

# 一种利用气象要素场时变信息确定其 空间分布状态的方法及数值模拟研究\*

郜吉东\*\*

丑纪范

李志锦

(兰州大学大气科学系, 兰州 730001)

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100080)

## 提 要

本文将观测资料所包含的时间演变信息来建立要素场空间结构的问题提成一个反问题, 并利用共轭方程和最优控制技术把模式初值作为控制变量来求解这个反问题; 希望对由于空间测站不足而得不到合理初始场的问题以及由于用共轭方程而引起大的计算量的问题获得解决的方法。文中利用了一个边界层动力模式及其共轭方程模式进行了数值试验。结果表明: 在对计算做出简化处理及较合理的测站分布下, 方法能够从大大少于模式自由度的观测资料中得出比较合理的要素场初值的空间结构。

关键词: 时变信息; 最优控制技术; 共轭方程。

## 一、引 言

无论是大尺度还是小尺度问题, 在某一空间或时间上使气象场具有同一性和准确性, 常常是大气科学中有实际或理论意义工作的先决条件。首先对于数值预报, 在能够预报之前, 全部初值条件必须定义在规则的空间网格点上。然而实际大气观测在空间常常是稀疏的, 用直接内插难以得出符合实际的结果, 因为要建立由规则观测值得出模式参数值的显式表达式有较大的误差, 并且在分析中不能考虑不同时间的观测资料和非直接的观测资料的信息。这个缺陷在大气中, 小尺度预报和海洋预报中更加明显。主要原因是其观测系统更加稀疏。由于人力、物力的限制, 使得观测资料的分布, 一方面在给定时空分布的资料太少; 而另一方面, 由于雷达等先进探测仪器的使用, 使资料分布的时间密度较大。把这两个问题结合起来考虑, 希望把资料所包含的时间演变信息转化为要素场的空间分布状况, 这样就有可能形成较为合理的要素场的空间结构。

这里我们利用近年来发展起来的基于最优控制技术的共轭方程理论<sup>[1]</sup>来解决上面提出的问题。在方法的执行过程中, 主要借助于基本方程模式以及共轭方程模式中所包含的动力过程来达到两个目的: (1)从现有气象要素的观测值中确定出没有被观测到的量的时空分布。这要靠变量之间的动力耦合来实现。例如垂直速度没有观测, 但却可以借

1992年11月24日收到, 1993年5月11日收到修改稿。

\* 本文是在国家教委高等学校博士点科研基金及大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室(LASG)资助下完成的。

\*\* 现在北京气象学院工作。

助反问题求出来。(2)如果某一要素在空间某个区域有观测值,如何确定出这一要素在另一空间区域的分布,这依赖于信息随气流的传播,这是目前资料同化问题中在资料十分欠缺情况下所要解决的主要问题。我们将看到,共轭方程在这两个问题的解决中起着关键的作用。

## 二、反问题的提出和解法

### 1. 反问题的构成

设有一个数值模式比较精确地表达了模式的动力过程<sup>[7]</sup>

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad (1)$$

$$X_0 = X(t_0), \quad (2)$$

我们把它简记为

$$X_i = C(X_0), \quad (3)$$

其中 $X_i$ 是模式变量在 $t_i$ 时刻的值, $i=1, 2, \dots, I$ ,并且定义在模式积分的状态空间上。由方程(3)知,各个时刻模式状态值完全由初值决定。

又设 $Y_j$ 为 $t_j$ 时刻的观测值全体,这里 $j=0, 1, \dots, P$ , $-T=t_0 < t_1 < \dots < t_P=0$ (一般 $P \leq I$ ),由于 $Y_j$ 在空间上一般数量较少且分布不均,直接寻找由 $Y_j$ 表示的 $X_i$ 的表达式是不精确的,缺点很多,譬如不同时刻的观测不能同时利用,有些资料的信息在分析中利用不上等。反过来考虑问题,我们假定观测值和模式参数有如下关系:

$$Y_j = K_j(X_i), \quad (4)$$

这里 $i=0, 1, 2, \dots, I$ ;  $j=1, 2, \dots, P$ ;  $K_j$ 是一个内插算子,可以是线性的,也可以是非线性的。

把(3)式代入(4)式,可得

$$Y_j = K_j(X_i) = K_j[C(X_0)] = N_j(X_0).$$

令 $Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_P)^T$ ,  $N^* = (N_0, N_1, \dots, N_P)^T$ , 可得

$$Y = N^*(X_0). \quad (5)$$

这样求模式(1)的初始状态 $X(t_0)$ (它是我们要定的未知量)可提为方程(5)的反问题。即已知 $Y$ 来求 $X_0$ 求出 $X_0$ 后对模式方程进行积分,即得各时刻的 $X_i$ ,这样就得到了要素场的四维分布。如果继续向前积分,积过 $t_P$ 时刻,即可得到对未来的预报场。这种方法把时空信息结合起来考虑,简单地说就是:由动力学规律加上测站观测值的时间演变推出要素场的时空分布。这种方法的优点是同时考虑了资料的约束和模式的动力约束,所得出的要素场的时空结构场既按某个精度与所用的所有时刻的观测资料充分接近,又呈现实际大气满足的动力或统计关系。

