

冷迭流的稳定性及其解析解的分析

欧阳首承 朱克云 肖天贵

(成都气象学院, 成都, 610041)

提 要

本文利用相法讨论了 y 方向无限伸延的冷迭流方程. 首先发现其非线性项作用由于 z 方向上的补偿作用而消失, 即其相空间的方程是四阶线性常微分方程. 利用 Hurwitz 方法分析其稳定时, 证明了唯有中性大气符合冷迭流的稳定性条件. 其解析解的趋势表明与观测结果类似.

关键词: 冷迭流; 稳定性; 相空间.

一、引 言

冷迭流是晴天夜空因重力作用而沿坡面流下的冷空气. 由于其在一定条件下的滞流作用, 对山区污染物的扩散, 农作物及树木的低温冷害有重要的影响, 因而, 冷迭流是山区气候的重要课题. 目前, 研究冷迭流多以观测数据^[1-3]进行分析, 而文献[4]采用不考虑层结的非线性模式进行了数值计算, 得出有意义的结果, 但没有指出 $s=0$ 的原因. 本文利用相法分析了冷迭流方程, 演算中发现相空间的冷迭流方程, 由于 z 方向的补偿作用, 其非线性项自动消失, 即此问题转化为相空间时, 可以不涉及非线性作用, 并通过求解四阶线性常微分方程可得到类似于文献[4]的结果. 利用 Hurwitz 方法讨论其稳定性时, 发现唯有中性层结时, 沿山坡下滑的冷迭流是稳定的. 这也间接地证实了文献[4]采用 $s=0$ 的方程组是合理的. 显然, 这对冷迭流的发生、发展的分析和观测是具有理论和应用意义的.

二、基本方程及稳定性分析

如图1所示, 考虑坡度为 α 的斜坡, 设 x 轴平行于斜坡而向下, z 轴垂直于斜坡而向上. 由于冷迭流的尺度较小, 故略去 f , 其基本方程为(文献[5]):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \theta \sin \alpha, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \theta = \mu_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - s \cdot u \sin \alpha, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

式中 u, θ, w 分别为坡面的流速、温差及垂直于坡面的速度; $\eta = \beta g$ ($\beta \approx 1/273$ 为空气的热膨胀系数); s 为层结参数, $s > 0$ 表示稳定, $s < 0$ 表示不稳定层结 (s 为常数); μ_1, μ_2 为 x, z 方向上的湍流交换系数, 均取为常数.

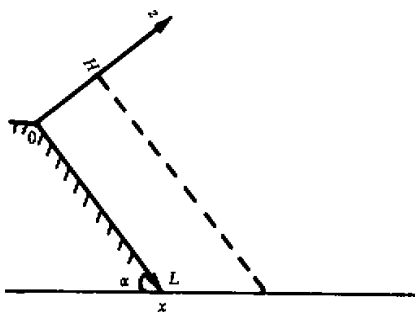


图1 坐标选取

$$\begin{aligned}
 & \text{将(1)式用微分算子 } \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ 作用并利用(2)式可以得到,} \\
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 & = \left(\mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 & - \eta \cdot s u \sin^2 \alpha.
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} u = u(\xi) \\ w = w(\xi) \\ \xi = kx + mz - vt \end{cases} \tag{5}$$

(5)式代入(4)式, 有

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) [(-v + ku + mw) u_\xi - (\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2) u_{\xi\xi}] \\
 & = \left(\mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [(-v + ku + mw) u_\xi - (\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2) u_{\xi\xi}] \\
 & - \eta s u \sin^2 \alpha.
 \end{aligned} \tag{6}$$

由(3)式, 有

$$ku + mw = 0,$$

上式代入(6)式经整理得,

$$u_{\xi\xi\xi\xi} + \alpha_1 u_{\xi\xi\xi} + \alpha_2 u_{\xi\xi} + \alpha_3 u_\xi + \alpha_4 u = 0, \tag{7}$$

式中下标 ξ 表示对 ξ 求导, 而

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2v(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^2}, & \alpha_2 = \frac{v^2}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^2}, \\ \alpha_3 = 0, & \alpha_4 = \frac{\eta \cdot s \sin^2 \alpha}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^2}. \end{cases} \quad (8)$$

