第16卷 第5期
1992年9月

大 气 科 学
SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA

Vol.16, No.5
Sept. 1992

飑线的非线性重力波行波解模型*

张 铭

(空军气象学院，南京，211101)

提 要

本文提出了一个飑线的非线性重力波行波解模型，并将该模型与实际飑线作了比较，结果表明，该模型可反映出飑线的主要特征.

关键词： 飑线；非线性重力波；行波解.

一、引 言

飑线是一种中尺度对流系统，其过境时伴有雷暴、阵风、强降水，甚至还有冰雹，往往造成灾害，给国民经济和国防事业带来损失. 飑线过境的标志之一是地面气压在很短的时间内急剧涌升，粗略地看，可以认为气压产生了跳跃即出现了不连续现象. 最早 Tepper 就用非线性方程的特征线理论来解释这种跳跃现象[1]，后来李麦村又进一步用摄动法显示了非线性项使波前区波形变陡的过程[2]，他们认为飑线的这种气压跳跃类似于气体动力学中的激波和水力学中的水跃. 他们的结论基本上得到了观测事实的支持. 曾庆存以后对特征线方法又作了进一步的物理解释[3]. 然而若仔细分析飑线过境时地面的气压自记记录曲线就可发现，曲线并不呈简单的气压跳跃（间断），而有其内在的结构. 分析表明飑线过境时除气压急剧涌升外，在涌升后还存在振荡现象. 图1是1983年4月28日01时前后，华东一条飑线经过江苏苏州时的地面气压随时间的变化图（根据气压自记记录所绘），以上特点在图上表现很明显. 另外，从理论上看，实际大气总是有频散和耗散（粘性）的. 频散效应和耗散效应会抑制非线性效应造成的波的陡突. 在陡突处虽然物理量的梯度很大但还是连续的. 将飑线看成不连续仅是为了处理问题的方便.

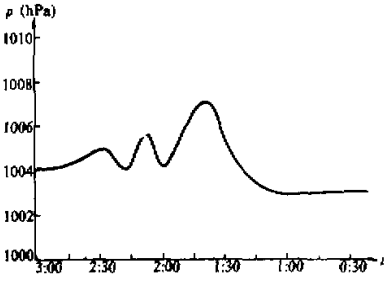

图1 飑线过境地面气压随时间变化图

很多飑线在发展成熟阶段均可准稳定地维持一段时间，在这段时间内其强度和形态变化不大，可近似看成一个不变的行波. 本文提出了一个飑线的非线性重力波模型

1990年4月18日收到，8月10日收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助课题.

并对其进行了讨论．

二、物理模型

由于非线性问题的复杂性本文只考虑一个高度简化的模型．设有上下二层均质不可压流体，上层密度为 ρ_1，下层为 $\rho_2>\rho_1$，x 方向为该行波的传播方向．由于飑线在 x 方向尺度不大，为简单起见不考虑科里奥利力．模型仅考虑 x 方向的一维运动．这样考虑频散和耗散效应的一维重力波方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g^*\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{1}{3}h_0\dfrac{\partial^3 h}{\partial x\partial t^2}-\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & (1.1)\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & (1.2)\end{cases}$$

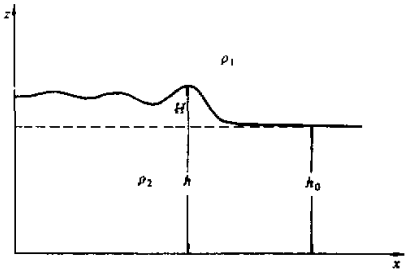

图2 考虑频散和耗散效应的一维重力波简化模型

这里 u 为 x 方向的风速，h 为第二层流体的高度，h_0 为扰动未移到时第二层流体的高度，其为常数，均如图2所示．$g^*=g(\rho_2-\rho_1)/\rho_2$ 为考虑浮力后修正的重力加速度，即约化重力．$\frac{1}{3}h_0\frac{\partial^3 h}{\partial x\partial t^2}$ 为频散项，$-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 是耗散项，ν 为耗散系数．这里采用的是非线性方程组，当非线性效应造成波的陡突后则频散项与耗散项在方程中就不是小项，其效应必须考虑．该方程组若略去耗散项后就成为 Boussinesq 采用的系统[4]．显然该系统仅包含重力波．

