

采用隐式立方样条计算平流过程的 数值模式及理想实验*

肖 锋

程麟生

(云南大学地球科学系, 昆明, 650091)

(兰州大学大气科学系, 兰州, 730000)

提 要

本文介绍了一种用隐式立方样条求解平流方程的数值方法, 并从理论上对其无条件稳定性进行了证明, 在此基础上建立了一个在地形坐标系下的二维原始方程模式, 模式在行星边界层参数化中引入了湍流动能方程, 在模式顶部引入了吸收层. 数值实验表明: 模式有较好的计算稳定性, 对较高的模式水平分辨率和复杂地形均有较强的适应能力; 对复杂地形和下垫面非均匀热源条件下中尺度系统的模拟能获得合理的结果, 并具有较高的精确度.

关键词: 平流方程; 立方样条; 数值模式.

一、引 言

至今为止, 对有限区域上平流方程的数值求解问题, 已提出过多种计算方案^[1-3, 10]. 人们总是希望获得求解精度高, 计算稳定性好的计算格式. 我们选用了一种较好的平流方程离散方案——隐式立方样条方法. 所进行的一系列数值实验表明该格式具有较高的精确度, 较好的稳定性和较强的适应能力. 应用隐式立方样条方案, 我们建立了一个在地形坐标系下的二维数值模式, 并进行了各类理想实验, 包括与已有类似模式结果^[2]的对比实验、地形动力强迫实验和下垫面非均匀热力强迫实验. 数值实验的结果是合理的.

二、解平流方程的隐式立方样条方法

对形如

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = -u(x, t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

的偏微分方程, 按下列形式进行离散:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n + R_i^n m_i^{n+1}, \quad (2)$$

其中 $R_i^n = -u_i^n \Delta t$, m_i^{n+1} 为立方样条函数的空间一阶导数, $i=1, 2, \dots, N$ 为空间离散格点编号, n 表示时间层次. 若记立方样条的两次导数为 l_i^n , 则对满足格点连接条件的立方样条函数有如下关系式:

1989年11月25日收到, 1991年3月10日收到再改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

$$\frac{h_i}{6} l_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} l_i + \frac{h_{i+1}}{6} l_{i+1} = \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad (3)$$

$$m_i = \frac{h_i}{3} l_i + \frac{h_i}{6} l_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \quad (4)$$

和

$$m_i = -\frac{h_{i-1}}{3} l_i - \frac{h_{i+1}}{6} l_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}, \quad (5)$$

式中 $h_i = x_i - x_{i-1}$ 为空间格距.

由(2)—(5)式容易推得(2)式的求解算式为

$$A_i \varphi_{i-1}^{n+1} + B_i \varphi_i^{n+1} + C_i \varphi_{i+1}^{n+1} = D_i, \quad (6)$$

$i = 2, 3, \dots, N-1$, N 为空间格点总数,

其中

$$A_i = -\frac{2}{3R_{i-1}^n} - \frac{2}{h_i}, \quad (7)$$

$$B_i = -\frac{4}{3} \frac{(h_i + h_{i+1})}{h_{i+1} R_i^n} + 2h_i \left(\frac{1}{h_i^2} - \frac{1}{h_{i+1}^2} \right), \quad (8)$$

$$C_i = -\frac{2}{3} \frac{h_i}{h_{i+1} R_{i+1}^n} + \frac{2h_i}{h_{i+1}^2}, \quad (9)$$

$$D_i = -\frac{2}{3R_{i-1}^n} \varphi_{i-1}^n - \frac{4}{3} \frac{(h_i + h_{i+1})}{h_{i+1} R_i^n} \varphi_i^n - \frac{2h_i}{3R_{i+1}^n h_{i+1}} \varphi_{i+1}^n. \quad (10)$$

方程(6)—(10)和相应的边界条件为:

$\varphi_1^n = \varphi(x_1, t_n)$, $\varphi_N^n = \varphi(x_N, t_n)$ 构成一个三对角矩阵, 可用追赶法求解.

在周期边界条件下, 可以证明格式(6)是无条件稳定的(证明见本文附录).

