

线性和非线性地形罗斯贝波

赵 平

(成都气象学院)

孙淑清

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文在半地转概念下,讨论了线性和非线性地形罗斯贝波的稳定性及其解,指出:线性和非线性稳定性判据形式一致。在线性时,地形东西向及南北向坡度对稳定波动的周期和传播速度有明显影响,其解为周期函数;在不稳定时,解为非周期函数。二级近似时其解为孤立波形式——不稳定时,在地形不同位置可形成东移或西移的孤立波槽或孤立波脊;而在稳定时只形成孤立波槽。三级近似时解出现间断点。

关键词: 地形罗斯贝波;半地转近似;波动稳定性;孤立波。

一、引 言

自从 Rossby 讨论了 β 效应对罗斯贝波的影响以后,人们又研究地形对罗斯贝波的作用,发现地形造成的爬流和绕流作用对罗斯贝波的形成及发展有明显的影响。位涡守恒理论解释了气流爬越山脊时形成波动的物理机制^[1]。张曙华和朱抱真^[2]使用线性准地转模式讨论了地形南北坡度对长波的不稳定作用。吕克利用 WKB 方法讨论了地形对准地转线性条件下罗斯贝波的波作用量和能量的影响^[3],后来又用摄动方法讨论了地形南北坡度对准地转非线性罗斯贝波的影响^[4]。刘式适等^[5]讨论了地形对罗斯贝波的影响。

本文在非线性浅水波方程中采用半地转的概念^[6,7],通过相平面方法^[8]讨论了地形东西方向及南北方向坡度所形成的罗斯贝波的稳定性,并给出了对应的解。

二、基本方程

在考虑地形影响时,描述大气运动的非线性浅水波方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f v - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -f u - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (g H + \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ - \left(u \frac{\partial \phi_B}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_B}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

1988年12月27日收到,1989年5月4日收到修改稿。

其中 u, v 分别为 x, y 方向的速度分量; t 为时间; $f = 2\Omega \sin \varphi$ 为科里奥利参数, Ω 为地球自转角速度, φ 为地球的纬度; H 为流体的平均深度, 取为常数; $\Phi = gh$, h 为流体的扰动深度; $\Phi_B = gh_B(x, y)$, h_B 为地形高度, 并取 $gH - \Phi_B \approx gH$.

为了突出讨论地形作用, 不考虑 $\beta (\beta = \partial f / \partial y)$ 影响, 即令 $\beta = 0$. 由(1)和(2)式可得到涡度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[f_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (4)$$

其中 $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$; φ_0 为某一参考纬度, 我们仅讨论北半球情况, 即 $f_0 > 0$.

在半地转概念下, (3) 和(4) 式可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \left[f_0 + \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi + (gH + \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(u_g \frac{\partial \phi_B}{\partial x} + v_g \frac{\partial \phi_B}{\partial y} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}. \quad (7)$$

其中地转风为

$$u_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

下面我们利用相平面方法求解方程(5)、(6)和(7).

设方程(5)——(7)的解有如下的形式:

$$\phi = \Phi(\theta), \quad u = U(\theta), \quad v = V(\theta), \quad (8)$$

其中 $\theta = kx + ly - \sigma t$; k, l 分别为 x, y 方向上的波数; σ 为频率. 为了讨论方便, 我们不妨取 $k > 0$, 而 l, σ 可取正值、负值或零.

将(8)式代入(5)——(7)式, 得到

$$K_h^2 (\sigma - kU - lV) \Phi''' - f_0^2 (kU + lV)' - K_h^2 (kU + lV)' \Phi'' = 0, \quad (9)$$

$$(\sigma - kU - lV) \Phi' - (c_0^2 + \Phi)(kU + lV)' + \beta k \Phi' = 0, \quad (10)$$

$$(kV - lU)' = \frac{K_h^2}{f_0} \Phi'', \quad (11)$$

其中上标 $'$ 表示对 θ 求导数; $K_h^2 = k^2 + l^2$; $c_0^2 = gH$; $\beta = \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial \phi_B}{\partial y} - \frac{l}{k} \frac{\partial \phi_B}{\partial x} \right)$.

在讨论中把 β 取为常数.