上述反问题通常是不适定的,即不存在唯一的满足(5)式的 $X_0$ ,为此用变分法的最

优控制技术,希望能找到一个既和模式方程相适应又按某个精度接近观测值的 $X_0^*$ 来。

为了利用最优控制技术,首先定义一个关于观测值全体的目标泛函

$$J = \sum_{j=1}^P H_j = \sum_{j=1}^P (Y_j - \tilde{Y}_j, Y_j - \tilde{Y}_j) = \sum_{j=1}^P \sum_{m=1}^M (y_j^m - \tilde{y}_j^m)^2, \quad (6)$$

式中 $(\cdot)$ 表示内积, $M$ 是观测点总数,在理想场的数值模拟试验中可以是任意设置的。 $\tilde{Y}_j$ 或 $\tilde{y}_j^m$ 是观测点上的“观测值”,而 $Y_j$ 或 $y_j^m$ 是由算子 $Y_j = K_j(X_j)$ 求得的,因而 $J$ 度量了在给定的 $t \in [t_0, t_p]$ 时段内由反算子求出的 $Y_j$ 和给定的“观测资料” $\tilde{Y}_j$ 之间的距离。

假定 $K_j$ 算子可显式地表示为

$$y_j^m = \sum_{i=1}^N w_i^m X_i, \quad (7)$$

其中 $w_i^m$ 是第 $m$ 个观测点关于第 $i$ 个网格点的权重, $X_i$ 是由模式方程(11)和起始的初值迭代值产生的模式的一个状态, $N$ 是网格点数,则目标泛函中正则函数可写为

$$H = \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^N w_i^m X_i - \tilde{y}_j^m \right)^2.$$

容易求出函数 $H$ 关于模式任一状态 $X_j$ 的梯度为

$$(\nabla H)_{X_j} = 2 \sum_{m=1}^M w_j^m \left( \sum_{i=1}^N w_i^m X_i - \tilde{y}_j^m \right), \quad (8)$$

注意到上式中包含了由模式状态 $X_i$ 求对应观测点值的反算子。

对于模式方程(1),其线性化的扰动方程为

$$\frac{d\delta X}{dt} = F'(t)\delta X, \quad (9)$$

此处 $F'(t)$ 是通过求 $F$ 关于 $X(t)$ 的微分而得到的算子,且定义在点 $X(t)$ 。方程(9)是线性的,因而其在给定时刻 $t$ 的解线性依赖于在时刻 $t_0$ 的初始条件。经过一系列推导<sup>[1]</sup>,我们可以导出其共轭方程为

$$-\frac{d\delta X^*}{dt} = F'^*(t) \cdot \delta X^*(t). \quad (10)$$

可以证明,非齐次共轭方程

$$-\frac{d\delta X^*}{dt} = F'^*(t) \cdot \delta X^*(t) + (\nabla H)_{X_j}. \quad (11)$$

在初值 $\delta X^*(t_p) = 0$ 下反向积分得到的 $\delta X^*(t_0)$ 就是目标泛函 $J$ 关于控制变量(初值) $X_0$ 的梯度,记为 $G(X_0)$ 。

## 2. 最优控制算法

最优控制理论有着十分丰富的理论体系。我们要用的只是其中的一种——共轭梯度

法。它是一种无约束极小化的迭代方法,实施的结果是产生逼近于含  $N$  个变量的最优极小点  $X_{0p}$  的极小化序列  $X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^N, \dots$ , 对于每一次迭代,它总能给出一个对矢量  $X_0$  每一个分量变化的最优估计,从而使目标泛函充分下降。这里极小化序列的第  $k+1$  步和第  $k$  步迭代有如下关系:

$$X_0^{(k+1)} = X_0^{(k)} + \alpha_{k+1} P^{(k+1)}, \quad (12)$$

式中  $P$  称为下降方向或共轭方向,是和  $X_0$  维数相同的矢量,而  $\alpha_{k+1}$  是沿下降方向的最优步长。第  $k+1$  步下降方向和第  $k$  步下降方向的关系是