(7)式即为相空间的四阶常微分方程。之中是由于 $ku + mw = 0$ 的原因，导致相空间的非线性项消失。由于(7)式为线性常微分方程，故可根据 Hurwitz (文献 [6]) 判别式讨论其稳定性，其稳定性条件为

$$\begin{cases} \frac{2v(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^2} > 0 \\ \frac{2v^3(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^4} > 0 \\ -\frac{4v^2(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^2}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^4} \cdot \frac{\eta s \sin^2 \alpha}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^2} > 0 \\ \frac{\eta s \sin^2 \alpha}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^2} > 0 \end{cases} \quad (9)$$

由(9)式的第三及第四式知，对于冷迳流的厚度而言，应是 $s=0$ ，即在冷迳流的厚度层内可视为一致的，否则无论是 $s>0$ 或是 $s<0$ 均会导致不稳定。这也间接地证明了文献 [4] 所使用的方程中，不考虑 s 项在理论上的合理性，于是稳定性条件(9)变为，

$$\begin{cases} \frac{2v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2} > 0, \\ \frac{2v^3}{(\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2)^3} > 0 \end{cases} \quad (10)$$

(10)式进一步说明了， $v>0$ 时沿山坡下滑的冷迳流是稳定的；而 $v<0$ ，即沿山坡上行的冷迳流是不稳定的。这也正说明了， $s=0$ ，即中性层结时，冷迳流的危害较大。显然，上式除了理论上的意义外，对于冷迳流的观测和预报均有实际意义。

三、方程的求解及讨论

由于 $\alpha_3=0$ ，及中性层结时 $s=0$ ，即 $\alpha_4=0$ ，故(7)式的特征方程可以写为

$$\lambda^2(\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2) = 0, \quad (11)$$

其4个特征根分别为

$$\lambda = 0; 0; -\frac{v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2}; -\frac{v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2}.$$

于是(7)式的通解为，

$$u = C_1 e^{\lambda \xi} + C_2 \xi e^{\lambda \xi} + C_3 + C_4 \xi, \quad (12)$$

式中 C_1, C_2, C_3, C_4 为待定常数， $\lambda = -\frac{v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2}$ 。由于(7)式是相空间的四阶常微分方程，为求特解可分别按自变量 $\xi=0, \xi=\xi_1, \xi=\xi_2, \xi=mH$ 给出下列条件：

$$\begin{cases} \xi = 0, & u = 0, \\ \xi = \xi_1 = kL - vT, & u = 0, \\ \xi = \xi_2 = kL + mH - vT, & u = u_0, \\ \xi = mH, & u = u_0, \end{cases} \quad (13)$$

其中 L 为坡面长度, H 为 z 方向的厚度, (13) 式中的第一式表示原空间在坡面上 ($z=0$, $k, v=0$), 风速为 0; 第二式表示在坡底, 时间尺度为 T 时, 风速为 0 (文献 [4]). 将 (13) 式代入 (12) 式, 经演算可求得:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{u_0 (\xi_2 e^{\lambda \xi_2} - \xi_1^2 e^{\lambda \xi_1} + mH e^{\lambda mH})}{(\xi_1 e^{\lambda \xi_1} + e^{\lambda mH})(mH e^{\lambda \xi_2} + \xi_1 - \xi_2 e^{\lambda mH}) + \xi_2 (e^{\lambda \xi_2} + e^{\lambda mH})(mH - 1 - e^{\lambda mH} - mH e^{\lambda \xi_1})}, \\ C_2 &= \frac{-u_0 \xi_1 (e^{\lambda mH} - \xi_2 e^{\lambda mH} - mH e^{\lambda \xi_1} + mH e^{\lambda \xi_2} - \xi_2 - 1)}{mH [(\xi_1 e^{\lambda \xi_1} + e^{\lambda mH})(mH e^{\lambda \xi_2} + \xi_1 - \xi_2 e^{\lambda mH}) + \xi_2 (e^{\lambda \xi_2} + e^{\lambda mH})(mH - 1 + e^{\lambda mH} - mH e^{\lambda \xi_1})]}, \\ C_3 &= -C_1, \\ C_4 &= \frac{u_0}{mH} \\ &+ \frac{u_0 (\xi_2 e^{\lambda \xi_2} - \xi_1^2 e^{\lambda \xi_1} + mH e^{\lambda mH}) - u_0 e^{\lambda mH} [(\xi_2 + \xi_1 mH) e^{\lambda \xi_2} - \xi_1 \xi_2 e^{\lambda \xi_1} + \xi_2 (1 - \xi_1) e^{\lambda mH}]}{mH [(\xi_1 e^{\lambda \xi_1} + e^{\lambda mH})(mH e^{\lambda \xi_2} + \xi_1 - \xi_2 e^{\lambda mH}) + \xi_2 (e^{\lambda \xi_2} + e^{\lambda mH})(mH - 1 + e^{\lambda mH} - mH e^{\lambda \xi_1})]}, \end{aligned}$$