下面来求该非线性重力波的行波解．令

$$u=U(\theta),\ h=h_0+H(\theta),\ \theta=x-ct, \tag{2}$$

这里 c 为该行波的相速，设为常数，将(2)式代入(1)式则有

$$\begin{cases}(U-c)U'+g^*H'+\dfrac{1}{3}h_0H'''-\nu U''=0, & (3.1)\\ (U-c)H'+(h_0+H)U'=0, & (3.2)\end{cases}$$

这里"′"表示对 θ 的微商．积分(3.2)式可得

$$(U-c)(h_0+H)=A,$$

这里 A 为积分常数．当 $\|U\|\to 0$ 时显然应有 $\|H\|\to 0$，即 $h\to h_0$，由此可定出 $A=-ch_0$，这样有

$$U=\frac{cH}{h_0+H}=c-\frac{ch_0}{h_0+H}, \tag{4}$$

$$U'=ch_0H'/(h_0+H)^2 \tag{5}$$

积分(3.1)式有

$$\frac{1}{2}U^2-cU+g^*H+\frac{1}{3}c^2h_0H''-\nu U'=0, \tag{6}$$

这里取积分常数为零，这里由于当 $\|U\|\to 0$，$\|U'\|\to 0$ 时显然有 $\|H\|\to 0$，$\|H''\|\to 0$．把(4)、(5)两式代入(6)式消去 U 后得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{H}{h_0+H}\right)^2-\frac{H}{h_0+H}+\frac{g^*}{c^2}H+\frac{1}{3}h_0H''-\frac{\nu h_0H'}{c(h_0+H)^2}=0. \tag{7}$$

令 $Z=H/h_0$，$F=c_0^2/c^2$，这里 $c_0^2=g^*h_0$，c_0 是线性化基流为零不考虑频散与耗散效应时的重力波波速，这样有

$$\frac{1}{3}h_0^2Z''-\frac{\nu}{c}\frac{Z'}{(1+Z)^2}+\left(F-\frac{1}{1+Z}\right)Z+\frac{1}{2}\frac{Z^2}{(1+Z)^2}=0. \tag{8}$$

这是一个较复杂的非线性常微分方程，但当 Z 较小，其与1相比可忽略时则可在 $1+Z$ 项中略去 Z，这样方程(8)可简化为

$$\frac{1}{3}h_0^2Z''-\frac{\nu}{c}Z'-(1-F)Z+\frac{1}{2}Z^2=0. \tag{9}$$

这里非线性项是 Z^2 项，其来源于原方程(1.1)中的平流项(非线性项)．方程(9)也可直接由方程(1.1)和(1.2)的线性化形式 $\frac{\partial h}{\partial t}+h_0\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 得到．本文只讨论简化的方程(9)，对于更一般的情况(8)将另文讨论．

现设 $F<1$，即 $c^2>c_0^2$，令

$$Z=2(1-F)X,\quad \theta=h_0\xi/\sqrt{3(1-F)},\quad d\theta=h_0d\xi/\sqrt{3(1-F)}, \tag{10}$$

则方程(9)可化为标准型：

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}-m\frac{dX}{d\xi}-X+X^2=0, \tag{11}$$

这里系数

$$m=\sqrt{3}\,\nu/(ch_0\sqrt{1-F})=\sqrt{3}\,\nu/(h_0\sqrt{c^2-c_0^2})>0. \tag{12}$$

下面考虑边界条件．由图1可见，在飑线远未经过测站前和飑线移过测站较久后，测站地面气压 p 有一个变化 $\hat{p}$，故可认为当 $x\to+\infty$ 时有 $p=p_0$(此时飑线还远未移到测站)，而当 $x\to-\infty$ 时，$p=p_0+\hat{p}$ (此时可认为飑线已移过测站较久)．由于 $\hat{p}=\rho_2g^*\hat{H}$，故有 $x\to+\infty$，$H=0$；$x\to-\infty$，$H=\hat{H}$，也就是 $\theta\to+\infty$，$H=0$；$\theta\to-\infty$，$H=\hat{H}$，这相应于