$$P^{(k+1)} = -G^{(k+1)} + \beta_{k+1} P^{(k)}, \quad (13)$$

其中  $G^{(k+1)}$  是目标泛函关于点  $X_0^{(k+1)}$  的梯度,即用(11)式表示的共轭方程反向积分求得的结果。

由此可见共轭梯度法每一步迭代由两个环节组成:确定  $\alpha_{k+1}$  和  $\beta_{k+1}$ 。针对不同的确定  $\alpha_{k+1}$  和  $\beta_{k+1}$  的方法相应的有很多类共轭梯度法。如当  $\beta_{k+1} = [(G^{(k)} - G^{(k-1)})^T G^k] / [(G^{(k-1)})^T G^{(k-1)}]$  ( $T$  表示转置)称为 Polak-Ribieue 算法,而当  $\beta_{k+1} = [(G^{(k)})^T G^{(k)}] / [(G^{(k-1)})^T G^{(k-1)}]$  时得到 Fletcher-Reeves 方法。对于气象的应用来讲,最优步长  $\alpha_{k+1}$  的确定更为重要。因为确定它要用到最优控制中的单维搜索方法。而在我们的算法里等于要对数值模式反复积分,所以单维搜索的效率是算法成败的关键。我们采用了由 Beale 和 Powell 提出的一种单维搜索效率较高的方法<sup>[3,4]</sup>。

根据前面的阐述,用最优化方法计算所求问题的基本计算步骤如下:

(1)给定所要反演量即控制变量(本文为模式初值)的起步迭代值,在分析的时间区域  $[t_0, t_p]$  内,积分基本模式方程(1),贮存每一时刻得到的积分值。

(2)根据(6)式计算关于观测值整体的目标泛函  $J$ 。

(3)将非齐次共轭方程(11)式反向积分,得到目标泛函关于控制变量的梯度  $G(X_0)$  (这时要用到步 1 产生的各时刻的模式值)。据此确定出目标泛函新的下降方向  $P(X_0)$ 。

(4)对模式方程在区域  $[t_0, t_p]$  内再进行一次积分;用以确定在新的下降方向下的最优步长  $\alpha_{k+1}$ 。

(5)求出控制变量在此步的最优值  $X_0^{k+1} = X_0^k + \alpha_{k+1} P^{(k+1)}$ 。

(6)重复上述步骤,得出一系列  $X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^k, \dots$ , 直至按某个精度逼近最优解  $X_{0p}$  来。

上述反问题的不适定性转化为最优化问题后,即是存在多个局部极小点的情形。这可通过提供较为准确的起步迭代值(在数值预报中为预备场)和向泛函中引入其他信息(如其他类型资料等)来解决,从而保证所产生的最优解为全局极小点。

### 三、基本模式和共轭模式的导出

基本模式取自北京大学地球物理系的《复杂地形上的数值及扩散模式(BDM)》(1989年),采用地形追随坐标系  $z^* = H(z - z_g) / (H - z_g)$ , 其中  $z_g$  为地表面高度,  $H$  为模式顶高度,取为 4500m,在不可压缩假定下,得到和(1)式相应的模式基本方程组为

$$\begin{cases}
 \frac{du}{dt} - fv + \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} - k_{MH} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k_{MV} \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) \\
 = -fv_g - \frac{H-z^*}{H} g \frac{\partial z_g}{\partial x}, \\
 \frac{dv}{dt} + fu + \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} - k_{MH} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k_{MV} \frac{\partial v}{\partial z^*} \right) \\
 = fu_g - \frac{H-z^*}{H} g \frac{\partial z_g}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \pi}{\partial z^*} + \frac{gD}{\theta} = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x} (Du) + \frac{\partial}{\partial y} (Dv) + \frac{\partial}{\partial z^*} (Dw^*) = 0, \\
 \frac{d\theta}{dt} - k_{\theta H} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k_{\theta V} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right) = 0,
 \end{cases} \quad (14)$$

上述方程组中  $D = (H - z_g)/H$ ,  $\pi = c_p(p/1000)^{R/c_p}$  为表示气压的 Exner 函数,  $w^*$  为  $(x, y, z^*)$  坐标系中的垂直速度, 上边界 ( $z^* = H$ ),  $u = u_g$ ,  $v = v_g$ ,  $\partial\theta/\partial t = \partial\pi/\partial t = 0$ , 并在顶部边界下设置一吸引层; 下边界 ( $z^* = 0$ ),  $u = v = w^* = 0$ 。模式的其余细节请参看文献[5]。本文中我们主要考虑了地形起伏引起的动力作用。

上述方程组的线性化扰动方程组为

$$\begin{cases}
 \frac{\partial u'}{\partial t} + \left( H + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) u' + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \right) v' + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} w' + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial x} \pi' + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} \theta' = 0, \\
 \frac{\partial v'}{\partial t} + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + f \right) u' + \left( H + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) v' + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z^*} w' + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} \pi' + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} \theta' = 0, \\
 \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial z^*} \pi' - \frac{gD}{\bar{\theta}} \theta' = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x} (Du') + \frac{\partial}{\partial y} (Dv') + \frac{\partial}{\partial z^*} (Dw') = 0, \\
 \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} u' + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} v' + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^*} w' + H\theta' = 0,
 \end{cases} \quad (15)$$