当 $u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n$ 中的任何一个为零时, 方程(6)即出现奇异. 我们采用如下方法: 在(6)两端同时乘以 $R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n$, 在所得方程的左端加上 $\varepsilon_0 \varphi_i^{n+1}$, 同时在其右端加上 $\varepsilon_0 \varphi_i^n$, ε_0 为一小正数. 这样做相当于将(6)式变成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} R_i^n R_{i+1}^n (\varphi_{i-1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^n) + (R_{i-1}^n R_{i+1}^n + \varepsilon_0) (\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n) + \frac{1}{4} R_{i-1}^n R_i^n (\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i+1}^n) \\ & = \frac{3}{4} R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n (\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^{n+1}) / h. \end{aligned} \quad (6a)$$

在得上式时已假设空间网格距是均匀的, $h_i = h$.

考虑原微分方程(1)的另一个相容差分格式

$$\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n = \frac{R_i^n}{2h} (\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^{n+1}).$$

可将(6a)改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} R_{i-1}^n R_{i+1}^n (\varphi_{i-1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^n) + R_{i-1}^n R_{i+1}^n (\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n) + \frac{1}{4} R_{i-1}^n R_i^n (\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i+1}^n) \\ &= \left(\frac{3}{4h} R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n - \frac{\varepsilon_0 R_i^n}{2h} \right) (\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^{n+1}). \end{aligned} \quad (6b)$$

对比(6)与(6b)可以看出, 加入 $\varepsilon_0(\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n)$ 相当于改变了原差分格式的平流速度, 这种改变是可以通过对参数 ε_0 的调整来进行控制的. 由于(6)相容于原微分方程(1); 所以(6b)与原微分方程的相容性是可以通过对 ε_0 的限制得到满足的.

在实际计算中, 总是尽量减小由于引入 $\varepsilon_0(\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n)$ 而产生的差分方程平流速度改变, 即尽量选取较小的 ε_0 . 对于 $R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n \neq 0$ 的情形, 为保证平流速度的相对误差不超过 α (如取 $\alpha = 0.01$), 一般可选取 $\varepsilon_0 \leq \alpha |R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n|$; 而对 $R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n = 0$ 的情况, 只要使 $\varepsilon_0 > 0$, 即由(6a)可得 $\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n$. 这对于平流过程来讲是合理的. 故通常可取

$$\begin{cases} \varepsilon_0 > 0, & \text{对 } R_{i-1}^n R_{i+1}^n = 0; \\ 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha |R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n|, & \text{对 } R_{i-1}^n R_i^n R_{i+1}^n \neq 0. \end{cases}$$

显然如按这样的取法, 在求解区间内 ε_0 不为常数, 需对每个格点分别算出 $\varepsilon_0(n, i)$, 这无疑将增加计算量, 试验表明这样做也是没有必要的, 在一系列数值试验中, 我们采用逐步减小 ε_0 的办法, 最后确定 $\varepsilon_0 = 10^{-6}$. 实验结果表明这样做对于各种速度场均能使原有的精度得到充分保持.

三、数值模式

(1) 模式方程组

模式采用地形坐标系 (x, y, z^*, t) 中静力不可压缩的二维原始方程组:

$$\frac{du}{dt} = f_v - f_u - \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} + g \frac{z^* - \bar{S}}{\bar{S}} \frac{\partial z_G}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{\text{PBL}} + \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_H, \quad (11)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu + f_v + \frac{\partial v}{\partial t} \bigg|_{\text{PBL}} + \frac{\partial v}{\partial t} \bigg|_H, \quad (12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = R_\theta + \frac{\partial \theta}{\partial t} \bigg|_{\text{PBL}} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \bigg|_H, \quad (13)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} \bigg|_{\text{PBL}} + \frac{\partial q}{\partial t} \bigg|_H + Q, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{u}{\bar{S} - z_G} \frac{\partial z_G}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z^*} = - \frac{\bar{S} - z_G}{\bar{S}} \frac{g}{\theta}, \quad (16)$$

