

β -GMA与边界层动力学特征*

谈哲敏 伍荣生

(南京大学大气科学系, 南京, 210008)

提 要

本文研究了 β 平面中的地转动量近似(β -GMA)及其成立条件. 利用 β -GMA得到了一个描述 Ekman 动力学特征的动力学方程组. 研究了 β 项和地转动量(GM)对 Ekman 层动力学的共同作用. 结果表明, β -GMA 下的解由两部分组成, 一部分即为 f-GMA 下的解, 另一部分为 β 项与 GM 的相互作用解. 这样, 一方面, β -GMA 解由于 β 项存在, 对一个定常纬向对称的高度场具有纬向非对称结构, 而 f-GMA 解是纬向对称的. 利用一个定常、轴对称的圆形涡旋例子计算了 Ekman 层的水平风速和边界层顶部的垂直速度, 并与经典解、f-GMA 解作了详细的分析比较.

关键词: 地转动量; β 作用; Ekman 层动力学.

一、引 言

近年来, 地转动量近似或半地转理论(简称 GMA)^[1] 被大量运用于自由大气中斜压波动的稳定性、锋生及地形上空气流等问题的研究^[2-3]. 但所有的分析仅限于 f 平面中, 简称 f-GMA. 有必要向 β 平面作一推广. McWilliams 和 Gent^[4] 曾提出过 β 平面中的 GMA, 简称 β -GMA, 但他们只是为了保持能量守恒而将 GMA 由 f 平面直接推广到 β 平面, 而在数学上缺乏严密的推导和一般性, 也没给出 β -GMA 成立的条件.

伍荣生和 Blumen^[5-6] 将 GMA 应用于边界层动力学的研究, 讨论了地转动量近似所表示的非线性项对 Ekman 抽吸及所引起的斜压波动稳定性的影响. 结果表明, 这种影响作用在一定条件下是不可略的, 这是对经典 Ekman 流的修正. 但同样也仅限于 f 平面中, 而在实际中, 一些行星边界层例如季风边界层、海洋边界层都必须考虑地转参数的纬向变化, 即 β 项的作用, 即必须考虑 β 平面中的边界层动力学. 所以利用 β -GMA 既可考虑边界层的非线性项又可考虑 β 项的作用. 本文就此作一研究.

首先在数学上严格导出 β -GMA 及其成立条件. 第三节讨论了在 β -GMA 下正压边界层的风场结构, 第四节给出边界层顶部垂直运动的特征, 第五节, 利用一个例子数值计算了风场结构及垂直运动, 第六节为结束语.

二、 β 平面中的地转动量近似

自由大气运动的控制方程为

1990年5月3日收到, 12月24日收到再改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} - fv &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + fu &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y},\end{aligned}\quad (1)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

β 平面近似

$$f = f_0 + \beta y, \quad (3)$$

其中 $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$, $\beta = \partial f / \partial y$ 均为常数, φ_0 为 β 平面中线的纬度. 取

$$u_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (4)$$

将 (3) 式代入 (1) 式, 并利用下式无因次化 (1):

$$\begin{aligned}(u, v) &\sim V(u', v'), \quad (u_g, v_g) \sim V(u'_g, v'_g), \\ (x, y) &\sim L(x', y'), \quad t \sim \frac{L}{V} t', \\ f_0 &\sim F, \quad \beta = F/a,\end{aligned}\quad (5)$$

其中大写符号为特征量, 带撇号者代表无量纲量, 为方便起见, 下文略去撇号, 则 (1) 式可写成

$$\begin{aligned}Ro \frac{du}{dt} - (1 + Ro\tilde{\beta}y)v &= -v_g, \\ Ro \frac{dv}{dt} + (1 + Ro\tilde{\beta}y)u &= u_g,\end{aligned}\quad (6)$$

其中 $Ro = V/FL$, $\tilde{\beta} = S/Ro$, Ro 为 Rossby 数, $S = L/a$ 为几何参数, 两者为小参数.

显然, 方程 (6) 仅适用于中纬度运动. 取

$$S \sim Ro < 1, \quad (7)$$

由 (6) 式可得

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{1 + Ro\tilde{\beta}y} u_g - \frac{Ro}{1 + Ro\tilde{\beta}y} \frac{dv}{dt}, \\ v &= \frac{1}{1 + Ro\tilde{\beta}y} v_g + \frac{Ro}{1 + Ro\tilde{\beta}y} \frac{du}{dt}.\end{aligned}\quad (8)$$

将上式中的第一式代入第二式, 第二式代入第一式相互迭代一次.