方程组中

$$\begin{aligned}
 H &= \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z^*} - k_{MH} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k_{MV} \frac{\partial}{\partial z^*} \right), \\
 H_{\theta} &= \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z^*} - k_{\theta H} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k_{\theta V} \frac{\partial}{\partial z^*} \right).
 \end{aligned}$$

记

$$\varphi = \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \pi' \\ \theta' \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} II + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f & \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} & \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \pi} & \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + f & II + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial z^*} & \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial z^*} & -g \frac{\bar{D}}{\bar{\theta}} \\ \frac{\partial}{\partial x} D & \frac{\partial}{\partial y} D & \frac{\partial}{\partial z^*} D & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^*} & 0 & II_{\theta} \end{bmatrix}.$$

则方程可化为<sup>[9]</sup>

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \varphi = 0. \quad (16)$$

设  $\varphi^* = (u^*, v^*, w^*, \pi^*, \theta^*)^T$ , 利用

$$(\varphi^*, A\varphi) = (\varphi, A^* \varphi^*), \quad (17)$$

在对共轭变量边界条件取为 0 或周期边界条件的假设下, 容易导出其共轭算子为

$$A^* = \begin{bmatrix} II^* + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + f & 0 & -D \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f & II^* + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & 0 & -D \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial z^*} & 0 & -D \frac{\partial}{\partial z^*} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^*} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \bar{\theta} & -\frac{\partial}{\partial y} \bar{\theta} & -\frac{\partial}{\partial z} \bar{\theta} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} & -\frac{gD}{\bar{\theta}} & 0 & II_{\theta}^* \end{bmatrix}. \quad (18)$$

其中算子

$$II^* = -\frac{\partial}{\partial x} \bar{u} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} - \frac{\partial}{\partial z^*} \bar{w} - k_{MH} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K_{MV} \frac{\partial}{\partial z^*} \right),$$

$$II_{\theta}^* = -\frac{\partial}{\partial x} \bar{u} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} - \frac{\partial}{\partial z^*} \bar{w} - k_{\theta H} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( K_{\theta v} \frac{\partial}{\partial z^*} \right),$$

则和(9)式相应的共轭方程可写为

$$\begin{cases} -\frac{\partial u^*}{\partial t} + \left( II^* + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) u^* + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - f \right) v^* - D \frac{\partial \pi^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \theta^* = 0, \\ -\frac{\partial v^*}{\partial t} + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \right) u^* + \left( II^* + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) v^* - D \frac{\partial \pi^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \theta^* = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} u^* + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z^*} v^* - D \frac{\partial \pi^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^*} \theta^* = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x} \bar{\theta} u^* - \frac{\partial}{\partial y} \bar{\theta} v^* - \frac{\partial}{\partial z^*} \bar{\theta} w^* = 0, \\ -\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} u^* + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} v^* - \frac{gD}{\bar{\theta}} w^* + II_{\theta} \theta^* = 0. \end{cases} \quad (19)$$

第二节中其他相应各式的构造都比较简单,限于篇幅,不再一一列出。控制变量取为  $u(t_0)$ ,  $v(t_0)$ ,  $w(t_0)$ 。

基本模式和共轭模式均采用了 Arakawa-c 跳格点格式,垂直方向上  $u$ ,  $v$ ,  $T$  和  $w$  交错排列,此种格式能利用一阶差分格式达到二阶精度<sup>[5]</sup>。共轭模式的差分格式只有也必须和基本方程的差分格式相一致,才能保证共轭方程的积分结果恰恰就是目标泛函关于控制变量的梯度。

## 四、数值模拟试验

### 1. 基本模式的特征

基本模式的模拟性能已经由北京大学等很多单位进行过山谷风、海陆风以及地形阻塞等的数值模拟试验,证明该模式性能良好。本文仍取正方形网格,格距  $d=5000\text{m}$ ,共  $23 \times 23$  个网格点,垂直方向分成不等距的 12 层,模式顶层为  $4500\text{m}$ ,考虑一孤立环形山地形

$$z_g = \begin{cases} h_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{L}\right), & 0 \leq r \leq L \\ 0, & r \geq L \end{cases} \quad (20)$$

这里,  $r$  是到区域中心点的水平距离,  $L$  为山的半宽度,取为 5 倍格距,  $h_0=800\text{m}$ 。为突出地形的动力作用,试验中取了较大的基本气流。初值  $u=u_g=15\text{m/s}$ ,  $v=v_g=0$ ,  $\theta=310+\gamma z$ ,  $\gamma=0.6/100\text{m}$ 。为削弱高频振荡,采用了二阶的 Adams-Bushforth 积分方案

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} + \Delta t \left( \frac{3}{2} \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial t} \right), \quad (21)$$