将(9)——(11)式分别对 θ 积分一次, 并取积分常数为零, 则有

$$kU + lV = \frac{\sigma K_h^2 \Phi''}{K_h^2 \Phi'' + f_0^2}, \quad (12)$$

$$kU + lV = \frac{(\sigma + \beta_* k) \Phi}{c_0^2 + \Phi}, \quad (13)$$

$$kV - lU = \frac{K_h^2}{f_0} \Phi'. \quad (14)$$

由(12)和(13)两式有

$$\Phi'' = \frac{f_0^2 (\sigma + \beta_* k) \Phi}{c_0^2 K_h^2 \sigma - K_h^2 \beta_* k \Phi}. \quad (15)$$

很容易看到, 上式为非线性方程, 用 Φ 表示 U 和 V , 有

$$U = -\frac{l}{f_0} \Phi' + \frac{k(\sigma + \beta_* k) \Phi}{K_h^2 (c_0^2 + \Phi)}, \quad (16)$$

$$V = \frac{k}{f_0} \Phi' + \frac{l(\sigma + \beta_* k) \Phi}{K_h^2 (c_0^2 + \Phi)}. \quad (17)$$

因此, 从(15)、(16)、(17)三式可求出 Φ , U 和 V . 由于(15)式是一个比较复杂的非线性方程, 很难得到精确解, 我们求其近似解.

由于 Φ 是流体的扰动深度, 其平衡位置为 $\Phi = 0$, 因而可以将(15)式右端在平衡点 $A(\Phi = 0)$ 附近作 Taylor 级数展开, 即

$$\Phi'' = a_1 \Phi + a_2 \Phi^2 + a_3 \Phi^3 + \dots \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{f_0^2 (c_x + \beta_*)}{K_h^2 c_0^2 c_x}, & a_2 &= \frac{f_0^2 \beta_* (c_x + \beta_*)}{K_h^2 c_0^4 c_x^2}, \\ a_3 &= \frac{f_0^2 \beta_*^2 (c_x + \beta_*)}{K_h^2 c_0^6 c_x^3}, & c_x &= \frac{\sigma}{k}. \end{aligned}$$

下面分别在(18)式中取 Φ 的一次方、二次方及三次方近似进行讨论.

三、线性稳定性及解

在(18)式中取 Φ 的一次方近似为

$$\Phi'' = a_1 \Phi, \quad (19)$$

可以证明: (19)式是(1)~(3)式线性化后的情况.

根据常微分方程的定性理论, 可给出稳定性判据^[9]. (19)式在平衡点 A 附近的特征方程的根为

$$\omega = \pm \sqrt{a_1}. \quad (20)$$

可见, 地形罗斯贝波的稳定性不仅与地形坡度有关, 还与波动本身的性质有关.

1. 当 $a_1 > 0$, 即 $\frac{c_x + \beta_*}{c_x} > 0$ 时, A 为不稳定点. 对于南北向地形, $\beta_* = \frac{1}{f_0} \cdot \frac{\partial \phi_B}{\partial y}$, 在南坡 $\beta_* > 0$, 不稳定判据为 $c_x > 0$ 或 $c_x < -|\beta_*|$, 即对东移或西移较快的波动将出现不稳定; 在北坡 $\beta_* < 0$, 不稳定判据为 $c_x > |\beta_*|$ 或 $c_x < 0$, 即对东移较快或西移的波动将出现不稳定. 对于东西向地形, $\beta_* = -\frac{l}{f_0 k} \frac{\partial \phi_B}{\partial x}$, 在西坡对于导式波, $\beta_* < 0$,

判据为 $c_x < 0$ 或 $c_x > |\beta_s|$, 而对于曳式波, $\beta_s > 0$, 判据为 $c_x > 0$ 或 $c_x < -|\beta_s|$; 在东坡情况相反, 对于东移或西移较快 ($c_x < -|\beta_s|$) 的导式波, 或对东移较快 ($c_x > |\beta_s|$) 及西移的曳式波将出现不稳定, 刘式适等^[7] 得出了类似的结论.

这时(19)式的解为

$$\Phi = c_1 e^{\sqrt{|a_1|} \theta} + c_2 e^{-\sqrt{|a_1|} \theta}, \quad (21)$$

其中 c_1 和 c_2 为积分常数. 显然其解呈指数变化.