对 (8) 式进行多次迭代可得

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{1 + Ro\tilde{\beta}y} u_g - \frac{Ro}{(1 + Ro\tilde{\beta}y)^2} \frac{dv_g}{dt} \\ &\quad - \frac{Ro^2}{(1 + Ro\tilde{\beta}y)^3} \frac{d^2 u_g}{dt^2} + \frac{Ro^2 \tilde{\beta}}{(1 + Ro\tilde{\beta}y)^3} v_g + \dots,\end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{1 + Ro\tilde{\beta}y} v_g + \frac{Ro}{(1 + Ro\tilde{\beta}y)^2} \frac{du_g}{dt} - \frac{Ro^2}{(1 + Ro\tilde{\beta}y)^3} \frac{d^2 v_g}{dt^2} - \frac{Ro^2 \tilde{\beta}}{(1 + Ro\tilde{\beta}y)^3} u_g + \dots, \quad (9)$$

取一阶近似精度已足够, 有

$$\begin{aligned} u &\approx u_g (1 - Ro\tilde{\beta}y) - Ro \frac{dv_g}{dt}, \\ v &\approx v_g (1 - Ro\tilde{\beta}y) + Ro \frac{du_g}{dt}. \end{aligned} \quad (10)$$

整理上式, 可以写成

$$\begin{aligned} Ro \frac{du_g}{dt} - v - Ro\tilde{\beta}y v_g &= -v_g, \\ Ro \frac{dv_g}{dt} + u + Ro\tilde{\beta}y u_g &= u_g, \end{aligned} \quad (11)$$

这即为 β 平面中的地转动量近似.

显然, (11) 式只有满足条件 (7) 时才能成立, 相应此时的运动尺度 L 要至少满足 $L < a$, 即相应于 Burges^[1] 分析的一类中纬度运动. 这在文献 [4] 中没有作过分析.

β -GMA 在处理平流项时和 f -GMA 一样, 即被平流量用地转风代替, 而平流量仍为实际值. 而 β 项中风速用地转风速代替, 这与一般 β 平面中运动方程的 β 项作用有差别.

三、 β -GMA 与边界层风场

为了准确地预报地面风场, 必须考虑边界层的风场结构, 为此可利用上节导得的 β -GMA 讨论在非线性平流项和 β 项共同作用下的边界层风场特征, 至于边界层中利用地转动量近似的局限性, 最近作者^[8]作了分析, 这里不作详述.

β -GMA 下的边界层无因次化动力学方程组为

$$\begin{aligned} Ro \frac{du_g}{dt} - v - Ro\tilde{\beta}y v_g &= -v_g + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ Ro \frac{dv_g}{dt} + u + Ro\tilde{\beta}y u_g &= u_g + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad (13)$$

$$\eta = \delta_e^{-1} z, \quad \delta_e = (2K/f)^{1/2}, \quad (14)$$

η 为边界层的扩张变量, δ_e 为边界层的厚度, K 为湍流交换系数, 取为常数. (13) 式中垂直观流项作用较小被略去.

整理 (12) 式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{a}_1 u + \tilde{b}_1 v &= \tilde{c}_1, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \tilde{a}_2 u + \tilde{b}_2 v &= \tilde{c}_2, \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= -Ro \frac{\partial u_g}{\partial x}, \quad \tilde{b}_1 = 1 - Ro \frac{\partial u_g}{\partial y}, \quad \tilde{c}_1 = (1 - Ro \tilde{\beta} y) v_g + Ro \frac{\partial u_g}{\partial t}, \\ \tilde{a}_2 &= -\left(1 + Ro \frac{\partial v_g}{\partial x}\right), \quad \tilde{b}_2 = -Ro \frac{\partial v_g}{\partial y}, \quad \tilde{c}_2 = -\left((1 - Ro \tilde{\beta} y) u_g - Ro \frac{\partial v_g}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

对于正压边界层, (15) 式为一个关于 η 的二阶常系数微分方程组, 它与 f-GMA 得到的方程组形式上完全类似.