取时间步长 30 s, 将基本模式积分半小时, 将所得结果视为地形影响下的流场和位温场。图 1 为计算得到的由地形引起的  $u'$ ,  $w'$  的扰动分量东西垂直剖面(过中心山顶)。图 2 为 1400m 水平风速矢量图及垂直速度  $w'$  的水平分布。可以看到, 在迎风坡出现了较大的绕流, 在背风坡形成水平辐合,  $w'$  的分布大体与山的南北轴线对称。 $u'$  的分布, 山前为负, 山后为正值区, 因而山前有向下的动量输送, 山后为向上的动量输送。分析  $\theta$  的等值线(图略)发现在稳定层结下, 由于上升运动造成的降温作用, 在迎风坡的上升气流内, 位温比背风坡的对应位置明显偏低。模式反映了地形动力作用引起的垂直输送的基本情况。

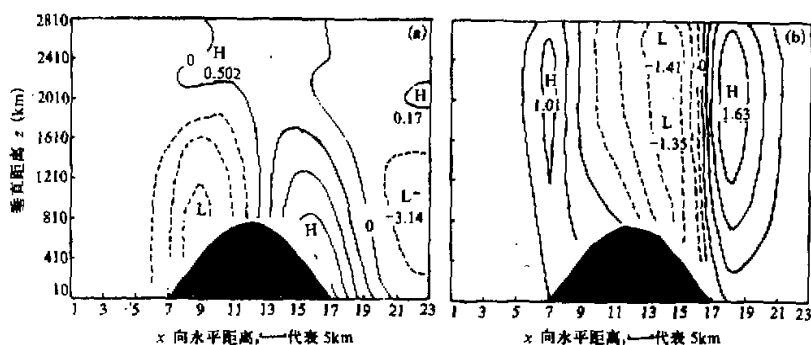


图 1 要素场的东西垂直剖面图

(a)  $u'$  场等值线图; (b)  $w'$  场的等值线图

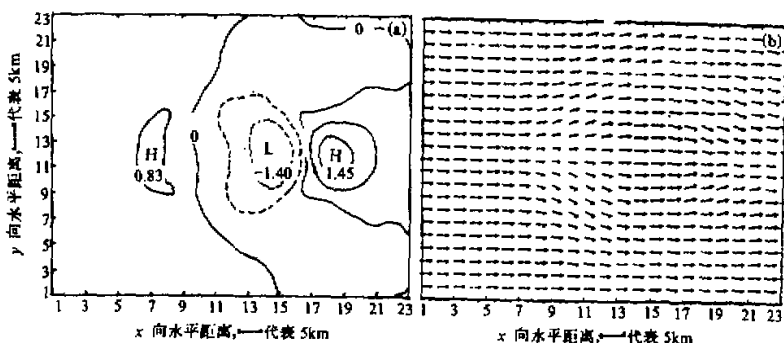


图 2 要素场的水平剖面图

(a) 1400m 高的  $w'$  场; (b) 1400m 的水平风速矢量图

## 2. 反问题的数值模拟试验

本文的目的是模拟在空间观测少于模式自由度情况下, 由于地形动力作用引起的气象要素时空结构的分布。试验时采用的观测资料由基本模式自己提供。认定从图 1、图 2 所示的初始场出发, 积分基本模式 6 小时, 每隔 30 积分步存放一次积分值。把这些积分值权重内插到模拟试验时所设立的观测点上, 作为试验时所用的“观测值”, 并认定

$u, v$  有其相应的观测值,  $w$  没有观测值。理想的要素初值场的空间结构由图 1、图 2 表征, 以后反演的结果均要和图 1、图 2 所示结果进行比较。

值得指出的是, 在对共轭模式(19)的反向积分过程中, 每步积分都要用到基本模式正向积分产生的每一时刻的值(参看第三节计算步骤 1), 在这种情况下, 对计算机贮存量的要求将非常大, 使得计算进行不下去, 为此我们对计算做了简化处理, 每计算 10 步贮存一次积分值, 共轭方程反向积分时, 每 10 步更换一次所用的基本模式解的值, 这样对计算机贮存量的要求, 将大大减少, 使得整个计算得以维持下去。这是一个比较大的简化, 目前我国计算机条件下只能如此, 经下面的几个数值试验证明是切实可行的。另外试验假定的“观测点”在模拟区域都为均匀分布<sup>[6]</sup>。为便于比较, 迭代都终止于第 12 步。

试验 1: 取迭代起始时  $u_0 = u_g, v_0 = v_g, w_0 = 0$ , 即为均一水平气流,  $u'(t_0) = v'(t_0) = w'(t_0) = 0$ 。首先要做的试验分析时段取为 6 小时(和“观测资料”时段相同), 在  $23 \times 23$  的网格点间均匀地设置  $12 \times 12 = 144$  个“测点”, 可以看到(图 3), 起初四步目标泛函值和其关于控制变量的梯度下降得很快。图 4 只给出了迭代第 12 步  $u'_0, w'_0$  场的东西剖面图。和图 1a、b 比较, 虽然  $w'_0$  场没有观测, 反演的场和原先的场也较为接