2. 当 $a_1 < 0$, 即 $\frac{c_x + \beta_s}{c_x} < 0$, A 点为稳定点. 这时(19)式的解为周期函数

$$\Phi = c_3 e^{i\sqrt{|a_1|} \theta} + c_4 e^{-i\sqrt{|a_1|} \theta}, \quad (22)$$

其中 c_3 和 c_4 为积分常数. 这时地形罗斯贝波的周期 T 为

$$T = \frac{2\pi K_h c_0}{k f_0} \frac{1}{\sqrt{|c_x(c_x + \beta_s)|}}. \quad (23)$$

由上式可看到, 地形坡度越大, 所形成的波动周期越短; 反之, 地形坡度越小, 所形成的波动周期相对较长.

如果取 $a_1 = -m^2$ (m 为某一实数), 则可得到罗斯贝波的频率方程和相速度公式为

$$\sigma = -\frac{f_0^2 \beta_s k}{f_0^2 + m^2 c_0^2 K_h^2}, \quad (24)$$

$$c_x = -\frac{f_0^2 \beta_s}{f_0^2 + m^2 c_0^2 K_h^2}. \quad (25)$$

从(25)式可看到, 当地形罗斯贝波稳定时地形坡度对传播速度有明显的影响, 坡度越大, 移动越快. 表1给出了地形坡度的这种影响. 从中可看出, 北坡有利于波动东移, 南坡使东移减慢; 对导式波, 西坡有利于其东移, 而东坡不利于东移; 对曳式波, 西坡使其东移减慢, 而东坡加快其东移. 这个结果与刘式适等^[9] 的结果较一致.

表1 地形坡度对传播速度的影响

地形 坡度 相 速度	南 坡	北 坡	东 坡		西 坡	
			导式波	曳式波	导式波	曳式波
c_x	< 0	> 0	< 0	> 0	> 0	< 0

四、非线性稳定性及解

在方程(18)中取 Φ 的二次方近似, 得到非线性方程

$$\Phi'' = a_1 \Phi + a_2 \Phi^2, \quad (26)$$

上式为 KdV 方程.

为了讨论方便, 将(26)式改写为常微分方程组

$$\begin{cases} \Phi' = \Psi, \\ \Psi' = a_1 \Phi + a_2 \Phi^2. \end{cases} \quad (27)$$

根据文献[9]可判定其稳定性.

1. 当 $a_1 > 0$ 时, 用(27)式的线性近似方程判断出(27)式在平衡点 $A (\Phi = 0, \Psi = 0)$ 附近不稳定. 该条件类似于前面的线性不稳定条件, 只是这里要采用非线性波动的相速度及波数. 这时(26)式具有孤立波特解, 为

$$\Phi = -\frac{3a_1}{2a_2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{a_1}}{2} \theta \right). \quad (28)$$

可见, 非线性地形罗斯贝波不稳定时 Φ 的振幅有限, 而不象线性情况下随时间无限增长. 根据孤立波解的性质可知, 如果 a_1 越大, 孤立波宽度越小; 反之, 如果 a_1 越小, 则孤立波宽度越大.

从(11)式可求出非线性地形罗斯贝波的地转风涡度为

$$\zeta_{s_1} = \frac{3}{4} \frac{f_0(c_x + \beta_*)}{\beta_*} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{a_1}}{2} \theta \right) \cdot \left[3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{a_1}}{2} \theta \right) - 2 \right]. \quad (29)$$

我们在考虑孤立波峰值附近时, 可以使

$$3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{a_1}}{2} \theta \right) - 2 > 0,$$

因而 ζ_{s_1} 的符号完全由 $(c_x + \beta_*)/\beta_*$ 决定. 表2给出了不稳定地形罗斯贝波的一些性质. 从表中可看到, 地形南坡形成不稳定的东移孤立波槽或西移孤立波脊, 北坡形成不稳定的东移孤立波脊或西移孤立波槽, 因此东西向的地形有利于导式槽和曳式脊形成; 地形西坡形成不稳定的东移导式孤立波脊、东移曳式孤立波槽、西移曳式孤立波脊和西移导式孤立波槽, 而东坡形成不稳定的东移曳式孤立波脊、东移导式孤立波槽、西移导式孤立波脊和西移曳式孤立波槽. 并且孤立波脊的移动要比槽快些.

