第15卷 第2期　　大　气　科　学　　Vol.15, No.2
1991年　3　月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　Mar., 1991

用 Lagrange 函数平均法研究非均匀基流中的地形 Rossby 波

万　军
（成都气象学院）

提　　要

本文提出可以用平均限制性变分原理来研究非均匀基流中地形对 Rossby 波的影响. 所得到的结果与用多重尺度法相一致, 但却避免了多重尺度法中的冗繁运算, 而且物理意义更加清楚, 诸如波作用量密度、波能密度等物理量的定义也更自然、合理.

关键词: 限制性变分原理; 波作用量密度; 波能密度.

一、引　言

多重尺度法是研究非均匀介质的线性波动与非线性波动的有效方法之一. 运用多重尺度法时, 是把变量关于小参数 ε 的幂的渐进展开式直接代人微分方程中, 从而导出一连串关于 ε 逐阶的方程. 这种运算常常是十分冗繁的. Whitham 提出用平均变分原理, 即 Lagrange 函数的平均法来研究波动[1], 从而简化了运算. 他曾把这一方法成功地用于研究水波问题. 在研究大气波动方面, Seliger 与 Whitham 曾经求得了无基流时线性涡度方程的 Lagrange 函数[2]. 最近, 伍荣生使用 Finlayson 等人提出的限制性变分原理, 求出了非线性涡度方程的 Lagrange 函数[3]. 但是把 Lagrange 函数平均法直接用于研究大气波动的工作还很少见到.

在本文中, 我们试图探索如何使用变分原理来研究大气波动. 作为第一步, 在这里只限于研究存在弱非均匀背景场的线性 Rossby 波, 同时还考虑了具有缓变南北坡度的地形影响. 这个类似的问题, 吕克利使用多重尺度法已作过研究[4]. 这样, 就便于我们把这两种方法进行比较, 并为今后用变分法研究更复杂的非线性大气波动打下基础.

二、非均匀基流中地形 Rossby 波的 Lagrange 函数

假设大气中存在随时间和纬度缓变的基本西风气流, 并考虑存在具有南北坡度随纬度缓变的地形起伏. 即设:

西风基流 $\bar{u}=\bar{u}(\varepsilon t, \varepsilon y)$; 地形坡度 $h_y=h_y(\varepsilon y)$. 其中, $\varepsilon<<1$ 是小参数, $h_y=dh/dy$, 而 $h=h(y)$是地形高度.

1988年12月31日收到, 1989年6月10日收到修改稿.

在以上假设下，从准地转涡度方程出发，很容易导出线性化的扰动涡度方程：

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial \psi}{\partial x}-N^2\frac{\partial \psi}{\partial t}=0, \tag{1}$$

式中 $\psi=\psi(x,y,t)$是扰动流函数，$\partial\psi/\partial x=v$，$\partial\psi/\partial y=-u$，而 u，v 是扰动风速分量；$\beta_1=\beta_1(\varepsilon t,\varepsilon y)=\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{f_0 g}{C_0^2}h_y$，而 β 是 Rossby 参数，取为常数，$C_0=\sqrt{gD}$ 是重力外波波速，f_0 是科里奥利参数，取为常数；$N^2=f_0^2/C_0^2$，取为常数．

为求得(1)式相应的 Lagrange 函数，通常是先令 $\psi=\partial F/\partial t$，从而把(1)式改写成

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 F+\bar{u}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\nabla^2 F+\beta_1\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}-N^2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0, \tag{2}$$

然后再求出与(2)式相应的 Lagrange 函数．这在$\bar{u}$与 β_1 都是常数时容易做到．但在我们需要解决的问题中，$\bar{u}$ 与 β_1 都是 t 与 y 的函数，用通常的方法难以求得(2)式的 Lagrange 函数．因此，依照伍荣生求非线性涡度方程的 Lagrange 函数的做法[3]，即采用 Finlayson 提出的限制性变分原理：在求泛函极值时，令 $\bar{u}$ 与 β_1 为常数，而在求完变分之后再把常数的 $\bar{u}$ 与 β_1 恢复成原来的 $\bar{u}$ 与 β_1．这样一来，用限制性变分原理求得的(1)式的 Lagrange 函数，就应该和用普通变分原理求得的常系数微分方程

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}+\bar{u}_0\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x}+\beta_0\frac{\partial \psi}{\partial x}-N^2\frac{\partial \psi}{\partial t}=0 \tag{3}$$

的 Lagrange 函数是相同的．(3)式中的 $\bar{u}_0$与β_0分别与(1)式中的 $\bar{u}$ 及 β_1 相对应，但它们都是常数．因此，求(1)式的 Lagrange 问题就归结于求出(3)式的 Lagrange.