其中 R_0 为下垫面热源, $\pi = c_p \left(\frac{P}{P_0} \right)^{R/c_p}$, P_0 为参考气压, $P_0 = 1000 \text{ hPa}$, Q 为水汽源.

$$w^* = \frac{\bar{S}}{\bar{S} - z_G} w + \frac{z^* - \bar{S}}{\bar{S} - z_G} u \frac{\partial z_G}{\partial x^*},$$

$$w^* = \frac{dz^*}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt};$$

坐标变换为 $z^* = \bar{S} \frac{z - z_G}{\bar{S} - z_G}$, z_G 是地形海拔高度, $\bar{S}$ 为模式顶高, 取为常数 $\bar{S} = 18000 \text{ m}$.

$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\text{PBL}}$ 表示垂直方向次网格湍流混合引起的局地变化, 用如下公式计算:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\text{PBL}} = \left(\frac{\bar{S}}{\bar{S} - z_G} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k_z \frac{\partial F}{\partial z^*} \right),$$

F 代表各气象变数, $\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\text{H}}$ 代表水平扩散过程引起的局地变化, 在模式中对此项不进行显式计算, 而在计算过程中采用了水平平滑算子.

个别变化算子为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w^* \frac{\partial}{\partial z^*},$$

u_g, v_g 为满足地转风关系的大尺度风场, 而方程(11)中的 $-\theta \frac{\partial \pi}{\partial x} + g \frac{z^* - \bar{S}}{\bar{S}} \frac{\partial z_G}{\partial x}$ 为中尺度水平气压梯度力.

2. 边界层湍流参数化

本模式采用湍流能量预报方程来进行边界层湍流参数化, 湍能方程源引文献[4]中给出的形式, 在两维地形坐标下容易推得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & -u \frac{\partial E}{\partial x} - w^* \frac{\partial E}{\partial z^*} + k_z \left[\left(\frac{\bar{S}}{\bar{S} - z_G} \right)^2 S^2 - \alpha_1 \frac{\bar{S}}{\bar{S} - z_G} \frac{g}{\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z^*} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{L_e}{c_p} \frac{\partial q}{\partial z^*} \right) \right] + \alpha_2 \left(\frac{\bar{S}}{\bar{S} - z_G} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k_z \frac{\partial E}{\partial z^*} \right) - \alpha_3 \frac{E^{3/2}}{l}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$S^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z^*} \right)^2,$$

l 为混合长, 采用Miao^[9]给出的形式:

$$l = \bar{k}(z^* + z_0) \left[1 + 1.7 \left(\frac{z^* + z_0}{z_m} \right)^{7/4} \right]^{-1}, \quad (18)$$

$\bar{k}$ 为 Karman 常数, z_0 为粗糙度参数,

$$k_z = \alpha_4 l E^{1/2}. \quad (19)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为待定常数, 本模式按文献 [4] 取 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.2, \alpha_3 = 0.2^{3/2}, \alpha_4 = 0.2^{1/2}$.

由此, (11) — (19) 就构成了一个包含湍流垂直交换过程的闭合方程组.

3. 边界条件及处理

(1) 上边界条件 ($z^* = \bar{S}$), 本模式采用类似 Klemp 和 Lilly^[6] 的吸收层方法处理上边界, 在模式上部吸收层中, 用 Dufort-Frankel 差分公式^[7] 对纬向风场进行空间水平扩散; 对位温 θ 用时间过滤算子进行平滑, 空间扩散和时间过滤强度随高度增加. 引进吸收层后, 对向上传播的能量有很强的耗散作用, 因此, 上边界条件的给法对吸收层以下区域的数值结果没有明显的影响^[8], 在本模式中, 规定 u, v, θ, q, π 在上边界不随时间变化, 取

$$\left. \frac{\partial E}{\partial z^*} \right|_{z^* = \bar{S}} = 0, \text{ 而对 } w^* \text{ 不规定上边界条件.}$$

$$(2) \text{ 在下边界取 } U \Big|_{z^* = 0} = V \Big|_{z^* = 0} = W^* \Big|_{z^* = 0} = 0, \quad \theta \Big|_{z^* = 0} = \theta(x, t), \quad q \Big|_{z^* = 0} = q(x, t)$$

$$\text{及 } \left. \frac{\partial E}{\partial z^*} \right|_{z^* = 0} = 0.$$

(3) 在侧边界 Γ 上取

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\Gamma} = W^* \Big|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{\Gamma} = 0.$$