(15) 式相应的边界条件为

$$\eta = 0, \quad u = v = 0, \quad (17)$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad u = \tilde{u}_T, \quad v = \tilde{v}_T, \quad (18)$$

其中 $\tilde{u}_T, \tilde{v}_T$ 为边界层顶部风速, 即

$$\tilde{u}_T = \frac{\tilde{c}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{c}_2 \tilde{b}_1}{D^4}, \quad \tilde{v}_T = \frac{\tilde{a}_1 \tilde{c}_2 - \tilde{a}_2 \tilde{c}_1}{D^4}, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} D^4 &= \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 \tilde{b}_1 \\ &= 1 + Ro \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + Ro^2 \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial v_g}{\partial y} - \frac{\partial v_g}{\partial x} \frac{\partial u_g}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

这样方程 (15) 的解为

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}_T (1 - e^{-r} \cos r) - \tilde{c}_1 D^{-2} e^{-r} \sin r, \\ v &= \tilde{v}_T (1 - e^{-r} \cos r) - \tilde{c}_2 D^{-2} e^{-r} \sin r, \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $r = D\eta$.

上式即为 β -GMA 下边界层的水平风速表达式, 它与 f-GMA 下的解相类似, 但此处 $\tilde{u}_T, \tilde{v}_T, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ 都包含了 β 项的作用.

整理 (21) 式, 可进一步写成

$$\begin{aligned} u &= u_f + u_\beta, \\ v &= v_f + v_\beta, \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} u_k &= \tilde{u}_{Tk} (1 - e^{-r} \cos r) - \tilde{c}_{1k} D^{-2} e^{-r} \sin r, \\ v_k &= \tilde{v}_{Tk} (1 - e^{-r} \cos r) - \tilde{c}_{2k} D^{-2} e^{-r} \sin r, \end{aligned} \quad (k=f, \beta) \quad (23)$$

且

$$\tilde{u}_{Tk} = \frac{\tilde{c}_{1k} \tilde{b}_2 - \tilde{c}_{2k} \tilde{b}_1}{D^4}, \quad \tilde{v}_{Tk} = \frac{\tilde{c}_{2k} \tilde{a}_1 - \tilde{c}_{1k} \tilde{a}_2}{D^4}, \quad (k=f, \beta) \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{1f} &= v_g + Ro \frac{\partial u_g}{\partial t}, & \tilde{c}_{2f} &= - \left(u_g - Ro \frac{\partial v_g}{\partial t} \right), \\ \tilde{c}_{1\beta} &= -Ro\tilde{\beta} y v_g, & \tilde{c}_{2\beta} &= Ro\tilde{\beta} y u_g.\end{aligned}\quad (25)$$

由(22)式可知, β -GMA 下的边界层水平风速由两部分组成, 一部分为 f-GMA 下的解 u_f, v_f . 另一部分为 β 项与地转动量的相互作用项 u_β, v_β , 它是一个对 f-GMA 解的修正量. 这两部分解形式上相类似. 另外, 由于 β -GMA 中的 β 项作用是通过它与 GM 相互作用而被反映出来的, 故它与无 GMA 下的 β 项作用有明显的差异. β -GMA 除了能反映 f-GMA 的动力学性质之外, 还能反映出 β 项与地转动量的相互作用对边界层流的影响, 而这种相互作用与系统的非线性有关. 显然, 对于某一类边界层系统, β -GMA 要较 f-GMA 能更正确地描述边界层的特性.

对于定常情形, 令 $\partial/\partial t = 0$, (22)式又可写成

$$\begin{aligned}u &= (1 - Ro\tilde{\beta} y) u_f, \\ v &= (1 - Ro\tilde{\beta} y) v_f.\end{aligned}\quad (26)$$

显然, $y > 0$ (纬度 $\varphi > \varphi_0$), 有 $|u| > |u_f|$, $|v| > |v_f|$, 即表明 β -GMA 的解较 f-GMA 的大, 而 $y < 0$ (纬度 $\varphi < \varphi_0$), 结果相反. 对于一个对称的地转风场作用下的 Ekman 层, f-GMA 的解呈对称分布, 而 β -GMA 的风速由于存在 β 项与地转动量相互作用而呈纬向非对称分布.

如令 $\tilde{\beta} = 0$, (26)式即简为 f-GMA 的解^[5]

$$u = u_f, \quad v = v_f. \quad (27)$$

当 $Ro = \tilde{\beta} = 0$ 时, (21)式即变为

$$\begin{aligned}u &= u_g (1 - \cos \eta e^{-\eta}) - v_g \sin \eta e^{-\eta}, \\ v &= v_g (1 - \cos \eta e^{-\eta}) + u_g \sin \eta e^{-\eta},\end{aligned}\quad (28)$$

这即为经典 Ekman 流.