一般而言，一个微分方程的 Lagrange 函数并不是唯一的．为了求得(3)式具有力学意义的 Lagrange 函数，我们引入随均匀基流 $\bar{u}_0$ 一起运动的坐标系(ξ,y,τ)，其中：

$$\tau=t,\ \xi=x-\bar{u}_0 t,\ y=y. \tag{4}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \tau}-\bar{u}_0\frac{\partial}{\partial \xi};\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi};\\&\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y};\quad \frac{\partial}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_0\frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned} \tag{5}$$

这样，在运动坐标系中方程(3)化为

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \tau}+\beta_0^*\frac{\partial \psi}{\partial \xi}-N^2\frac{\partial \psi}{\partial \tau}=0, \tag{6}$$

式中，$\beta_0^*=\beta_0+\bar{u}_0N^2$是常数.

现令 $\psi=F_\tau$，则(6)式化为

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\nabla^2 F+\beta_0^*\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\partial \tau}-N^2\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}=0. \tag{7}$$

方程(7)的 Lagrange 函数应该是

$$L=\frac{1}{2}\left[F_{\xi\tau}^2+F_{y\tau}^2-\beta_0^*F_\xi F_\tau+N^2F_\tau\right]. \tag{8}$$

对于线性正压涡度方程

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}+\beta\frac{\partial \psi}{\partial x}=0,$$

Whitham 与伍荣生在令$\psi=F_t$ 之后，都分别求得它的 Lagrange 函数是

$$L=\frac{1}{2}\left[F_{xt}^{2}+F_{yt}^{2}-\beta F_{x}F_{t}\right].$$

伍荣生还证明了形如上式的 L 正是具有力学意义的 Lagrange 函数，即 $L=E-W$（E 和 W 分别是质点的动能与位能）．因此，完全有理由相信，形如(8)式的 L 就是常系数微分方程(6)[或(7)]具有力学意义的 Lagrange 函数．

回到原来的 (x, y, t) 坐标系，利用(5)式，(8)式化为

$$L=\frac{1}{2}\left[(F_{xt}+\overline{u}_0F_{xx})^2+(F_{yt}+\overline{u}_0F_{xy})^2-\beta_0{}^*F_x(F_t+\overline{u}_0F_x)+N^2(F_t+\overline{u}_0F_x)^2\right]. \tag{9}$$

(9)式就是常系数微分方程(3)在求一般变分意义下的 Lagrange，也就是变系数微分方程(1)在求限制性变分意义下的 Lagrange 函数．

三、求平均的 Lagrange 函数

设方程(1)存在周期性的波包解：

$$\psi=\psi(\theta, X, Y, T, \varepsilon), \tag{10}$$

式中 $X=\varepsilon x$，$Y=\varepsilon y$，$T=\varepsilon t$ 是慢坐标；而

$$\theta=\varepsilon^{-1}\Theta(X, Y, T) \tag{11}$$

是位相，并且有

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\Theta}{\partial T}=-\omega(X, Y, T), \tag{12}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\Theta}{\partial X}=k(X, Y, T), \tag{13}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial\Theta}{\partial Y}=l(X, Y, T), \tag{14}$$

式中 ω 是局地圆频率；k 与 l 分别是 x 和 y 方向的局地波数．在方程(1)中的 $\overline{u}$ 和 β_1 是 y 和 t 的缓变函数，即它们都是 Y 和 T 的函数．因此，ω 不仅通过局地波数 k，l 而与 X，Y，T 有关，并且在 ω 中应该显含 Y 和 T，即

$$\omega=W(k, l, Y, T). \tag{15}$$

对于常系数方程(3)，仍记周期性的波包解为

$$\psi=\psi(\theta, X, Y, T, \varepsilon). \tag{16}$$

但(16)式与(10)式不同之处在于，由于方程(3)中的 $\overline{u}_0$ 和 β_0 都是常数，因此局地圆频率 $-\partial\theta/\partial t$ 不应该显含 Y 与 T，而是通过局地波数 k 与 l 而与 X，Y，T 有关．即