4. 模式区域及网格

取东西向垂直剖面内一矩形区域作为模式的网格区域. 垂直方向 ($0 \leq z^* \leq \bar{S}$) 共取 27 层 (第 17 层以上为吸收层): $z^* = 0, 15, 50, 120, 250, 400, 650, 800, 1600, 2400, 3200, 4000, 4800, 5600, 6400, 7200, 8000, 9000, 10000, 11000, 12000, 13000, 14000, 15000, 16000, 17000, 18000\text{m}$. 水平方向取 45 个等距格点, 在水平方向采用交错网格: 将变量 u, v, θ, π, q, E 定义在整数格点上, 将 w^* 定义在半整数格点 (即两相邻整数格点的中点) 上.

5. 数值计算过程

模式对预报方程采用分解算法进行计算. 水平平流项采用隐式立方样条方法计算, 垂直湍流扩散项用全隐式中央差分格式计算, 其它项的空间导数均用中央差离散.

四、理想实验及简单讨论

实验 1. 检验模式对流场

预报的合理性, 我们重复了 Marher 等人的实验^[2], 时间积分 12 小时后的东西风场由图 1 给出, 与文献 [2] 中的有关图例对比可以看出其结果是较一致的, 这在一定程度上证实了模式对这类系统的模拟能力和合理性。

实验 2. 地形与下垫面热源变化强迫实验

本实验选用钟形山地形, 在山体部分(相当于陆面)规定地面位温呈 24 小时日周期变化, 即取 $\theta(z=0, t) = 280(1 + 0.05 \sin \frac{\pi t}{24})$ (K); 其它区域(相当于水面)表面位温不随时间变化。水平格距取为 7.5km, 时间积分步长为 20s; 大尺度风场为 $u_g = 5\text{m/s}$, $v_g = 0\text{m/s}$ 。

先将位温分布取为 $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.006^\circ\text{C}/\text{m}$, $\theta(z=0, t=-3h) = 280\text{K}$, 用实验 1 的步骤对模式时间积分 3 小时, 所得结果作为本实验的初始场。

图 2 为山体表面温度降到最低时(相当于夜间情形)的水平流场和垂直流场分布, 此时水平气流在迎风面近地层出现了阻塞, 背风坡水平风速大值区增加到最强; 山体区域近地层几乎全为下沉气流控制, 在迎风面上由于地形的抬升作用与地表降温的热力效应作用相反, 下沉气流较弱, 而在背风面两者的作用一致, 则出现较强的下沉气流。

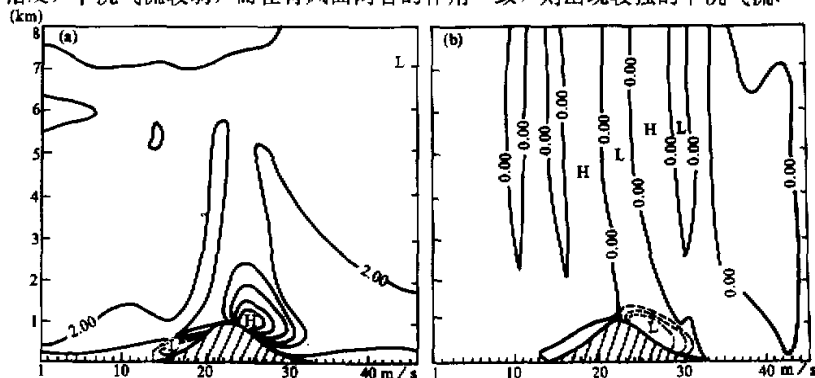


图 2 实验 2 地表温度最低时的流场
(a) 水平流场, 单位(m/s); 等风速线间隔 0.5m/s; (b) 垂直流场, 单位(m/s); 等风速线间隔 0.05m/s。