四、 β -GMA 与 Ekman 抽吸

边界层顶部的垂直运动即所谓的 Ekman 抽吸是考虑大气与边界层相互作用的重要参数之一, 是边界层动力学特征的重要方面.

我们将连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

无因次化, 且引入

$$\tilde{w} = E^{-1/2} w, \quad (30)$$

其中 $E = 2K/f_0 H^2$ 为 Ekman 数, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} = 0. \quad (31)$$

将上式对 η 由 0 到 ∞ 积分, 并假定下垫面的垂直速度为零, 则边界层顶部的垂直速度为

$$\begin{aligned}\tilde{w}_z &= - \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\eta \\ &= - \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial y} \right) \left(\eta_e - \frac{1}{2D} \right) + \frac{1}{2} \left[D^{-3} \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{u}_r \frac{\partial}{\partial x} D^{-1} + \tilde{v}_r \frac{\partial}{\partial y} D^{-1} \right) + \left(\tilde{c}_1 \frac{\partial}{\partial x} D^{-3} + \tilde{c}_2 \frac{\partial}{\partial y} D^{-3} \right) \right], \quad (32)\end{aligned}$$

其中 η_e 为边界层的厚度.

上式中第一项本质上为边界层顶部的辐合辐散对 $\tilde{w}_\infty$ 的贡献, 而这种辐合辐散在边界层中与深度无关^[5], 其余几项为边界层的摩擦对 $\tilde{w}_\infty$ 的贡献量.

将 (19), (20) 式代入上式, 作渐近展开, 得

$$\tilde{w}_z = \tilde{w}_f + \tilde{w}_\beta, \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{w}_f &= \frac{1}{2} \zeta_s + Ro \left[\left(\eta_e - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} + \left(\eta_e - \frac{4}{5} \right) \vec{V}_s \cdot \nabla \zeta_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \vec{k} \cdot \nabla \wedge \zeta_s \vec{V}_s \right] + \dots, \quad (34)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_\beta &= Ro \tilde{\beta} \left[\frac{1}{2} u_s - \frac{1}{2} y \zeta_s + \left(\eta_e - \frac{1}{2} \right) v_s \right] \\ &\quad + Ro^2 \tilde{\beta} \left[- \frac{3}{8} u_s \zeta_s - (\eta_e - 1) v_s \zeta_s + \left(\eta_e - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial K_s}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \left(\eta_e - \frac{5}{8} \right) (\vec{V}_s \cdot \nabla \zeta_s) y + \frac{3}{8} \vec{k} \cdot \nabla \wedge \zeta_s \vec{V}_s \right] + \dots. \quad (35)\end{aligned}$$

上式说明, 边界层顶部的垂直速度也是由两部分组成, 一部分即为与 f-GMA 相对应的垂直运动 $\tilde{w}_f$, 另一部分即为 β 项与 GM 相互作用下产生的垂直运动 $\tilde{w}_\beta$, 显然 $\tilde{w}_\beta$ 是对 $\tilde{w}_f$ 的修正量.

如果不考虑边界层顶部辐合辐散的贡献及 β 项的作用, 则 (33) 式即变为伍荣生和 Blumen 的结果^[5], 即为

$$\tilde{w}_z = \tilde{w}_f = \frac{1}{2} \zeta_s + Ro \left(\frac{1}{8} \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} - \frac{3}{8} \vec{k} \cdot \nabla \wedge \zeta_s \vec{V}_s \right) + \dots. \quad (36)$$

同样, $Ro = S = 0$ 时, (33) 式即为

$$\tilde{w}_\infty = \frac{1}{2} \zeta_\alpha. \quad (37)$$

此即为经典的 Charney-Eliassen 结果.

在 β -GMA 下边界层顶部的垂直速度与经典结果有较大的差异, 它具体与系统结构有关. 对一个对称分布的地转风场作用下的 Ekman 层, β -GMA 下的 Ekman 抽吸呈纬向非对称的, 而 f -GMA 下的 Ekman 抽吸为纬向对称的, 这种差异与 $\tilde{w}_\beta$ 的特性有关.

五、数值计算和分析

选取一个简单而典型的例子^[5], 一个定常、轴对称的圆形涡旋, 计算和分析边界层的水平风速分布及顶部的垂直运动结构.