式中, $\xi_1 = kL - vT$, $\xi_2 = kL + mH - vT$, $\lambda = -\frac{v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2}$.

由冷锋流的观测事实^[1,7], 知其在时空分布上具有极值的特征, 经演算, 当

$$2(kL - vT) e^{2\lambda(kL - vT)} = mH$$

成立时, 相应地有

$$C_4 = 0.$$

于是 (7) 式的特解为

$$u = C_1 e^{-\frac{v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2} \xi} + C_2 \xi e^{-\frac{v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2} \xi} + C_3. \quad (14)$$

下面讨论 (14) 式的时空变化特征.

1) 时间的变化特征

令

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{v}{\mu_1 k^2 + \mu_2 m^2}, & \tilde{C}_1 &= C_1 e^{-\lambda_1(kx + mz)}, \\ \tilde{C}_2 &= C_2 e^{-\lambda_1(kx + mz)}, & \tilde{C}_3 &= C_3, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

则 (14) 式变为

$$u = \tilde{C}_1 e^{\lambda_1 vt} - \tilde{C}_2 v t e^{\lambda_1 vt} + C_3. \quad (15)$$

由此, 有

$$u_t = \lambda_1 v \tilde{C}_1 e^{\lambda_1 vt} - v \tilde{C}_2 e^{\lambda_1 vt} - \lambda_1 v^2 \tilde{C}_2 t e^{\lambda_1 vt}. \quad (16)$$

$u_t = 0$ 为驻点, 即

$$\begin{aligned} \lambda_1 v \tilde{C}_1 - v \tilde{C}_2 - \lambda_1 v^2 \tilde{C}_2 t_1 &= 0 \\ \text{或} \quad t_1 &= (\lambda_1 \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) / \lambda_1 v \tilde{C}_2. \end{aligned} \quad (17)$$

而

$$u_{tt} = (\lambda_1^2 v^2 \tilde{C}_1 - 2 \tilde{C}_2 \lambda_1 v^2 - \tilde{C}_2 \lambda_1^2 v^3 t) e^{\lambda_1 v t}.$$

(17)式代入上式, 即

$$u_{tt}|_{t=t_1} = -\tilde{C}_2 \lambda_1 v^2 e^{\lambda_1 v t_1},$$

若 $v > 0$, 则 $\lambda_1 > 0$, 故有

$$u_{tt}|_{t=t_1} \begin{cases} > 0, & \text{当 } \tilde{C}_2 < 0, \\ < 0, & \text{当 } \tilde{C}_2 > 0. \end{cases} \quad (18)$$

取 $\tilde{C}_2 > 0$, 则 $u_{tt}|_{t=t_1} < 0$, 即在 $t=t_1$ 处 u 取得极大值. 所以 u 的时间变化是由初始时刻, 即 $t=0$, 则 $u=0$, 随时间 t 的增长, u 也增长, 到 $t=t_1$ 时, 达到极大值. 然后随时间减小到 $t=T$ 时为止. 其随时间的变化曲线如图 2 所示.

