

非均匀网格的过渡湍流理论及其 在大气边界层数值模拟中的应用*

刘小红 洪钟祥

(中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京 100029)

提 要

本文将 Stull 提出的均匀网格下的过渡湍流理论推广到非均匀网格情形, 推广的非均匀网格的过渡湍流理论满足 Stull 提出的对过渡矩阵系数的要求并具有清晰的物理意义。然后, 将非均匀网格的过渡湍流理论应用于一维大气边界层数值模式中, 对 Wangara 资料进行了模拟, 并与均匀网格情形进行了对比。计算表明, 非均匀网格的过渡湍流模式能很好地模拟 Wangara 大气边界层平均量与湍流量的变化; 本文非均匀网格的过渡湍流理论的推广是可行的, 它可能会在大气边界层数值模拟及其他方面(如: 中尺度模式)得到应用。

关键词: 过渡湍流理论; 大气边界层模式; 非均匀网格。

一、引 言

湍流非局地闭合的过渡湍流理论由 Stull 提出并逐渐形成了自己的理论基础及其模拟应用^[1-3], 以作为一种继局地闭合方案(例如 K 理论)和高阶闭合后湍流闭合的新途径。基于过渡湍流理论的思想, Stull 和 Driedonks^[4]又提出了一种以湍能方程为基础的非局地闭合的过渡湍流参数化方案, 并用以模拟了荷兰卡伯(Cabauw)塔附近大气边界层资料, 取得了较好的模拟效果。本文作者^[5]也曾建立了非局地过渡湍流闭合的 PBL 模式, 并较好地模拟了 Wangara 平均场及湍流通量的时空演变。

应该指出的是: Stull 的过渡湍流理论及其参数化方案都是建立在均匀网格的基础上。但是, 在数值模拟中, 使用均匀网格的过渡湍流理论将会有许多局限, 如: 大气边界层模式一般要求在地面附近网格分细些, 而在较高的高度网格可粗一些; 又如: 将过渡湍流理论应用于中尺度模式时, 则由于模式顶较高, 使用均匀网格会造成网格点过多, 增加了模式计算量等。这些都可能限制过渡湍流理论的应用。

针对上述问题, 本文将 Stull 提出的过渡湍流理论及参数化方案^[4]推广到非均匀网格情形, 并应用于大气边界层模式中, 对 Wangara 资料进行了模拟, 通过与实测资料及均匀网格情形下模拟结果的比较, 说明了推广的非均匀网格下过渡湍流理论的可行性。

1994年1月22日收到, 7月4日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

二、非均匀网格的过渡湍流理论

1. 过渡湍流理论的框架

过渡湍流理论认为: 湍流混合不仅发生在相邻二个单元之间, 而且可发生在空间分离的单元之间。设想一个一维气柱, 将它分成 N 个独立的等间距单元, 每个单元中心格点代表这些单元中的平均状况。流体通过湍流混合从其他单元进入基准单元 i 能改变这个单元的温度、湿度、动量、示踪物浓度等状态。例如, 设 $\bar{\xi}_i(t)$ 代表基准单元 i 中无源示踪物的平均浓度, 如果 c_{ij} 表示时间间隔 Δt 内来自单元 j 的空气在单元 i 中占的份额, 根据 Stull 的理论, 经过 Δt 时间混合后单元 i 内的新浓度 $\bar{\xi}_i(t + \Delta t)$ 可用下式表示:

$$\bar{\xi}_i(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^N c_{ij}(t, \Delta t) \bar{\xi}_j(t), \quad (1)$$

该式表示, 当空气从单元 j 混入单元 i 时, 空气输送进来浓度为 $\bar{\xi}_j$ 的示踪物量 c_{ij} 。系数 c_{ij} 代表单元 i 中的空气仍留在其中的份额。 c_{ij} 组成过渡矩阵 $C(N, N)$ 。并且, 对于过渡湍流理论有一些物理和数值约束条件, 如: 过渡矩阵 $C(N, N)$ 的每行元素之和

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} = 1 \quad (\text{对于 } i = 1, \dots, N), \quad (2a)$$

