 - (\Delta t K_3)^2}] , \quad (49)$$

其中

$$K_1 = [\|A_1 U^n\|^2 + \|A_2 V^n\|^2 + \|A_3 \Phi^n\|^2] / K ,$$

$$K_2 = [(BU^n, A_1 U^n) + (BV^n, A_2 V^n) + (B\varphi^n, A_3 \Phi^n)] / K ,$$

$$K_3 = [\|A_1 U^n\| \cdot \|BU^n\| + \|A_2 V^n\| \cdot \|BV^n\| + \|A_3 \Phi^n\| \cdot \|B\varphi^n\|] / K ,$$

而

$$K = (BU^n, U^n) + (BV^n, V^n) + (B\varphi^n, \varphi^n) .$$

取如下 Rossby-Haurwitz 波作为初始场: 令流函数 $\psi = -a^2 \omega \sin \theta + a^2 k \cos^R \theta \cdot \sin \theta \cos R\lambda$, 而

$$\begin{cases} u = -a^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \equiv a \dot{\lambda} \cos \theta , \\ v = (a \cos \theta)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \equiv a \dot{\theta} . \end{cases}$$

令势函数 $\varphi = \varphi_0 + a^2 A(\theta) + a^2 B(\theta) \cos R\lambda + a^2 C(\theta) \cos 2R\lambda$, 而

$$\begin{cases} A(\theta) = \frac{1}{2} \omega (2\Omega + \omega) C^2 + \frac{1}{4} k^2 C^{2R} [(R+1)C^2 + (2R^2 - R - 2) - 2R^2 C^{-2}] , \\ B(\theta) = 2(\Omega + \omega) k \cdot C^R [(R^2 + 2R + 2) - (R+1)^2 C^2] / (R+1)(R+2) , \\ C(\theta) = \frac{1}{4} k^2 C^{2R} [(R+1)C^2 - (R+2)] , \\ C = \cos \theta ; \end{cases}$$

并且取 $\omega = k = 7.848 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ($\sim 0.1\Omega$), $R=4$, $\varphi_0 = 9.8(8 \times 10^3) \text{ m}^2 \cdot \text{s}^2$.

按前述定理 5 的要求选取 BF^n , 并令 $\Delta \theta = \Delta \lambda = 2\pi/80$, $\Delta t = 300 \text{ s}$, 用上述 4 波的 R-H 波作初始场进行数值积分, 得到较满意的结果. 在图 1 至图 4 中分别给出数值积分 20 天, 35 天, 40 天和 50 天的计算结果. 可以看到波形没有大的变化; 位相

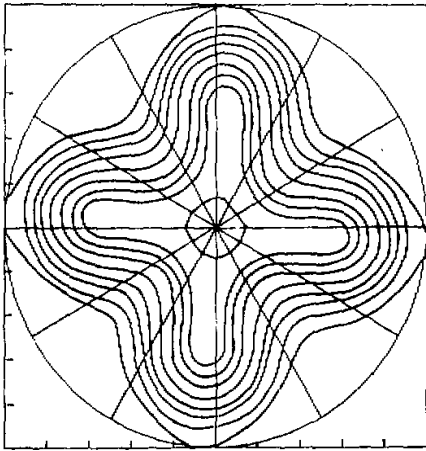


图 1 计算的 R-H 波 (20 天)

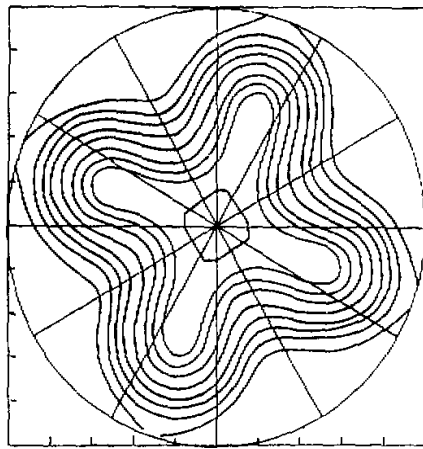


图 2 计算的 R-H 波 (35 天)