自由大气的高度场分布为

$$\Phi = \pm \left(1 - \frac{\alpha}{2} (x^2 + y^2) \right) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (x^2 + y^2) \right), \quad (38)$$

其中 α 为常数, 正、负号分别表示反气旋和气旋.

图 1 和 2 即为水平风速计算结果. 图中 E 表示经典 Ekman 螺旋线, βE_+ , βE_- 分别表示 $A(0.0, 1.0)$ 、 $B(0.0, -1.0)$ 点有 β 项作用的经典 Ekman 流. f -GM 表示 f -GMA 解, β -GM $_+$, β -GM $_-$ 分别表示在 A 、 B 点的 β -GMA 解.

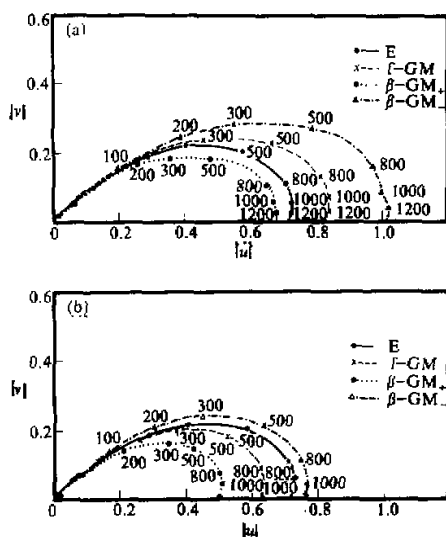


图 1 Ekman 层中风速矢随高度变化的矢端迹图

(a) 反气旋情形, (b) 气旋情形

$Ro = 0.2$, $S = 0.2$.

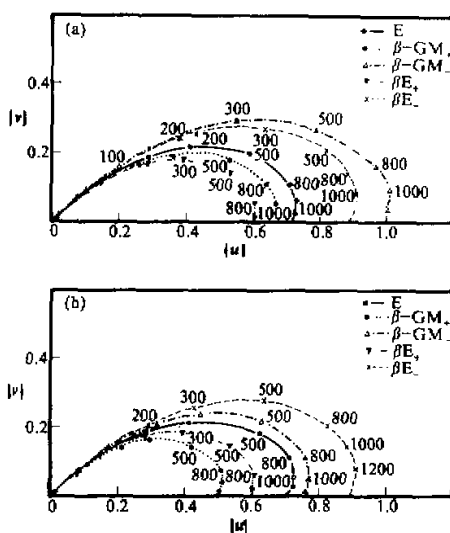


图 2 Ekman 层中风速矢随高度变化的矢端迹图

(a) 反气旋情形, (b) 气旋情形

$Ro = 0.2$, $S = 0.2$.

比较图中各条曲线, 可以得到以下结论:

* 反气旋中(图1a), β -GM₊ 位于 β E₋ 的外侧, β -GM₋ 位于 β E₋ 的外侧. 说明在反气旋性区域中, β -GMA 下的风速较有 β 项作用的经典线性解要大. 在气旋性区域(图1b), 结果相反. 这与 f-GMA 解的性质相一致^[5], 是地转动量的非线性作用的结果. 另外, 在气旋或反气旋中, β -GM₊ (β -GM₋), β E₊ (β E₋) 都位于 E 线的外侧(内侧), 但 β E₊ (β E₋) 与 E 线的差异完全由 β 项所决定, 而 β -GM₊ (β -GM₋) 线与 E 线的差异, 则为地转动量与 β 项共同作用的结果.

* 比较 β -GMA 解与 f-GMA 解, 在反气旋中(图2a), 在 A、B 点, f-GMA 解是对称的, 即位于图中同一曲线 f-GM, 而 β -GMA 解呈不对称分布, 分别为 β -GM₊, β -GM₋ 线. 且 β -GM₊ (β -GM₋) 位于 f-GM 线的外侧(内侧), 说明 β -GMA 下的解与其纬度有关. 当 $\varphi > \varphi_0$, β -GMA 下的风速要大于 f-GMA 下的风速, 当 $\varphi < \varphi_0$ 时, 结果相反. 在反气旋性区域(图2b), 有类似情形.

这些结果与上节的定性分析相一致.

边界层顶部垂直速度的计算结果如图3所示.