以满足空气质量守恒, 而且过渡矩阵每列元素之和

$$\sum_{i=1}^N c_{ij} = 1 \quad (\text{对于 } j = 1, \dots, N), \quad (2b)$$

以满足示踪物质量守恒。为避免湍流产生“不混合”和熵减少, 矩阵的每个元素 c_{ij} 不允许是负值, 即 $0 \leq c_{ij} \leq 1$ 。在实际数值计算时, 为了减少未知量, 可采用交换假设(exchange hypothesis), 即 $c_{ij} = c_{ji}$, 这样 $C(N, N)$ 是一个对称矩阵。

以上是 Stull 的均匀网格下过渡湍流理论的思想框架。对于非均匀网格情形, 设想一维空气柱分成 N 个独立的非等间距单元(对于任一单元 i , 其厚度 Δz_i), 每个单元中心格点代表这些单元的平均状况, 设 $\bar{\xi}_i(t)$ 代表单元 i 中无源示踪物的平均浓度, 仍定义 c_{ij} 表示时间间隔 Δt 内来自单元 j 的空气在单元 i 中占的份额, 则作者认为(1)式仍然可用以描述 Δt 时间混合后单元 i 内的新浓度 $\bar{\xi}_i(t + \Delta t)$, 注意此时(1)式没有显式表明网格单元厚度的影响, 其作用而是隐含在 c_{ij} 的定义中。在过渡湍流理论的物理和数值约束条件下, 此时为满足空气质量守恒, 即假设初始时刻每个单元有相同的示踪物浓度, 则经过大量混合以后, 任一单元中最后的浓度一定等于最初的浓度: $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_j = \sum_{j=1}^N c_{ij} \bar{\xi}_j$, 即过渡矩阵的元素仍需满足(2a)式。

为满足示踪物质量守恒, 此时过渡矩阵的元素应满足下式:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\Delta z_i}{\Delta z_j} c_{ij} = 1 \quad (\text{对于 } j = 1, \dots, N), \quad (2c)$$

可以这样理解此约束, 设想空气柱中除了 j 单元有示踪物(浓度为 $\bar{\xi}_j$, 示踪物量为

$\bar{\xi}_j \cdot \Delta z_j$, 因为每个单元的水平尺度相等, 故暂不包含于其中) 外, 其他单元中都没有示踪物, 经过 Δt 时间混合后, 其中有一部分示踪物可能被混合进入任一单元或所有其他单元, 混合后任一单元 i 中示踪物浓度 $\bar{\xi}_i$, 其质量为 $\bar{\xi}_i \cdot \Delta z_i$, 如果(1)式表示混合成立的话, 则 $\bar{\xi}_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \bar{\xi}_j = c_{ij} \bar{\xi}_j$, i 单元示踪物质量为 $c_{ij} \bar{\xi}_j \Delta z_i$, 根据混合前后示踪物总量应相等, 则 $\sum_{i=1}^N c_{ij} \bar{\xi}_j \Delta z_i = \bar{\xi}_j \Delta z_j$, 化简后即式为(2c)。同样 $0 \leq c_{ij} \leq 1$; 在相同的湍流混合的物理条件下, 此时由于每个单元的厚度不同, 均匀网格下的交换假设不再成立, 即 $c_{ij} \neq c_{ji}$, 它们的关系将在后面叙述。

2. 过渡系数 c_{ij} 的闭合参数化

正如其他的湍流闭合方案一样, 同样也必须对过渡系数 c_{ij} 进行参数化设计。一般过渡湍流理论在数值计算中采用响应(responsive)湍流闭合方案。Stull^[1]使用 i, j 二点的非局地 Richardson 数 r_{ij} 来参数化 c_{ij} , 但后来发现在一些近零风切变区, Richardson 数的量级会达到无穷大, 从而可造成 c_{ij} 没定义。Stull 等^[4]又建立了以非局地湍能(TKE)方程为基础的闭合方案: 定义格点 i 和 j 之间无量纲混合势 Y_{ij} ($i \neq j$), Y_{ii} 为网格单元 i 内次网格混合势, Y_{ij} 组成混合势矩阵 $Y(N, N)$, 采用交换假设, $Y_{ij} = Y_{ji}$, 则 $Y(N, N)$ 是一对称矩阵。