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\omega_0(X, Y, T)=W_0(k, l), \tag{17}$$

而

$$k=k(X, Y, T), \qquad l=l(X, Y, T).$$

对于方程(3)，由于 $\psi=F_t$，因此，由(16)式知

$$F=F(\theta, X, Y, T, \varepsilon). \tag{18}$$

把 F 按小参数 ε 展开，有

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^nF^n(\theta, X, Y, T). \tag{19}$$

仿照 Whitham，对于使用 Lagrange 函数平均法，展开式(19)只需要取最低阶近似就够了[1]. 于是有

$$F \sim F^0(\theta, X, Y, T). \tag{20}$$

为简便起见，今后略去上标“0”.

对于最低阶近似有

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\omega_0 F_0; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = -\omega_0 k F_{\theta\theta}; \cdots\cdots$$

把它们代入(9)式中，得到

$$L = \frac{1}{2}\left[(\omega_0 - \bar{u}_0 k)^2 (k^2 + l^2) F_{\theta\theta}^2 + \beta_0^* k(\omega_0 - \bar{u}_0 k) F_\theta^2 + N^2(\omega_0 - \bar{u}_0 k)^2 F_\theta^2\right]. \tag{21}$$

又因为

$$\psi = F_\tau = F_t + \bar{u}_0 F_x = -(\omega_0 - \bar{u}_0 k) F_\theta,$$

于是有

$$F_\theta = -\psi / (\omega_0 - \bar{u}_0 k), \tag{22}$$

以及

$$F_{\theta\theta} = -\psi_\theta / (\omega_0 - \bar{u}_0 k). \tag{23}$$

把(22)和(23)式代入(21)式，得到

$$L = \frac{1}{2}\left[(k^2 + l^2)\psi_\theta + \left(\frac{\beta_0^* k}{\omega_0 - \bar{u}_0 k} + N^2\right)\psi\right]. \tag{24}$$

对于所研究的线性问题，进一步可以假设

$$\psi = a(X, Y, T)\cos(\theta + \eta), \tag{25}$$

其中，a 是缓变振幅，η 是初始位相.

把(25)式代入(24)式，得到

$$L = \frac{1}{2}\left[(k^2 + l^2) a^2 \sin^2(\theta + \eta) + \left(N^2 + \frac{\beta_0^* k}{\omega_0 - \bar{u}_0 k}\right) \cdot a^2 \cos^2(\theta + \eta)\right]. \tag{26}$$

按照 Whitham 的定义[1]，求平均的 Lagrange 函数是

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(\theta, k, l, \omega_0, a)\, d\theta.$$

把(26)式代入上式，积分后得到

$$L = a^2 / 4\left[(k^2 + l^2 + N^2) + \beta_0^* k / (\omega_0 - \bar{u}_0 k)\right]. \tag{27}$$

可见，平均的 Lagrange 函数是经过中间自变量 $-\Theta_T = \omega_0, \Theta_X = k, \Theta_Y = l$ 及 a 的慢坐标 X, Y, T 的函数，即

$$L = L(-\Theta_T, \Theta_X, \Theta_Y, a). \tag{28}$$

四、色散关系式

下面我们使用平均限制性变分原理来研究由(1)式所描写的波动.

对于泛函

$$\iiint_R L(-\Theta_T, \Theta_X, \Theta_Y, a)dXdYdT$$

的平均变分原理是

$$\delta \iiint_R L(-\Theta_T, \Theta_X, \Theta_Y, a)dXdYdT = 0. \tag{29}$$

关于 a 的变分 δa 的变分方程是

$$\delta a: \quad La = 0. \tag{30}$$

根据(27)式得到

$$(k^2 + l^2 + N^2) + \frac{\beta_0{}^* k}{\omega_0 - \overline{u}_0 k} = 0. \tag{31}$$

(31)式给出了由方程(3)所描写的波动的色散关系．而要得到所关心的由(1)式所描写的波动的色散关系式，如前所述，我们应该使用限制性变分原理．即在求出变分方程(31)之后，应该分别用$\overline{u}$ 和 β^* 及 ω 去替换(31)式中的 $\overline{u}_0$,$\beta_0{}^*$ 及 ω_0(今后在求其它变分方程时也会出现类似运算，将不再专门加以说明)．这样，就求出了我们所需要的色散关系式

$$\omega = \overline{u}k - \beta^* k \,/\, (k^2 + l^2 + N^2) = \overline{u}k - \beta^* k \,/\, S^2. \tag{32}$$

式中 $S^2 = k^2 + l^2 + N^2$.