表2 不稳定地形罗斯贝波的一些性质

	c_x	ζ_{s_1}		导式波		曳式波	
				c_x	ζ_{s_1}	c_x	ζ_{s_1}
北坡	$> \beta_* $	< 0	东坡	> 0	> 0	$> \beta_* $	< 0
	< 0	> 0		$< - \beta_* $	< 0	< 0	> 0
南坡	> 0	> 0	西坡	$> \beta_* $	< 0	> 0	> 0
	$< - \beta_* $	< 0		< 0	> 0	$< - \beta_* $	< 0

2. 当 $a_1 < 0$, 用后续判别法^[9]得到(27)式在平衡点 A 附近是中心点且稳定, 也¹⁾与线性情况类似. 这时(26)式具有如下形式的孤立波特解

$$\Phi = \frac{3}{2} \frac{a_1}{a_2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{-a_1}}{2} \theta \right) - \frac{a_1}{a_2}. \quad (30)$$

将上式代入(11)式可得到稳定的地形罗斯贝波的地转风涡度

$$\zeta_{s2} = \frac{3}{4} \frac{f_0(c_s + \beta_s)}{\beta_s} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-a_1}}{2} \theta\right) \left[3 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-a_1}}{2} \theta\right) - 2 \right]. \quad (31)$$

我们作类似于前面的讨论, 表 3 给出了稳定的地形罗斯贝波的性质, 从表中可见到, 在稳定情况下, 地形只能形成孤立波槽; 在北坡加快其东移, 而南坡使其东移减慢, 从而形成稳定的曳式孤立波槽; 在西坡形成东移导式孤立波槽和西移的曳式孤立波槽, 而东坡形成东移的曳式波槽和西移的导式波槽。

为了对(18)式求更高阶的精度, 我们取 Φ 的三次方近似为

$$\Phi'' = a_1 \Phi + a_2 \Phi^2 + a_3 \Phi^3. \quad (32)$$

与前面类似, 下面讨论其稳定性并求出相应的解。

1. 当 $a_1 > 0$ 时, (32)式在平衡点附近不稳定, 并可求出如下形式的特解:

$$\Phi = \frac{2\sqrt{a_1}}{e^{\sqrt{a_1}\theta} + b_1 e^{-\sqrt{a_1}\theta} + b_2}, \quad (33)$$

$$\text{式中 } b_1 = -\frac{7}{18} a_3, \quad b_2 = -\frac{2}{3} \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}.$$

从(33)式可看到 Φ 为非周期函数。由于 a_1 和 a_3 同号, 因而此时 $b_1 < 0$, 即存在某个 θ^* 使(33)式中分母表达式

$$e^{\sqrt{a_1}\theta} + b_1 e^{-\sqrt{a_1}\theta} + b_2 = 0,$$

即 $\theta \rightarrow \theta^*$ 时, $\Phi \rightarrow \infty$ 。同时, 当 $\theta \in (-\infty, \theta^*)$ 和 $(\theta^*, +\infty)$ 时 Φ 无极值出现, 且当 $\theta \rightarrow \infty$ 时 $\Phi \rightarrow 0$ 。图 1 给出了(33)式的大致图象, 与孤立波解的图形比较类似, 只是在 θ^* 处发生了间断。

表 3 稳定的地形罗斯贝波的性质

地形坡度 β_s	北坡	南坡	东 坡		西 坡	
			导式波	曳式波	导式波	曳式波
相速度 $0 < c_s < \beta_s $	> 0			> 0	> 0	
$- \beta_s < c_s < 0$		> 0	> 0			> 0