定义过渡系数 c_{ij} :

$$c_{ij} = Y_{ij} / \|Y\| \quad (i \neq j), \quad (3a)$$

式中 $\|Y\|$ 为矩阵 Y 的标量范数, 并有

$$c_{ii} = 1 - \sum_{j=1}^N c_{ij}, \quad (3b)$$

这里已使用了前面讨论的物理约束(见式(2a))。

Y_{ij} ($i \neq j$) 的参数化建立在非局地的 TKE 方程的基础上,

$$Y_{ij} = T_0 \Delta t \left[\frac{1}{(z_i - z_j)^2} \{ (\bar{u}_i - \bar{u}_j)^2 + (\bar{v}_i - \bar{v}_j)^2 \} - \frac{g}{R_c \times 0.5 \times (\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j)} \left(\frac{\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_j}{z_i - z_j} \right) \right] - \frac{D}{T_0} \Delta t, \quad (i \neq j) \quad (4a)$$

$$Y_{ii} = \max(Y_{i,i-1}, Y_{i,i+1}) + Y_{\text{REF}}. \quad (4b)$$

如果混合势矩阵的每一行都求和, 其标量范数就取其等于最大和的集, 即

$$\|Y\| = \max_i \left[\sum_{j=1}^N Y_{ij} \right]. \quad (5)$$

这样, 整个参数化方案变成如下 4 个参数的给定: 湍流时间尺度 T_0 、临界 Richardson 数 R_{ic} 、无量纲耗散因子 D 和次网格参考混合势 Y_{REF} 。

另外, 由下式可求出网格单元之间界面上的湍流量 F_k ($= \overline{w' \xi'}$):

$$F_k = F_{k-1} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right) \sum_{j=1}^N c_{kj} (\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_j) \quad \text{和} \quad F_0 = 0, \quad (6)$$

Δz 是均匀网格下网格单元的厚度。

以上是 Stull 等^[4]的均匀网格下过渡系数的参数化方案。对于非均匀网格情形, 我们认为仍可以用(4)式来描述格点 i 和 j 之间的混合势, 注意此时格点 i, j 的 $z_i, z_j, \bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j$ 等都是分别定义在非均匀网格单元 i 和 j 的中心位置, 因为混合势 Y_{ij} 代表格点 i 和 j 之间混合的趋势, 它取决于气流不稳定, 即空间二格点状态量的差异, 所以这有助于理解将(4)式推广到非均匀网格情形, 而没有直接包含二个网格单元厚度不同的影响。此时混合势矩阵仍满足 $Y_{ij} = Y_{ji}$, 但 c_{ij} 的定义为

$$c_{ij} = \frac{Y_{ij} \cdot \Delta z_j}{\|Y'\|} \quad (i \neq j), \quad (7a)$$

和

$$c_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}, \quad (7b)$$

此处 $\|Y'\| = \max[\sum_{j=1}^N Y_{ij} \Delta z_j]$, c_{ii} 仍利用了非均匀网格下空气质量守恒的约束条件。(7)

式中 c_{ij} 表示了单元 j 的空气对单元 i 影响的份额, 因此应与单元 j 的厚度有关, 故(7a)包含了单元 j 的厚度 Δz_j 。

将(7a)、(7b)代入(2c)式, 利用 $Y_{ij} = Y_{ji}$, 则(2c)式成立, 即(7)式定义的 c_{ij} 恰好满足非均匀网格示踪物质质量守恒的约束, 且 c_{ij} 满足 $0 \leq c_{ij} \leq 1$ 。根据(7)式, 当不发生湍流混合时, $Y_{ij} = 0, c_{ij} = 0 (i \neq j), c_{ii} = 1$, 这也符合 c_{ij} 的物理意义。在(7)式定义的 c_{ij} 下, 有

$$c_{ij} \cdot \Delta z_i = c_{ji} \cdot \Delta z_j \quad (i \neq j), \quad (8)$$

即此时过渡矩阵 $C(N, N)$ 是非对称矩阵, 且其元素之间满足(8)式。

另外, 根据公式推导, (6)式仍可用于求解网格界面上的湍流通量, 但(6)式中 Δz 此时应为 Δz_k , 即上下二个网格界面的高度差。

以上给出了非均匀网格下过渡湍流理论及参数化方案, 下面将其应用于一维大气边界层数值模拟中, 并与均匀网格情形下的模拟结果进行了对比检验, 说明了本文的推广是可行的, 并可能会在大气边界层数值模拟及其他方面得到应用。