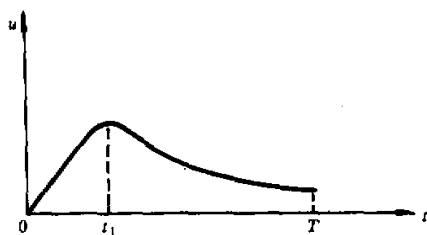


图2 坡面冷径流 u 随时间的变化曲线图

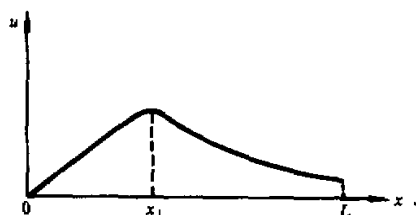


图3 冷径流沿坡面变化的示意图

2) 空间 (x 方向) 的分布特征

令

$$C_{11} = C_1 e^{-\lambda_1 (mx - vt)},$$

$$C_{21} = C_2 e^{-\lambda_1 (mx - vt)},$$

$$C_{31} = C_3, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

则有

$$u = C_{11} e^{-\lambda_1 kx} + C_{21} kx e^{-\lambda_1 kx} + C_{31}.$$

而

$$u_x = (-\lambda_1 k C_{11} + C_{21} k - C_{21} \lambda_1 k^2 x) e^{-\lambda_1 kx}.$$

$u_x = 0$ 为驻点, 类似地有

$$x_1 = (-\lambda_1 C_{11} + C_{21}) / \lambda_1 k C_{21}. \quad (19)$$

而

$$u_{xx} \Big|_{x=x_1} = -\lambda_1^2 k^2 C_{11} e^{-\lambda_1 kx_1} \begin{cases} > 0, & C_{11} < 0 \text{ 时}, \\ < 0, & C_{11} > 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

类似, $C_{11} > 0$, 则在 $x=x_1$ 处, u 达到极大, 即 u 沿 x 方向的变化是由 $x=0$ 时的 $u=0$, 继而因 x 方向的增大而增大, 到 $x=x_1$ 时, 达至极大值, 之后沿 x 的增长而减小. 其变化曲线如图 3 所示.

四、结 论

(1) 由于 z 方向上的补偿作用，非线性的冷迳流问题，可以用相空间的线性方程来讨论，不仅使问题得到处理上的简化，含义也较清晰。

(2) 利用 Hurwitz 方法讨论冷迳流的问题的稳定性，可得出中性层结时，冷迳流是稳定的，即文献 [5] 中冷迳流方程中 s 项对于稳定的冷迳流问题可以舍去，或文献 [4] 的数值计算所引用的冷迳流方程是稳定的冷迳流方程，而 $s \geq 0$ 则均是不稳定的。这对分析、预测冷迳流是有实用意义的。

(3) 稳定性分析中，也发现 $v > 0$ ，即沿山坡下滑的冷迳流是稳定的，而 $v < 0$ ，即沿山坡上行的冷迳就是不稳定的。

(4) 利用相空间转换所求得解析解，经简化分析所得到的结果与文献 [2—3] 的观测事实及文献 [4] 的数值试验类似。

致谢：翁笃鸣先生对冷迳流问题的指教表示衷心地感谢。

参 考 文 献

- [1] 吉野正敏，1984，关于菅平高原冷迳流的特性研究，国外农学——农业气象，总第9期，21—22。
- [2] 吉野正敏，1984，冷湖的形成及其对农业的影响，国外农学——农业气象，总第7期，22—27。
- [3] 大和田道雄，1984，矢作川流域的冷迳流及逆温强度，国外农学——农业气象，总第9期，23—25。
- [4] 王浩、傅抱璞，1988，冷迳流的理论研究，气象学报，46，469—476。
- [5] [苏]古特曼，1976，中尺度气象过程非线性理论引论，科学出版社，271。
- [6] 《数学手册》编写组，1979，数学手册，人民教育出版社，683。
- [7] 吉野正敏，1984，冷迳流的发生机制，国外农学——农业气象，总第10期，14。

Stability of Cold-Air Drainage and Analysis of Analytic Solution

Ouyang Shoucheng Zhu Keyun Xiao Tianguai

(Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu, 610041)

Abstract

The equations of cold-air drainage are studied using a phase angle function in this paper. The terrain is considered as an ideal two dimensional slope extending infinitely in y -direction. Firstly, it is found that nonlinear terms disappear because of some effects in z -direction. Then a linear fourth-order differential equation is obtained and its stability is analysed with Hurwitz. Its solution is obtained. Only neutral atmosphere according with stability condition of cold-air drainage.

Key words: Cold-air drainage; Stability; Phase space.