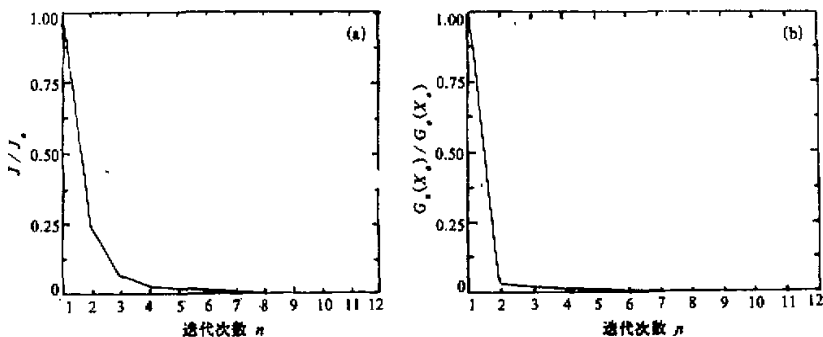


图 3 目标泛函值(a)与目标泛函梯度范数(b)随迭代次数的变化

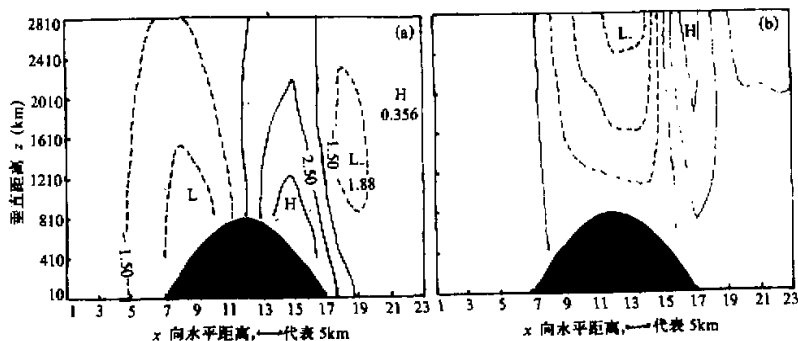


图 4 迭代第 12 步的(a) $u'_0$  场、(b) $w'_0$  场的东西垂直剖面图

近。这是观测站比模式网格点稀疏一倍的结果。

试验 II: 因在反演过程中对基本模式和共轭模式反复积分, 要耗费大量机时, 为以下反演试验方便起见, 我们把分析时段定为 3 小时。迭代起始值都同试验 I。不同的是我们只有模式积分区域的东半区均匀设置了  $6 \times 12$  个均匀分布的“测站”, 并给出了  $u'_0$  场的迭代演变图(图 5)。可以看到, 虽只在模式积分的东半区域设置观测值, 但仍能反演出  $u'_0$  场的空间分布状况, 只是中心值偏低。这说明了在空间区域测站稀疏并且部分区域缺测情况下, 依据基本模式和共轭模式中所包含的动力过程, 只要观测资料中包含有足够的信息, 仍然可以反演出整个场的大致结构(由于  $v'_0$  和  $w'_0$  的反演场和  $u'_0$  的反演质量相同, 因而以下试验也只给出  $u'_0$  的反演图)。