$$\xi\to+\infty,\ X=0;\ \xi\to-\infty,\ X=\frac{\hat{H}}{2h_0(1-F)}. \tag{13}$$

方程(11)属修正的KDV-Burgers 方程，由文献[5]可知，它存在满足以下边条件的行波解．该边条件是

$$\xi \to +\infty,\quad X=0;\quad \xi \to -\infty,\quad X=1. \tag{14}$$

故有 $\hat{H}/[2h_0(1-F)]=1$，也即有

$$\hat{H}=2h_0(1-F)=2h_0(1-c_0^2/c^2)=2h_0(1-g^*h_0/c^2). \tag{15}$$

由此可见该行波的波速必须满足约束条件(15)．从(15)式可求出波速 c 的一个表达式

$$c^2=c_0^2/(1-\hat{H}/2h_0)\approx c_0^2(1+\hat{H}/2h_0)$$

$$=c_0^2+\frac{1}{2}g^*\hat{H}=g^*(h_0+\hat{H}/2)>c_0^2. \tag{16}$$

当从(16)式中求得 c 后，则由 $F=c_0^2/c^2$ 可求出 F，此时由(16)式知 $F<1$，与开始的假设一致．求出 F 后由(12)式可求出参数 m．反之当参数 m、v、h_0 给定后行波的波速 c 也就给定了．由(12)式可得波速 c 的表达式为

$$c^2=c_0^2+\frac{3v^2}{m^2h_0^2}. \tag{17}$$

比较(16)、(17)二式可知有 $3v^2/m^2h_0^2\approx g^*\hat{H}/2$，由此可得

$$\hat{H}\approx\frac{6v^2}{m^2h_0c_0^2}=\frac{6v^2}{m^2g^*h_0^2}. \tag{18}$$

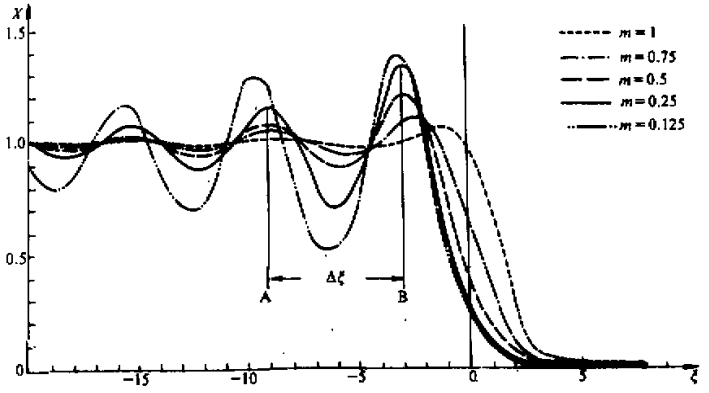

图3 参量 m 取不同值时行波的波形

……$m=1$，—·—·— $m=0.75$，——— $m=0.5$，——— $m=0.25$，··—··— $m=0.125$．

方程(11)在边条件(14)下的行波解形式与参数 m 有关，m 决定了该行波的波形是一个重要的参量．当 $m<2$ 时其解在 X 陡升后还存在振荡，而当 $m>2$ 时则不存在振荡[5]．由(12)式可知 m 反映了耗散(粘性)与频散效应的相对大小．我们用数值方法计算了 m 取0.125，0.25，0.5，0.75和1时该行波的波形(见图3)，由图3可见，当 m 增大时 X 陡升后的振荡减小，而当 m 较小时则 X 陡升后振荡明显．图3中当

$m=0.25$ — 0.5 时其波形则与图 1 中飑线过境时气压自记曲线的形状很相似．该行波的相速 c 比 c_0 大，其相速不仅与外参数 ν、h_0、c_0 等有关，还与该行波的形状（其由 m 决定）有关．当外参数固定后，m 大的行波相速较慢，m 小的则相速较快．

三、讨　　论

下面我们对上述物理模型中的参数作一些解释．观测事实表明，当飑线移至测站之前，往往测站上空在 850 hPa 以下有一个逆温层．该逆温层一方面抑制对流的发展，另一方面则有积累不稳定能量的作用．它相应于该模型中上下两层流体的分界面，故而模型中的参数 h_0 即可认为是飑线移至测站前测站逆温层顶的高度．而 ρ_2 和 ρ_1 则可取地面和逆温层顶空气的密度．ν 在该模型中为耗散系数，它表示动量向次级天气过程的扩散，这里次级天气过程可认为是积云尺度的，显然这里的扩散系数 ν 要比分子粘性扩散系数大许多，一般可取数值预报中的取值（$\nu\sim 10^3$ — $10^4\,\mathrm{m^2/s}$）．