图 3 为山体表面温度升到最高时的情形, 此时, 在山体区域的近地面层, 层结出现不稳定, 产生热力对流, 其在迎风面与地形抬升作用一致, 产生较强的上升气流; 在背风面抵消地形强迫作用, 为较弱的上升气流; 和垂直流场相对应, 以山顶为中心出现了水平气流辐合区, 原在迎风面的阻塞区消失, 代之为水平风速的较大值区, 而在背风面则出现了水平气流的反转阻塞。原在背风面的急流区减弱, 且急流中心位置明显升高。

在本实验过程中, 地形强迫条件始终没有发生任何变化, 变化的只是下垫面热强迫; 对比图 2, 图 3 容易看出, 随着地表热强迫的变化, 大气低层流场变化非常明显, 上

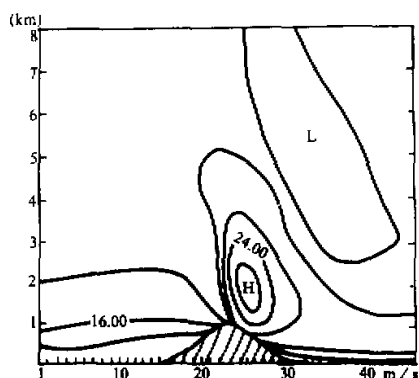


图 1 u 风速等值线
单位 (m/s), 等值线间隔 2m/s

部则变化甚小,即中尺度热强迫的影响高度是相对较低的.

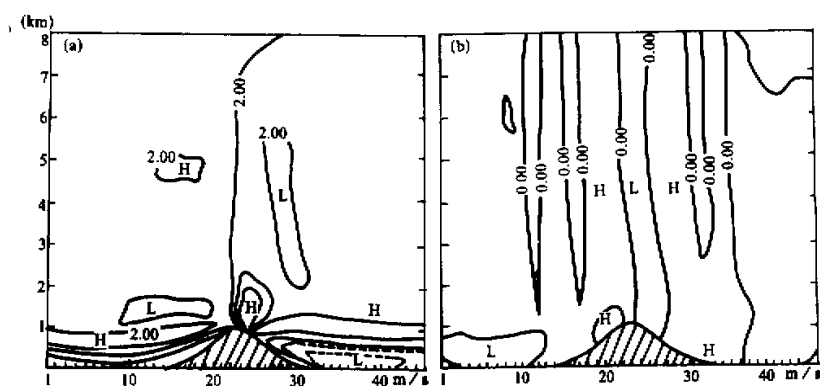


图3 实验2地面温度最高时的流场.

其它说明同图2

五、小 结

隐式立方样条函数方法不是为一种好的求解平流方程的数值离散方案. 一系列数值实验表明在模式中引用该方案是可行和有益的. 此外, 本文数值实验的结果还给出了下列初步结论:

(1) 中尺度地形产生的水平气流阻塞不仅与气流的层结稳定性和地形特征有关^[9] 而且与地形下垫面热力特征有关.

(2) 中尺度山地对气流影响的垂直范围在很大程度上取决于环境风场. 一般情况下, 由此产生的中尺度系统可伸展到较高的高度, 而地表热力效应的影响仅在大气低层较明显. 因此, 若考虑上边界的反射作用, 在处理无地形的模拟问题时, 上边界条件的处理可比有地形时相对简化一些.

参 考 文 献

- [1] Mahrer, Y. & Pielke, R. A., 1975, A numerical study of the air flow over mountains using the Two-Dimensional version of the University of Virginia Mesoscale Model, *J. Atmos. Sci.*, 32, 2144—2155.
- [2] Mahrer, Y. & Pielke, R. A., 1978, A test of an upstream spline interpolation technique for the advective terms in a numerical mesoscale model, *Mon. Wea. Rev.*, 106, 818—830.
- [3] 桑建国等, 1985, 背风坡流场和浓度场的数值模拟, *大气科学*, 9, 226—233.
- [4] Longhetto, A. (ed.), 1980, Atmospheric planetary boundary layer physics, Proceedings of the 4th course of the international school of Atmospheric physics, Erice (Italy), Elsevier Scientific Publishing Company, 10—11.
- [5] Miao, M. Q., 1987, Numerical modeling of the nocturnal PBL over the urban heat island in Changzhou City, *Bound. Layer Meteor.*, 41, 41—56.
- [6] Klemp, J. B. & Lilly, D. K., 1978, Numerical simulation of hydrostatic mountain waves, *J. Atmos. Sci.*,

35, 78—107.