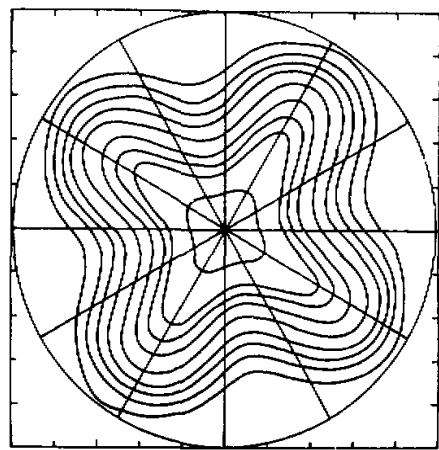


图3 计算的R-H波(40天)

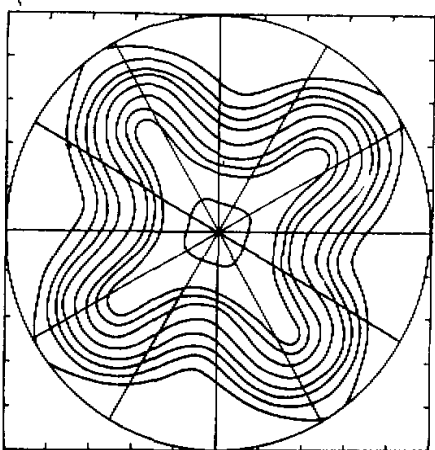


图4 计算的R-H波(50天)

移速与真解接近，大致是每 16 天绕一圈，表 1 给出总能量 $E^n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varphi_{ij}^n \cos \theta_j$ · $[(u_{ij}^n)^2 + (v_{ij}^n)^2 + \varphi_{ij}^n]$ 和总质量 $M^n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varphi_{ij}^n \cos \theta_j$ 随时间演变的数值，可以看到无论是总能量还是总质量都非常好地保持了守恒性。

表1 总能量和总质量的变化

天	总能量 E^n (m^4/s^4)	总质量 M^n (m^2/s^2)
1	18464475564569.4	190178908.519517
5	18464475564569.3	190178908.519517
10	18464475564569.5	190178908.519517
15	18464475564569.4	190178908.519517
20	18464475564569.4	190178908.519517
25	18464475564569.5	190178908.519517
30	18464475564569.6	190178908.519517
35	18464475564569.9	190178908.519517
40	18464475564569.9	190178908.519517
45	18464475564569.0	190178908.519517
50	18464475564569.9	190178908.519517

参 考 文 献

[1] 曾庆存、季仲贞，1981，发展方程的计算稳定性问题，计算数学，第1期，79—86。
[2] 季仲贞、曾庆存，1982，发展方程差分格式的构造和应用，大气科学，6，1期，88—94。
[3] 曾庆存、季仲贞、李荣凤，1988，发展方程差分格式的构造与近岸海流数值模拟，大气科学(特刊)，166—175。
[4] 王 斌、季仲贞，1990，显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验，科学通报，35，第10期，766—768。
[5] Zeng Qingcun, Ji Zhongzhen and Yuan Chongguang, 1982, Designs of difference schemes for the primitive equation, Scientia Sinica (Series B) XXV, No.2, 183—199.

FURTHER DISCUSSION ON THE CONSTRUCTION AND APPLICATION OF DIFFERENCE SCHEME OF EVOLUTION EQUATIONS

Ji Zhongzhen and Wang Bin

(*LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences*)

Abstract

In this paper a larger class of atmospheric and oceanic equations is reduced to a kind of evolution equation, and some constant time-step difference schemes, which are explicit and complete square conservative, are constructed. It is proved that the schemes have characteristics of energy conservation, "generalized energy conservation" and "mean scale conservation" in some conditions. It shows that these schemes have better computational stabilities and time-saving properties. The close relation between the explicit and the implicit complete square conservative difference schemes is compared. In the end, some numerical tests have been done by using Rossby-Haurwitz wave with 4 waves and the results are satisfactory.

Key words: Evolution equation; Complete square conservation; Complete energy conservation; Mean scale conservation; Explicit difference scheme.