图3表示各种条件下边界层顶部的垂直速度, E 线为 Charney-Eliassen 的经典结果(无 β 作用), β E 线为有 β 作用的经典线性结果. f-GM 为 f-GMA 的结果, 而 β -GM 线为 β -GMA 解. 由图3可得:

* 在气旋(反气旋)中, β -GMA 下的顶部垂直速度要小于(大于)有 β 作用的经典线性结果, 这与 f-GMA 下的结果要小于(大于)经典 Charney-Eliassen 结果相类似.

* 无论在气旋还是反气旋区域, f-GMA 下的垂直运动是纬向对称的, 而 β -GMA 下的结果是纬向非对称分布, 且 β -GMA 下的最大上升(下沉)运动中心位置不再位于气旋(反气旋)中心, 而是偏向圆形涡旋的东南侧, 且其值也较 f-GMA 的结果要大.

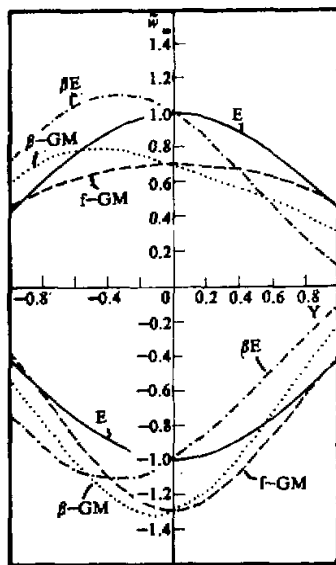


图3 边界层顶部的垂直速度分布图
上图为气旋情形, 下图为反气旋情形,
其余同图1说明

六、结 束 语

在 β -GMA 下的 Ekman 层水平风速和顶部的垂直运动, 由两部分组成, 一部分为单纯的 f- 平面的地转动量作用, 另一部分为 β 项与地转动量的相互作用部分. 而后者使得 β -GMA 解具有纬向非对称的特征. 比较 β -GMA 解与 f-GMA 解的特征, 结果表明, 在边界层动力学中, 对某一类尺度的边界层运动, 其非线性项和 β 项的作用是不可忽略的. β -GMA 较 f-GMA 更能反映出边界层系统的特征.

参 考 文 献

- [1] Hoskins, B. J., 1975, The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equation, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 233 — 242.
- [2] Hoskins, B. J., 1976, Baroclinic waves and frontogenesis, Part I: Introduction and Eady wave, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **102**, 103 — 122.
- [3] Merkin, L. O. and Kalanay-Rivas, 1976, Rotating semigeostrophic flow over finite isolated topography, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 908 — 922.
- [4] McWilliams, J. C., and P. R. Gent, 1980, Intermediate models of planetary circulation in the atmosphere and ocean, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1657 — 1678.
- [5] Wu, R. and Blumen, W., 1982, An analysis of Ekman boundary-layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1774 — 1782.
- [6] Blumen, W. and Wu, R., 1983, Baroclinic instability and frontogenesis with Ekman boundary layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation, *J. Atmos. Sci.*, **40**, 2630 — 2637.
- [7] 伍荣生等, 1983, 动力气象学, 上海科技出版社, 65 — 68.
- [8] 谈哲敏, 伍荣生, 1991, 边界层动力学中的 Ekman 动量近似, 气象学报, 第 49 卷, 第 4 期, 421 — 429.

 β -GMA and Ekman Boundary Layer Dynamics

Tan Zhemin Wu Rongsheng

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing, 210008)

Abstract

The geostrophic momentum approximation in the β -plane (β -GMA) and the condition of its validity are studied. A dynamical system of equations that describe motions in the Ekman boundary layer incorporating the β -GMA are derived. The effects of β -term and GM on the dynamics of boundary layer are studied. The solutions of β -GMA include two parts. One results from the solutions of f-GMA. The other results from the effect of the β -term and GM. Consequently, on one hand, the dynamics of β -GMA includes the one of f-GMA. On the other hand, the solution of f-GMA is longitudinally symmetric, but the one of β -GMA is not due to the effect of β -term for a steady, longitudinally symmetric height field. An example of a steady, axisymmetric circular vortex is used to show the characteristics of the horizontal velocity field in the Ekman layer and the vertical velocity at the top of PBL. These results are discussed in detail by comparing with the classical solutions and that obtained under f-GMA.

Key words: Geostrophic momentum; β -effect; Ekman layer dynamics.