注意到 β^* 是与 $\beta_0{}^*$ 相对应的，应该有

$$\beta^* = \beta_1 + \overline{u}N^2 = \beta - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{f_0 g}{C_0^2} h_y + \overline{u}N^2 .$$

把上式代入(32)式，得到

$$\omega = \overline{u}\,k - \left(\beta - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{f_0 g}{C_0^2} h_y + \overline{u}N^2\right) k \Big/ (k^2 + l^2 + N^2). \tag{33}$$

(33)式与吕克利用多重尺度法当 $h_x = 0$ 时所得到的结果[4] 是一致的．(33)式可以用来讨论地形起伏对于 Rossby 波移速的影响，这方面的讨论可以在吕文中找到，这里不再重复．

由(32)式可以求出波包群速度在 x 和 y 方向的分量，它们分别是

$$C_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \overline{u} - \beta^* / S^2 + 2k^2 \beta^* / (S^2)^2, \tag{34}$$

$$C_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = 2\beta^* k l / (S^2)^2. \tag{35}$$

五、波作用方程

平均变分原理(29)式关于变分 $\delta\Theta$ 的变分方程是

$$\delta\Theta: \frac{\partial}{\partial T} L_{\omega 0} - \frac{\partial}{\partial X} L_k - \frac{\partial}{\partial Y} L_l = 0. \tag{36}$$

(36)式称为波作用守恒方程．

由(27)式求得

$$L_{\omega_0}=-\frac{a^2}{4}\beta_0{}^*k\,/\,(\omega_0-\bar{u}_0k)^2, \tag{37}$$

$$L_k=\frac{a^2}{4}[2k+\beta_0{}^*\,/\,(\omega_0-\bar{u}_0k)+\beta_0{}^*\bar{u}_0k\,/\,(\omega_0-\bar{u}_0k)^2]. \tag{38}$$

$$L_l=\frac{a^2}{4}2l. \tag{39}$$

又$\omega_0-\bar{u}_0k=-\beta_0{}^*k\,/\,S^2$，把它代入(37)—(39)式后，有

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{\beta_0{}^*k}\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{a^2}{4}\left[2k-\frac{S^2}{k}+\frac{\bar{u}_0(S^2)^2}{\beta_0{}^*k}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{a^2}{4}2l\right]=0,$$

或

$$\frac{1}{\beta_0{}^*}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{k}\right]+\frac{\bar{u}_0}{\beta_0{}^*}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{k}\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{a^2}{4}\left(2k-\frac{S^2}{k}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{a^2}{4}2l\right]=0.$$

注意到限制性变分原理的要求，最终的结果应该是

$$\frac{1}{\beta^*}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{k}\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{a^2}{4}\left(2k-\frac{S^2}{k}\right)\right]+\frac{\bar{u}}{\beta^*}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{k}\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{a^2}{4}2l\right]=0. \tag{40}$$

由于$\bar{u}$与β^*都与X无关，(40)式可改写成

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{\beta^*k}\right]+\frac{a^2(S^2)^2}{4k\beta^{*2}}\frac{\partial\beta^*}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{a^2}{4}\left[2k+\frac{\bar{u}}{\beta^*}\frac{(S^2)^2}{k}-\frac{S^2}{k}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{a^2}{4}2l\right]=0. \tag{41}$$

对于均匀介质的情况($\bar{u}_0$，$\beta_0{}^*$均为常数)，按照 Whitham 的定义，$L_{\omega_0}=\frac{(a^2/4)\cdot S^2}{\omega_0-\bar{u}_0k}$称为波作用量密度[5]．仿此，对于非均匀的情况，我们也把$\frac{(a^2/4)\cdot S^2}{\omega-\bar{u}k}$称为波作用量密度，记为$I$．即

$$I=\frac{(a^2/4)\cdot S^2}{\omega-\bar{u}k}=\frac{-(a^2/4)(S^2)^2}{\beta^*k}. \tag{42}$$