下面我们用实际参数作一估算．取 h_0 为 1000m，ρ_2 和 ρ_1 各取海平面和 1000 m 高度上的标准大气密度，此时 $g^*=g(\rho_2-\rho_1)/\rho_2\approx 0.876\,\mathrm{m/s^2}$，$c_0=\sqrt{g^*h_0}=29.6\,\mathrm{m/s}$，$\nu$ 取 $1.5\times 10^3\,\mathrm{m^2/s}$，由图 1 可取 $m=0.25$，则由（17）式可算出 $c\approx 31.4\,\mathrm{m/s}$，$F=c_0^2/c^2\approx 0.89<1$．由图 3 可见当 $m=0.25$ 时 X 最大为 1.36，最小趋于 0，故 X 的最大变化 $\Delta X=1.36$，这样 Z 的最大值为 $2(1-F)\Delta X=2\times(1-0.89)\times 1.36\approx 0.299$，可以认为此时仍有 $Z\ll 1$，满足方程（8）简化为方程（9）的条件．Z 的最大变化 $\Delta Z=0.299$，而高度的最大变化 $H=h_0\Delta Z\approx 299\,\mathrm{m}$，这样算得飑锋上的气压涌升为 $\Delta p=\rho_2 g^* H=322.4\,\mathrm{Pa}\approx 3.2\,\mathrm{hPa}$．下面再估算飑锋后振荡的水平尺度，即图 3 上 A、B 两点的距离．由图 3 可知 A、B 间 $\Delta\xi\approx 6$，故由 $\Delta\theta=h_0\Delta\xi/\sqrt{3(1-F)}$ 可求得 $\Delta\theta\approx 1000\times 6/\sqrt{3\times(1-0.89)}\approx 10444.7\,\mathrm{m}\approx 10.4\,\mathrm{km}$．

下面来求飑锋后的气压涌升 Δp（它反映了飑线的强度）与外参数及相速（飑线的移速）之间的诊断关系．由（10）、（12）式可得

$$\Delta p=\rho_2 g^*\Delta H=\rho_2 g^* h_0 2(1-F)\Delta X=2c_0^2\left(1-\frac{c_0^2}{c^2}\right)\rho_2\Delta X, \tag{19}$$

当外参数 ν，g^*，h_0，ρ_2 确定后则 m 仅与 c 有关，注意到当 m 给定后 ΔX 就确定了，ΔX 为 m 的单调函数，表 1 给出了 ΔX 与 m 的函数关系，这样外参数确定后 Δp 仅与该行波的相速 c 有关．由（17）式可知当外参数不变而 c 增大时，m 减小，由表 1 可知此时 ΔX 增加（ΔX 随 m 增大单调减少），此时（19）式中括号里的值也增加，故而 Δp 增大．由此可见在外参数相同的情况下相速大的行波（相应于移速快的飑线），其气压涌升明显，且气压涌升后的振荡也明显（因 m 较小之故）．若粗略地把发展成熟的飑线演变过程看作是准静态的，则可认为当飑线移速加快时，其强度增强，且飑线过境后的气压振荡也明显．观测表明，不少飑线增强时其移速往往加快，且过境后的气压振荡也变得明显，这与以上的结果相一致．

由(16)式可见当外参数确定后，飑线过境前后的气压差 $\hat{p}$ 越大(此时 $\hat{H}$ 越大)，则飑线的移速 c 也越大，由上面讨论可知飑线过境时的气压涌升及其后的气压振荡也越明显．

表1 ΔX 与 m 的函数关系

m	0.125	0.25	0.4	0.5	0.75	1
ΔX	1.40	1.36	1.28	1.22	1.12	1.06

下面讨论当波形不变(m 固定)和外参数 g^*，ρ_2，v 固定后 h_0 与气压涌升 Δp 之间的关系．此时由(12)式可知由于 h_0 的变化其相速 c 也要改变．将(17)式代入(19)式后可得

$$\Delta p=\rho_2\Delta X\Big/\left(\frac{m^2h_0^2}{6v^2}+\frac{1}{2g^*h_0}\right), \tag{20}$$