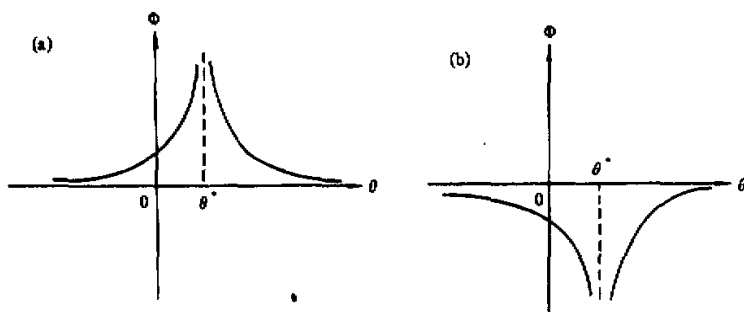


图 1 Φ 为非周期函数的图象

2. 当 $a_1 < 0$ 时, (32) 式在 A 点附近稳定, 其特解为

$$\Phi = \begin{cases} \frac{2a_1}{b_3 \sin(\sqrt{-a_1} \theta) - b_4}, & (\text{当 } \Phi > 0) \\ \frac{-2a_1}{b_3 \sin(\sqrt{-a_1} \theta) + b_4}, & (\text{当 } \Phi < 0) \end{cases} \quad (34)$$

式中 $b_3 = \frac{\sqrt{14}}{3} |a_1|$, $b_4 = \frac{2}{3} a_2$.

显然, (34) 式是周期函数, 其周期仍满足 (23) 式, 由于 $\left| \frac{b_3}{b_4} \right| > 1$, 因而存在 θ_n^* 使 (34) 式中

$$b_3 \sin(\sqrt{-a_1} \theta) - b_4 = 0,$$

或

$$b_3 \sin(\sqrt{-a_1} \theta) + b_4 = 0,$$

其中 $n = 1, 2, 3, \dots$. 因而当 $\theta \rightarrow \theta_n^*$ 时, $\Phi \rightarrow \infty$, 即 (34) 式有无限个间断点, 与解 (30) 式相差很大.

五、结 语

在半地转概念下, 可以用相平面方法得到有地形影响的非线性波动方程, 并通过用 Taylor 级数展开讨论了几种近似情况的稳定性及其解. 在线性情况下, 稳定的地形罗斯贝波的周期和传播速度明显与地形坡度有关; 在不稳定时其解为指数函数. 在非线性情况下, 稳定性判据与线性情况一致; 在二级近似下地形可形成孤立波, 在地形不同位置可形成不同移动方向的不稳定孤立波槽或脊以及稳定的孤立波槽; 东西向地形可形成不稳定的导式槽和曳式脊, 也可形成稳定的曳式槽; 在三级近似下, 解出现间断点, 且不稳定时解为非周期函数, 稳定时解为周期函数.

参 考 文 献

- [1] 杨大升等, 1980, 动力气象学, 气象出版社, 185—187.
- [2] 张曙华, 朱抱真, 1984, 青藏高原南北坡度和积云对流对大型扰动的作用, 青藏高原气象科学实验论文集(二), 科学出版社, 245—252.
- [3] 吕克利, 1986, 大地形和正压 Rossby 波的稳定性, 气象学报, 44, No. 3, 275—281.
- [4] 吕克利, 1987, 大地形与正压 Rossby 孤立波, 气象学报, 45, No. 3, 267—273.
- [5] 刘式适, 谭本超, 1988, 地形作用下的非线性 Rossby 波, 应用数学和力学, 9, No. 3, 229—240.
- [6] 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础, 科学出版社, 第九章.
- [7] Hoskins, B. J., 1975, The geostrophic momentum approximation and semi-geostrophic equations, *J. Atmos. Sci.*, 32, 233—242.
- [8] 刘式适, 刘式达, 1986, 斜压 Rossby 波稳定性的线性和非线性问题, 中国科学(B 辑), 第 11 期, 1055—1062.
- [9] 张锦炎, 1987, 常微分方程几何理论与分支问题(修订版), 北京大学出版社, 第二章.

LINEAR AND NONLINEAR TOPOGRAPHICALLY GENERATED ROSSBY WAVES

Zhao Ping

(Chengdu Meteorological Institute)

Sun Shuqing

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

The stability and the solutions of linear and nonlinear topographically generated Rossby Waves were discussed by using a barotropic semi-geostrophic model. The criterion of nonlinear stability is the same as that of linear one. Under second order approximation both troughs and ridges of unstable isolated waves are formed in different locations, and for stable isolated waves only troughs are formed.

Key words: Topographically generated Rossby wave ; Semi-geostrophic approximation; Wave stability; Isolated wave.