- [7] Richtmyer, R. D., 1957, *Difference methods for initial value problems*, Interscience, 238.
- [8] Chang, L. P. & Takle, E. S., 1982, Development of a two-dimensional finite element PBL model and two preliminary model applications, *Mon. Wea. Rev.*, **112**, 2025—2037.
- [9] 桑建国等, 1988, 小尺度地形阻塞作用的数值试验, *大气科学*, **12**, 131—139.
- [10] Pepper, D. W., Kern, C. D. & Long, P. E., 1979, Modeling the dispersion of atmospheric pollution using cubic splines and chapeau functions, *Atmospheric Environment*, **13**, 223—237.
- [11] 朱幼兰等, 1980, 初边值问题差分方法及绕流, 科学出版社, 123—138.
- [12] 季仲贞等, 1982, 发展方程差分格式的构造和应用, *大气科学*, **6**, 88—94.

附录 隐式立方样条方法的稳定性证明

取均匀的离散网格 $h_i = h$, 容易将(6)式化为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma}{4u_{i-1}^n} - \frac{3}{4} \right) \varphi_{i-1}^{n+1} + \frac{\sigma}{u_i^n} \varphi_i^{n+1} + \left(\frac{\sigma}{4u_{i+1}^n} + \frac{3}{4} \right) \varphi_{i+1}^{n+1} \\ &= \frac{\sigma}{4u_{i-1}^n} \varphi_{i-1}^n + \frac{\sigma}{u_i^n} \varphi_i^n + \frac{\sigma}{4u_{i+1}^n} \varphi_{i+1}^n, \quad i=2, 3, \dots, N-1. \end{aligned}$$

式中 $\sigma = \frac{h}{\Delta t}$ 为有界正数.

现研究如下—类格式的计算稳定性问题:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma}{4u_{i-1}^n} - \frac{3}{4} \right) \varphi_{i-1}^{n+1} + \frac{\sigma}{u_i^n} \varphi_i^{n+1} + \left(\frac{\sigma}{4u_{i+1}^n} + \frac{3}{4} \right) \varphi_{i+1}^{n+1} \\ &= \left[\frac{\sigma}{4u_{i-1}^n} + \frac{3}{4} (1-\theta) \right] \varphi_{i-1}^n + \frac{\sigma}{u_i^n} \varphi_i^n + \left[\frac{\sigma}{4u_{i+1}^n} - \frac{3}{4} (1-\theta) \right] \varphi_{i+1}^n, \end{aligned} \quad (A1)$$

其中 θ 为显—隐格式的调节参数, $0 \leq \theta \leq 1$. 将(A1)写成下列形式:

$$H_n \Phi^{n+1} = G_n \Phi^n, \quad (A2)$$

H_n 和 G_n 分别为相应的系数矩阵, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N)^T$ 为网格函数, 矩阵 H_n 为非奇异的.

定义网格函数 F_1, F_2 的内积为 $(F_1, F_2) = \sum_{i=1}^N F_{1i} F_{2i} h$. 对网格函数 Φ 定义范数 $\|\Phi\| = (\Phi, \Phi)^{1/2}$. 矩阵 H_n 的范数定义为

$$\|H_n\| = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|H_n v\|}{\|v\|}, \quad \text{其中 } v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T.$$

关于格式的稳定性有如下定义: [11]

定义 对于纯初值问题, 称格式(A2)是 L_2 空间稳定的, 如果存在有界正数 C 使

$$\|\Phi^n\|^2 \leq C \|\Phi^0\|^2, \quad (A3)$$

这里, $0 \leq n = \frac{t_n}{\Delta t} \leq \frac{T_0}{\Delta t}$, T_0 为某有界正数.