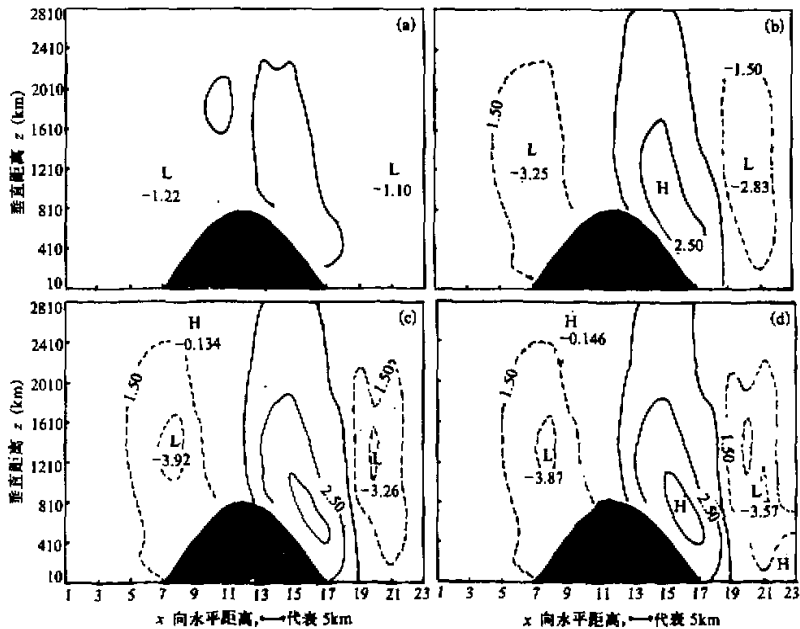


图 5 迭代 (a) 第 3 步, (b) 第 6 步, (c) 第 9 步, (d) 第 12 步的  $u'_0$  场东西垂直剖面演变图

试验 III: 现在把 72 个测站均匀设在模式积分域的西半区域, 即基本气流入流区的方。图 6 也给出了  $u'_0$  场迭代到 12 步的反演结果, 可以看到, 仅仅反演出了山的东侧气流的减弱, 而且强度不够。为什么和试验 II 测站数相同, 但由于测站分布在不同的空间位置, 结果却完全不同呢? 我们认为这是共轭方程反向积分特性引起的。每个时间的观测资料都携带有初始场的信息。共轭方程在逆向积分时, 把从这些“观测资料”中提炼的关于初始场的信息传给了前面时刻的场直到初始场; 从空间上来说, 共轭方程中信息的传播是从东向西传(和基本模式信息传播方向相反)。由于在模式积分域的东部没有“观测站”, 因而没有能够反演出区域要素场的空间结构。这部分区域是现有观测系统和共轭模式“所看不见的部分”, 不曾为反演算子所“照亮”<sup>[8]</sup>。

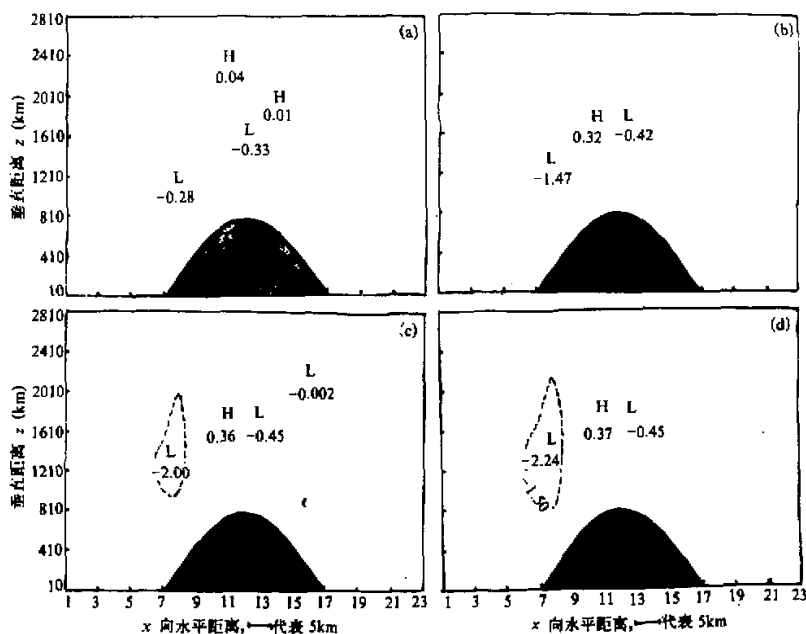


图6 说明同图5

试验 IV: 本试验只有山顶有一个“探空站”, 而地面只有  $12 \times 12$  均匀分布的稀疏“测站”。迭代到 12 步的  $u'_0$  场演变情况 (图 7) 说明, 在整个迭代过程中由于地形引起的垂直输送,  $u'_0$  场的信息自下而上传播。这从数值试验角度证明了顾震潮<sup>[2]</sup>早在 1958 年提出的地面要素场的历史演变与大气初始状态的空间三维结构等价的观点。因而在反演大气空间结构时最好能利用尽可能详细的地面观测资料, 以弥补探空资料的缺乏。例如国内外已进行了很多中尺度大气外场观测试验, 在这些观测研究中, 试验区一般只有二三个系留气球和雷达能探测边界层风速、温度的垂直分布, 其他均是由电接风等仪器探测的风、温地面观测资料。因此用一般的客观分析给中尺度模式提供初始场是非常不准确的。考虑到这些资料的时间密度又较大, 运用本文的方法可望得到一个既和已有观测值比较接近, 又近似满足动力约束的初始场。我们曾用京津冀地区获得的中尺度外场观测资料进行了初步的试验, 效果不错<sup>[9]</sup>。

## 五、结 语

从上面所做的几个试验看, 测站的空间分布愈疏, 则所要反演初值的空间结构也愈差, 这是可以预料的。问题是在现有的只能设置少量测站的情况下, 譬如中尺度外场观测, 如何布点才能使观测值包含的信息最多? 依据本文的数值试验是可以得到一些有益的启示的。我们有如下的一些结论。