当 m 固定后 ΔX 也确定了，从(20)式可见若外参数 g^*，ρ_2，v 固定，则当 $h_0\to 0$ 时 $\Delta p\to 0$，另一方面有 $h_0\to\infty$ 时 $\Delta p\to 0$，故在此时必有一最佳的 h_0 值使 Δp 达到极大值．由于 h_0 反映了逆温层顶的高度，以上讨论表明，逆温层顶的高度与飑线过境时的气压涌升关系密切，逆温层顶太高和太低对飑线过境后的气压涌升都不利，只有最佳的逆温层顶高度才使得飑线过境后有最大的气压涌升．

一般当 h_0 在2000 m 以下时可设 g^* 与 h_0 成正比，即 $g^*=kh_0$，这里 k 为比例系数，对标准大气的密度层结 $k\approx 0.876\times 10^{-4}s^{-2}$，这样用求极值的方法不难从(20)式求得该最佳的 h_0 (记为 $\tilde{h}_0$) 的表达式为

$$\tilde{h}_0=\sqrt[4]{\frac{3}{k}}\cdot\sqrt{\frac{v}{m}}. \tag{21}$$

此时最大的气压涌升(记为 $\Delta\tilde{p}$) 为

$$\Delta\tilde{p}=\sqrt{3k}\ \rho_2\Delta X\, v/m=k\rho_2\Delta X\tilde{h}_0^2. \tag{22}$$

注意到在(17)式中当 m，v 固定后该行波波速 c 仅与 h_0 有关，且当 $h=\tilde{h}_0$ 时恰好有 c 的极小值(记为 $\tilde{c}$)：

$$\tilde{c}=\sqrt[4]{12k}\cdot\sqrt{\frac{v}{m}}=\sqrt{2k}\ \tilde{h}_0, \tag{23}$$

由此可知在最佳的逆温层高度飑线过境不但有最大的气压涌升，而且飑线的移速最慢．由(22)式和(23)式还可得如下的诊断关系：

$$\Delta\tilde{p}=\frac{1}{2}\rho_2\Delta X\cdot\tilde{c}^2. \tag{24}$$

当取 m 为0.25—0.5，v 为 1×10^3—5×10^3 时按(21)式算得的 $\tilde{h}_0$ 值大致在400 m 到1000m 之间，观测表明，在飑线移近测站时测站上空逆温层顶的高度大致也在该范围，两者是一致的．

下面讨论该模型的流场．由(4)式知

$$U-c=-ch_0/(h_0+H)\approx -c(1-H/h_0),\tag{25}$$

注意到 $H/h_0<1$，故 $U-c<0$，这表明在该行波中相对气流均是入流（热带飑线的情况就是如此），且波速 c 越大入流越强．由(25)式知此时有 $U\approx cH/h_0>0$，即风向前吹，且其大小与 cH 成正比．由于在气压涌升处 H 由近于 0 急增至最大，故风速也由近于 0 急增至最大．下面估算该最大风速．取前面的参数 $c=31.4$m，$H=299$m，$h_0=1000$ m，则有 $U=31.4\times 299/1000\approx 9.4$ m/s．这里的 U 指的是下层流体的流速，它实际是一层的平均流速，与实际飑线的风速相比，其值当然要小一些．

注意到散度 $D=\dfrac{\partial u}{\partial x}=U'$，故由(5)式可知

$$D=Ch_0H'/(h_0+H)^2.\tag{26}$$

考虑到 $H=Zh_0$ 及(10)、(12)式则有

$$D=\frac{6\nu}{mh_0^2}\ \frac{(1-F)}{(1+2(1-F)X)^2}\ \frac{dX}{d\xi}.\tag{27}$$

由图 3 可见在该行波波前处 $dX/d\xi$ 小于 0 且其绝对值很大，故那里有很强的辐合，下面来估计该辐合的上限．

注意到在 $dX/d\xi$ 达到极值处有 $d^2X/d\xi^2=0$，故由(11)式可知在该处有 $dX/d\xi=X(X-1)/m\geqslant -1/4m$，这样则有

$$D\geqslant \frac{6\nu^2}{mh_0^2}\ \frac{(1-F)}{(1+2(1-F)X)^2}\left(-\frac{1}{4m}\right)\geqslant -\frac{3\nu}{2m^2h_0^2}(1-F)$$

$$=-\frac{c^2}{2\nu}(1-F)^2=-\frac{1}{2\nu}c^2(1-c_0^2/c^2)^2,\tag{28}$$

或有

$$|D|\leqslant \frac{c^2}{2\nu}(1-F)^2=\frac{c^2}{2\nu}(1-c_0^2/c^2)^2.\tag{29}$$