注意到群速度的公式(34)—(35)，我们有

$$\begin{aligned}C_{gx}\cdot I&=\frac{-(a^2/4)(S^2)^2}{\beta^*k}\left[\bar{u}-\beta^*/S^2+\frac{2k^2\beta^*}{(S^2)^2}\right]\\&=\frac{a^2}{4}\left[2k+\frac{\bar{u}}{\beta^*}\frac{(S^2)^2}{k}-\frac{S^2}{k}\right],\end{aligned} \tag{43}$$

$$C_{gy}\cdot I=\frac{-\frac{a^2}{4}(S^2)^2}{\beta^*k}\cdot\frac{2\beta^*kl}{(S^2)^2}=-\frac{a^2}{4}2l. \tag{44}$$

利用(42)—(44)式，可以把(41)式写成

$$\frac{\partial I}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}[C_{gx}\cdot I]+\frac{\partial}{\partial Y}[C_{gy}\cdot I]=-\frac{I}{\beta^*}\frac{\partial\beta^*}{\partial T}. \tag{45}$$

(45)式称为波作用方程. 上式表明，当β^*与时间有关，即基本气流$\bar{u}$为非定常时，由(42)式所定义的波作用量密度I不守恒，而当基流$\bar{u}$定常时，I守恒.

六、能 量 方 程

对于常系数的涡度方程(3)，其相应的变分原理对于时间t的平移为不变. 因此，根据变分学中的Noether定理，由(3)式所描写的波动(平均)能量方程是

$$\frac{\partial}{\partial T}(\omega_0L_{\omega_0}-L)+\frac{\partial}{\partial X}(-\omega_0L_k)+\frac{\partial}{\partial Y}(-\omega_0L_a)=0. \tag{46}$$

因 $L=\frac{a^2}{4}\left(S^2+\frac{\beta_0{}^*k}{\omega_0-\bar{u}_0k}\right)\equiv 0$，于是(46)式化为

$$\frac{\partial}{\partial T}(\omega_0L_{\omega_0})+\frac{\partial}{\partial X}(-\omega_0L_k)+\frac{\partial}{\partial Y}(-\omega_0L_a)=0. \tag{47}$$

如令 $\omega_0L_{\omega_0}=E_0$，则容易把(47)式改写成

$$\frac{\partial E_0}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C^0_{gx}\cdot E_0)+\frac{\partial}{\partial Y}(C^0_{gy}\cdot E_0)=0, \tag{48}$$

式中E_0是波能密度，而C^0_{gx}与C^0_{gy}分别是

$$C^0_{gx}=\frac{\partial\omega_0}{\partial k}=\bar{u}_0-\beta_0{}^*/S^2+2k^2\beta_0{}^*/(S^2)^2, \tag{49}$$

$$C^0_{gy}=\frac{\partial\omega_0}{\partial l}=2\frac{\beta_0{}^*kl}{(S^2)^2}. \tag{50}$$

(48)式表明，对于方程(3)所描写的那种均匀介质中的波动，波的平均能量守恒.

为了导得由方程(1)所描写的非均匀介质中波的能量方程，仍象前面一样使用限制性变分. 为此，把(47)式展开，有

$$L_{\omega_0}\frac{\partial\omega_0}{\partial T}-L_k\frac{\partial\omega_0}{\partial X}-L_l\frac{\partial\omega_0}{\partial Y}+\omega_0\left[\frac{\partial L_{\omega_0}}{\partial T}-\frac{\partial L_k}{\partial X}-\frac{\partial L_l}{\partial Y}\right]=0. \tag{51}$$

注意到(37)—(39)式以及(31)式，可以把(51)式化为

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{\beta_0{}^*k}\frac{\partial\omega_0}{\partial T}+\frac{a^2}{4}\left(2k-\frac{S^2}{k}+\frac{(S^2)^2\bar{u}_0}{\beta_0{}^*k}\right)\frac{\partial\omega_0}{\partial X}+\frac{a^2}{4}2l\frac{\partial\omega_0}{\partial Y}\right\}\\&+\omega_0\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{\beta_0{}^*k}\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{a^2}{4}\left(2k-\frac{S^2}{k}+\frac{(S^2)^2\bar{u}_0}{\beta_0{}^*k}\right)\right]\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{a^2}{4}2l\right]\right\}=0.\end{aligned} \tag{52}$$