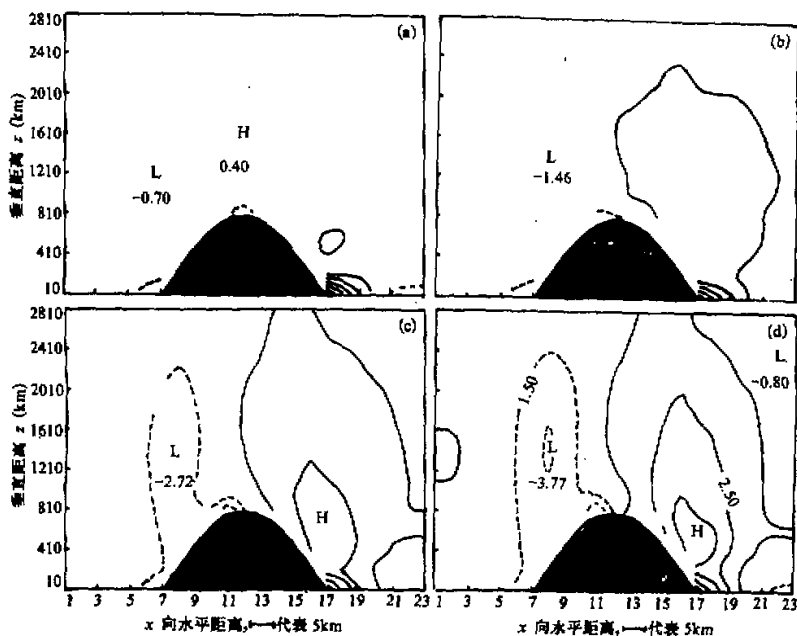


图 7 说明同图 5

(1) 依据基本模式和共轭模式中所包含的动力过程, 本方法在测站稀疏, 甚至部分区域缺测的情况下能够反演出初值的空间结构, 特别是也能反演出没有观测的要素的时空结构。问题是在“测站”设置时要考虑到共轭方程反向积分的性质。

(2) 也可以从地面观测值的时间演变反演出初值场的三维空间结构。只要地面测站尽量地密, 能够在一定程度上弥补由于探空站不足造成的对信息的损失。

(3) 为使计算能够进行下去, 必须减少对模式积分值的贮存量。

共轭方程及最优化技术在气象数值预报及资料分析中的应用必将越来越广泛。因为它通过目标泛函的引入使所有可用的实际信息紧密联系起来, 既能利用已有的物理规律, 又能充分利用各种各样规则或不规则的观测资料, 从而降低了各种不确定性的影响。正是基于上述优点, 使它在实际业务的运用中必将取得丰硕的成果。

### 参 考 文 献

- [1] Talagrand O. and courtier P., 1987, Variational assimilation of meteorological observations with adjoint vorticity equation, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 113, 1311-1328.
- [2] 顾震潮, 1958, 作为初值问题的天气形势数值预报与由天气历史演变作预报的等值性, *气象学报*, 29, No.2, 93-98.
- [3] Beale E.M.L., 1972, *A Derivation of Conjugate Gradients in Numerical Methods for Nonlinear Optimization*, Academic Press, New York, 39-43.
- [4] Powell M.J.D., 1977, Restart procedures for the conjugates gradient, *Math. Prog.*, 12, 241-354.

- [5] 桑建国、温市耕, 1992, 大气扩散的数值计算, 气象出版社, 208-225.
- [6] 邵吉东、丑纪范, 1994, 数值天气预报中的两类反问题及一种数值解法——理想试验, 气象学报, 52, No.2, 129-137.
- [7] Chou Jifan., 1990, International Symposium Assimilation of Observations in Meteorology Oceanography (France), WMO, 16-21.
- [8] 丑纪范, 1986, 长期数值天气预报, 气象出版社, 216-231.
- [9] Pu Zhaoxia and Chou Jifan, 1992, Primary experiment using hourly surface meteorological data and UHF wind of a single station to retrieve the three dimensional structure of atmospheric boundary layer, 3rd PRC / USA Workshop on Meso-scale Meteorology, August 6-8, 1992.

## **A Method for Determining the Spatial Structure of Meteorological Variable from the Temporal Evolution of Observational Data**

Gao Jidong and Chou Jifan

*(Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730001)*

Li Zhijin

*(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)*

### **Abstract**

In this paper, the problem of getting the spatial structure of meteorological variables from the temporal evolution of observational data is put forward as an inverse problem. In order to solve this problem, we use the theory of adjoint equation and optimal control techniques in which the initial fields of the model serve as control variables. The purpose is to solve the problem in getting the rational initial field from insufficient data sets and the problem of large computational task because of using the adjoint equation. A dynamical model and its adjoint model have been adopted to do some numerical experiments. Under the condition of making the algorithm simplified and making the distribution of observational station rational, the numerical results show that the rough structure of meteorological variables can be obtained from the observational data, the number of which is less than the dimension of the dynamical model.

**Key words:** temporal evolution of observational data; optimal control techniques; adjoint equation.