由此可见，当 ν，g^*，h_0 等外参数固定后，波速快的行波其波前最大辐合的上限值也大．

下面用以上参数估计该上限值，取 $\nu=1.5\times 10^3\,\mathrm{m^2/s}$，$F=0.89$，$c=31.4$ m/s 代入(29)式中，则有 $|D|\leqslant 4.0\times 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}$，虽然该值相当大，但它仍是有限的，故该处并不存在真正的间断．还可从图 3 上读出最大的 $dX/d\xi$ 和该处的 X 来估计该行波波前的最大辐合和其后的最大辐散．取上面的数据，即 $m=0.25$，$\nu=1.5\times 10^3\,\mathrm{m^2/s}$，$h_0=1000$ m（此时 $F=0.89$），由图 3 可见该行波波前最大 $|dX/d\xi|$ 约为 0.65，该处的 X 约为 0.85，而其后最大的 $dX/d\xi$ 约为 0.3，该处的 X 约为 1.1，将以上数据代入(27)式可算得波前的最大辐合为 $1.8\times 10^{-3}\mathrm{s^{-1}}$，其后的最大辐散为 $7.7\times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$，该最大辐散的数值约为最大辐合的 43%．

以上讨论表明，该模型与实际飑线相比有不少地方是相同或相似的，例如在飑锋处有很强的辐合和地面气压涌升，在其后则有强辐散及气压振荡；飑线低层相对气流为入流；地面风吹向飑线的移动方向且在飑锋处风速剧增等等，这说明该物理模型虽

然简单，但仍反映出飑线的一些主要特征．

四、结 语

对以上飑线的物理模型进行讨论后可有以下结论：

（1）成熟阶段的飑线可近似看作非线性重力波的行波解．该解表明在飑线过境时气压急剧涌升，风明显加大，飑锋处有强辐合，其后则有强辐散，且气压出现明显的振荡．

（2）该行波的波速与其波形有关．在外参数相同时移速快的行波其气压涌升剧烈，且其后的气压振荡明显．

（3）成熟阶段的飑线加强时，移速加快，减弱时移速变慢．

（4）逆温层顶的高低与飑线的强度关系密切，只有最佳的逆温层高度才使飑线过境后有最大的气压涌升；该高度一般为400 — 1000m．

该模型存在的问题是我们在(8)式 $1+Z$ 项中略去了 Z，但有时 Z 不是太小，此时不宜用方程(9)而要用方程(8)来讨论．另一问题是这里略去了科里奥利力且作为一维问题来处理，这样该模型过于简单了．这些问题均有待进一步解决．

参 考 文 献

[1] Tepper, M., 1955, On the generation of pressure-jump lines by the impulsive addition of momentum to simple current systems, *J. Met.*, 12, No.4, 287 — 297.

[2] 李麦村，1976，飑线形成的非线性过程，中国科学，第6期，592 — 601．

[3] 曾庆存，1979，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，科学出版社，486 — 487．

[4] Boussinesq, J., 1871, Théorie de l'intumescence liquide appelée ónde solitaire ou de translótion se propageant dans un canal rectangulaire, Comptes Rendus 72, 755 — 759.

[5] Huang Sixun (黄思训), 1988, Existence of traveling wave of modified Korteweg-De Vrines-Burgers equation, 中国科学院大气物理研究所大气数值模拟开放研究实验室学术年报．

A Squall Line Model of Nonlinear Gravity Travel Wave Solution

Zhang Ming

(*Air Force Meteorological Institute, Nanjing*, 211101)

Abstract

In this paper a squall line model of nonlinear gravity travel wave solution is advanced and compared with real squall line. The results indicate that the model can express main characteristics of a squall line.

Key words: Squall line; Nonlinear gravity wave; Travel wave solution.