由于 $I_0=L_{\omega 0}=\dfrac{(a^2/4)\cdot S^2}{\omega_0-\overline{u}\,k}=\dfrac{-(a^2/4)(S^2)^2}{\beta_0{}^*k}$，再注意到(49)—(50)式，则(52)式中的第一个｛　｝应该是

$$-I_0\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial T}+C^0_{gx}\frac{\partial\omega_0}{\partial X}+C^0_{gy}\frac{\partial\omega_0}{\partial Y}\right). \tag{53}$$

又因为 $\omega_0=W_0(k,l)$ 不显含 T，所以有

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial T}+C^0_{gx}\frac{\partial\omega_0}{\partial X}+C^0_{gy}\frac{\partial\omega_0}{\partial Y}=0,$$

于是(52)式中的第一个｛　｝应为0. 这样，(52)式就化为

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{a^2}{4}\frac{(S^2)^2}{\beta_0{}^*k}\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{a^2}{4}\left(2k-\frac{S^2}{k}+\frac{(S^2)^2\overline{u}_0}{\beta_0{}^*k}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{a^2}{4}2l\right]=0. \tag{54}$$

按照限制性变分的要求，(54)式最终化为

$$\frac{1}{\beta^*}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{(a^2/4)(S^2)^2}{k}\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{a^2}{4}\left(2k-\frac{S^2}{k}+\frac{\overline{u}\,(S^2)^2}{\beta^*k}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{a^2}{4}2l\right]=0. \tag{55}$$

(55)式正是对应于变分 $\delta\Theta$ 的变分方程(40)式，它最终将导得波作用方程(45)式. 可见用限制性变分原理来研究非均匀介质的情况，Noether 定理不能直接导出能量方程，它只是验证了波作用方程(45)的正确性. 为了求出能量方程，我们应该着眼于(45)式. 我们注意到，对于均匀介质的情形，Noether 定理直接给出了波作用量密度 $I_0=L_{\omega_0}$ 与波能密度 E_0 之间的关系，即 $I_0=L_{\omega_0}=E_0/\omega_0$. 因此，对于非均匀介质的情形，我们也应该定义波能密度

$$E=I\omega, \tag{56}$$

即

$$I=E/\omega. \tag{57}$$

把(57)式代入波作用方程(45)中，我们有

$$\frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial E}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}E)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}E)-\frac{E}{\omega^2}\left[\frac{\partial\omega}{\partial T}+C_{gx}\frac{\partial\omega}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial\omega}{\partial Y}\right]\right]=-\frac{I}{\beta^*}\frac{\partial\beta^*}{\partial T}. \tag{58}$$

由于对于非均匀介质，$\omega=W(k,l,Y,T)$，因此有

$$\frac{\partial\omega}{\partial T}+C_{gx}\frac{\partial\omega}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial\omega}{\partial Y}=\frac{\partial W}{\partial T}. \tag{59}$$

对于我们的情形，由于 $\omega=\overline{u}(Y,T)k-\dfrac{\beta^*(Y,T)k}{S^2}$，因此，由(59)式得到

$$\frac{\partial\omega}{\partial T}+C_{gx}\frac{\partial\omega}{\partial X}+C_{gy}\frac{\partial\omega}{\partial Y}=k\frac{\partial\overline{u}}{\partial T}-\frac{k}{S^2}\frac{\partial\beta^*}{\partial T}. \tag{60}$$

把(60)式代入(58)式后，可得

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}E)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}E)=Ik\frac{\partial \overline{u}}{\partial T}-\frac{Ik}{S^2}\frac{\partial \beta^*}{\partial T}-\frac{I\omega}{\beta^*}\frac{\partial \beta^*}{\partial T}. \tag{61}$$

再注意到色散关系式(32)，则(61)式化为

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}E)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}E)=\frac{Ik}{\beta^*}\left[\beta^*\frac{\partial \overline{u}}{\partial T}-\overline{u}\frac{\partial \beta^*}{\partial T}\right]. \tag{62}$$

又$\beta^*=\beta-\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}+\frac{f_0 g}{C_0^2}h_y+\overline{u}N^2$，把它代入(62)式，可得