对此, 有下列定理:

定理 1 如果下列条件成立

- (i) $u(x, t)$ 充分光滑, 且所有 u_i^n 是非零有界的; (ii) 一切 u_i^n 满足 Lipschitz 条件, 即存在有界正数, L_1, L_2 , 使 $|u_i^{n+1} - u_i^n| \leq L_1 \Delta t$, $|u_{i+1}^n - u_i^n| \leq L_2 h$, L_1, L_2 为 Lipschitz 常数;

- (iii) $\theta \geq \frac{1}{2}$, 格式为“强隐式”的 [12];

则存在非负常数 C_1 和 C_2 使得对于(A2)有

$$\|H_n \Phi^{n+1}\|^2 - \|H_n \Phi^n\|^2 \leq C_1 \Delta t \|\varphi^n\|^2 - C_2 \|\Delta_0 \Phi^n\|^2, \quad (\text{A4})$$

上式中, $\Delta_0 \Phi^n = (\varphi_1^n - \varphi_2^n, \varphi_2^n - \varphi_3^n, \dots, \varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n, \dots, \varphi_N^n - \varphi_{N-2}^n)^T$.

证明:

由(A2)可知: $H_n = R + S_1, G_n = R + S_2$,

此处

$$R = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & \frac{\sigma}{4u_{i-1}^n} & \frac{\sigma}{u_i^n} & \frac{\sigma}{4u_{i+1}^n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & -\frac{3}{4}\theta & 0 & \frac{3}{4}\theta \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & \frac{3}{4}(1-\theta) & 0 & -\frac{3}{4}(1-\theta) \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

于是有

$$\|H_n \varphi^n\|^2 = (H_n \varphi^n, H_n \varphi^n) = (R\Phi^n, R\Phi^n) + 2(S_1 \Phi^n, R\Phi^n) + (S_1 \Phi^n, S_1 \Phi^n).$$

由(A2)得

$$\|H_n \varphi^{n+1}\|^2 = (G_n \varphi^n, G_n \varphi^n) = (R\Phi^n, R\Phi^n) + 2(S_2 \Phi^n, R\Phi^n) + (S_2 \Phi^n, S_2 \Phi^n).$$

从而

$$\begin{aligned} \|H_n \Phi^{n+1}\|^2 - \|H_n \Phi^n\|^2 &= 2((S_2 - S_1)\Phi^n, R\Phi^n) - (2\theta - 1) \frac{9}{16} \|\Delta_0 \Phi^n\|^2 \\ &= \frac{3}{2} (-\Delta_0 \Phi^n, R\Phi^n) - \frac{9}{16} (2\theta - 1) \|\Delta_0 \Phi^n\|^2. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

上式中

$$(-\Delta_0 \Phi^n, R\Phi^n) = \sum_{i=2}^{N-1} \left[\frac{2\sigma h}{u_i^n} (\varphi_i^n \varphi_{i-1}^n - \varphi_i^n \varphi_{i+1}^n) + \frac{\sigma h}{2} \varphi_{i+1}^n \varphi_{i-1}^n \left(\frac{1}{u_{i+1}^n} - \frac{1}{u_{i-1}^n} \right) \right].$$

对所有网格函数取周期边界条件, 由 Abel 部分求和公式可得

$$(-\Delta_0 \varphi^n, R\Phi^n) = 2\sigma h \sum_{i=2}^N \varphi_i^n \varphi_{i-1}^n \left(\frac{1}{u_i^n} - \frac{1}{u_{i-1}^n} \right) + \frac{\sigma h}{2} \sum_{i=2}^{N-1} \varphi_{i+1}^n \varphi_{i-1}^n \left(\frac{1}{u_{i+1}^n} - \frac{1}{u_{i-1}^n} \right).$$

用条件(i)和(ii)可得下列不等式:

$$(-\Delta_0 \Phi^n, R\Phi^n) \leq \frac{\sigma L_2 h}{m_u^2} \left(2 \sum_{i=2}^N \varphi_i^n \varphi_{i-1}^n h + \sum_{i=2}^{N-1} \varphi_{i+1}^n \varphi_{i-1}^n h \right).$$

由实数关系 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 易知

$$(-\Delta_0 \Phi^n, R\Phi^n) \leq \frac{3\sigma^2 L_2}{m_u^2} \|\Phi^n\|^2 \Delta t,$$

其中 $m_u = \min\{|u_i^n| \} > 0$.

取 $C_1 = \frac{9}{2} \frac{\sigma^2 L_2}{m_u^2}$, 且由条件(iii)知 $\frac{9}{16} (2\theta - 1) \geq 0$, 若取 $C_2 = \frac{9}{16} (2\theta - 1)$, 即由(A5)可知定理1获证.

定理 2 若定理 1 的条件满足, 同时 H_n 和 H_n^{-1} 均有非零有界范数;

则格式(A2)在 L_2 空间稳定.

证: 事实上, 若 $\|H_n\|^2 \geq \alpha > 0$, 则由(A4)及 Schwarz 不等式得 $\|H_n \Phi^{n+1}\|^2 \leq (1 + C_3 \Delta t) \|H_n\|^2 \cdot \|\Phi^n\|^2$, 这里

$C_3 = \frac{C_1}{\alpha}$. 由 Lipschitz 条件(ii)可知, 存在与 Lipschitz 常数 L_1 有关的数 C_4 , 使 $\|H_n\|^2 \cdot \|\Phi^n\|^2 \leq (1 + C_4 \Delta t) \|H_{n-1}\|^2 \cdot \|\Phi^n\|^2$, 从而有 $\|H_n \Phi^{n+1}\|^2 \leq (1 + C_5 \Delta t)^2 \|H_{n-1}\|^2 \cdot \|\Phi^n\|^2$, 其中 $C_5 = \max \{C_3, C_4\}$.

由此可推得

$$\|H_n \Phi^{n+1}\|^2 \leq (1 + C_5 \Delta t)^{2(n-1)} \|H_0\|^2 \cdot \|\Phi^1\|^2 \leq (1 + C_5 \Delta t)^{2n-1} \|H_0\|^4 \cdot \|H_0^{-1}\|^2 \cdot \|\Phi^0\|^2.$$

若 H_n^{-1} 的范数非零有界, 在上式两端同乘 $\|H_n^{-1}\|^2$, 并考虑 Schwarz 不等式可得

$\|\Phi^{n+1}\|^2 \leq \|H_n^{-1}\|^2 \cdot \|H_n \Phi^{n+1}\|^2 \leq (1 + C_5 \Delta t)^{2n-1} \|H_n^{-1}\|^2 \cdot \|H_0\|^4 \cdot \|H_0^{-1}\|^2 \cdot \|\Phi^0\|^2$, 即 $\|\Phi^{n+1}\|^2 \leq C_6 e^{C_5(2T_0 - \Delta t)}$

$\|\Phi^0\|^2$, $C_6 = \|H_n^{-1}\|^2 \cdot \|H_0\|^4 \cdot \|H_0^{-1}\|^2$. 取 $C = C_6 e^{C_5(2T_0 - \Delta t)}$, 由定理条件可知 C 有界, 于是(A3)成立, 即格式(A2)在 L_2 空间稳定.

证毕.

说明: 本文中所取的格式为(A2)取 $\theta=1$ 时的特例, 故由上述定理 1 及定理 2 可知是无条件稳定的.

A Numerical Model of Solving Advection Equation by the Implicit Cubic Spline Method and the Numerical Experiments

Xiao Feng

Cheng Linsheng

(Yunnan University, Kunming, 650091)

(Lanzhou University, Lanzhou, 730000)

Abstract

In this paper, an implicit cubic spline scheme is adopted to solve the advection equation. Its non-conditionally linear stability is proved. Based on this scheme, a two dimensional numerical model with an upper absorbing layer and a turbulent energy equation based on the turbulent closure have been developed in a terrain following coordinate.

Several numerical experiments are carried out. The reasonable results show that the model is suitable for modeling and studying topographical forcing and induced mesoscale systems with satisfactory, accuracy, computational stability and flexibility for model's horizontal resolution and complex topography.

Key words: Advection equation; Cubic splines; Numerical model.