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(C_{gx}E)+\frac{\partial}{\partial Y}(C_{gy}E)=\frac{Ik}{\beta^*}\left[\beta^*\frac{\partial \overline{u}}{\partial T}+\overline{u}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial T}\right)-\overline{u}N^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial T}\right]. \tag{63}$$

(63)式是能量方程的最终形式．从(63)式可以看出，如果基流$\overline{u}$定常，则波能量守恒；反之，如果基流$\overline{u}$非定常，一般而言能量将不守恒．

我们所得到的能量方程与文献[4]不同．文献[4]指出基流的切变是Rossby波的能量源．而我们的结果是，基流随时间的变化才是Rossby波的能量源．导致这两个结论如此不同的原因在于波能密度E的定义不同．文献[4]定义波能密度$E=I(\omega-\overline{u}m)$(此处的$m$相当于我们文中的$k$)，而我们则定义$E=I\omega$．我们认为，从Noether定理出发，定义$E=\omega L_\omega-L=I\omega$(由于$L\equiv 0$)才是合理的．把$\omega L_\omega-L$与Hamilton函数$H=\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L$相比较，我们可以把$\omega L_\omega-L$看成是平均的Hamilton函数．而$H$是系统的总能量，所以认为$\omega L_\omega-L$是平均能量密度才是合理的．Whitham在文献[5]中也曾指出过，对于存在基流V的线性情况，如选取不随基流运动的静止坐标系，则平均Lagrange函数是$L=G(\omega,k)a^2$，此时有$E=\omega L_\omega$．如果选取随基流运动的坐标系，则有$\omega_0=\omega-Vk$，$L_0=G_0(\omega_0,k)a^2$，此时有$E_0=\omega_0 L_{\omega_0}$．从文献[4]看，他选用的是不随基流运动的静止坐标系，文中的波作用量密度I相当于我们这里的L_ω．因此，他定义$E=(\omega-Vk)I=\omega_0 I$，可能是不太恰当的．在本文的工作中，最终所求出的Lagrange函数也是写在静止坐标系(x,y,t)中的(参见(19)式)，因此，定义$E=\omega L_\omega=I\omega$可以认为是合适的．

此外，对于非均匀介质的情形，如果采用普通的变分原理(假设Lagrange函数容易求得)，按照文献[1]的能量方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega L_\omega-L)+\frac{\partial}{\partial x_j}(-\omega L_{kj})=-L_t.$$

正如Whitham所指出的，这表明如果介质依赖于时间t，能量便不再守恒．显然，用限制性变分原理所得到的结果和这个结论是一致的．

七、小 结

使用平均限制性变分原理来研究非均匀基流中线性地形Rossby波，和他人用多重

尺度法所得到的结果基本是一致的．但使用这种方法不仅避免了许多冗繁运算，而且物理意义更为清楚，可以自然地引入诸如波作用量密度、波能密度等重要物理量的定义，从而避免了用其它方法的不确切性．因此，使用变分法来研究大气波动，在某些方面是非常有意义的．

参　考　文　献

[1] Whitham, G. B.、1986，线性与非线性波（中译本），科学出版社，370 — 376.

[2] Seliger, R. L. & G. B. Whitham, 1968, Variational principles in continuum mechanics, *Proc. Roy. Soc. A*, **305**, 1 — 25.

[3] 伍荣生，1986，Rossby 波的能量、能量通量与 Lagrange 函数，气象学报，第 44 卷，第 2 期，158 — 165.

[4] 吕克利，1986，大地形和正压 Rossby 波的稳定性，气象学报，第 44 卷，第 3 期，275 — 281.

[5] Leibovich, S. & A. seebass, 1977（俄译本），Нелинейные Волны，ИЗДАТЕЛЬ — СТВО《МИР》Москва, 174 — 175.

STUDY OF TOPOGRAPHIC ROSSBY WAVE IN UNEVEN BASIC FLOW WITH AVERAGE METHOD OF LAGRANGE FUNCTION

Wan Jun

(Chengdu Institute of Meteorology)

Abstract

In this paper the principle of average limited variation is suggested to study the effect of topography on Rossby Wave in uneven basic flow. The conclusion is the same as that of multi-scale method which needs very complex computation.

The definitions of wave action density and wave energy density in this paper are more reasonable.

Key words: Limited variation; Wave action density; Wave energy density.