三、模拟检验及其应用

1. 过渡湍流边界层模式的建立

将上述非均匀网格的过渡湍流理论应用于一维大气边界层数值模拟中, 建立了非均匀网格的过渡湍流边界层模式。在数值计算中, 过渡湍流模式采用“响应”的概念^[4], 即每一时步分成两部分: 首先, 外力 (如: 非湍流动力学、热力学、边界条件等) 破坏流

体稳定性。有关的平均流场的运动方程的差分形式为

$$\bar{u}_i^*(t + \Delta t) = \bar{u}_i(t) + \Delta t[f(\bar{v}_i(t) - \bar{v}_{gi})] - \delta_{1i} \frac{\Delta t}{\Delta z_1} \overline{u'w'_s}(t), \quad (9a)$$

$$\bar{v}_i^*(t + \Delta t) = \bar{v}_i(t) - \Delta t[f(\bar{u}_i(t) - \bar{u}_{gi})] - \delta_{1i} \frac{\Delta t}{\Delta z_1} \overline{v'w'_s}(t), \quad (9b)$$

$$\bar{\theta}_i^*(t + \Delta t) = \bar{\theta}_i(t) - \delta_{1i} \frac{\Delta t}{\Delta z_1} \overline{\theta'w'_s}(t), \quad (9c)$$

$$\bar{q}_i^*(t + \Delta t) = \bar{q}_i(t) - \delta_{1i} \frac{\Delta t}{\Delta z_1} \overline{q'w'_s}(t), \quad (9d)$$

式中 $\overline{u'w'_s}$ 、 $\overline{v'w'_s}$ 、 $\overline{\theta'w'_s}$ 和 $\overline{q'w'_s}$ 分别表示地面动量通量(u 、 v 方向)、热通量及水汽通量, 它们仅影响最底层网格值。第二步, 过渡湍流通过上节所述的混合响应以上平均流场的不稳定。

运用建立的一维过渡湍流边界层模式对 Wangara 第 33—34 天进行了 24 小时的模拟, 初始场选择第 33 天的 09:00 资料, 边界条件及地转风的给出已在文献[5]中叙述。过渡参数取值如下: $T_0 = 1000$ s (白天), $T_0 = 100$ s (夜间), $Ri_c = 0.21$, $D = 1.0$, $Y_{REF} = 1000$ 。

2. 与均匀网格下过渡湍流模式结果的对比检验

文献[5]已利用均匀网格的过渡湍流边界层模式对相同的资料进行了模拟, 并取得了较满意的模拟效果, 在均匀网格模式中, 垂直方向分成 20 个网格, $\Delta z = 100$ m, $\Delta t = 10$ min。注意到(9)式中作为边界条件的地表通量仅影响最底层网格值 (还与 $\Delta t / \Delta z_1$ 有关), 所以为了在相同的边界条件下与均匀网格下的模拟结果进行比较, 在非均匀网格模式中, Δz_1 也取 100 m, 其上的网格取为 $\Delta z_i = m\Delta z_{i-1}$ ($m > 1$), $\Delta t = 10$ min。

取 $m = 1.1$, 则在 2 km 范围内有 12 个网格点, 网格点高度分别为 (单位: m) 50, 155, 270.5, 397.5, 537.3, 691.0, 860.1, 1046.2, 1250.8, 1475.8, 1723.4, 1995.8。

图 1 给出非均匀网格下计算的白天位温(a)、实测位温(b)及计算的热通量(c)的变化。模拟结果能很好地反映实测位温的演变, 计算的热通量也能很好地反映对流边界层的性质, 并与 Andre 等^[6]对相同的资料采用三阶矩模式模拟的结果很一致。与文献[5]均匀网格下计算的白天位温及热通量的变化相比较, 两种网格下模拟出的位温变化曲线是基本重合的, 且热通量变化也很接近, 这都说明了本文推广的非均匀网格的过渡湍流理论的可行性。

图 2 给出非均匀网格下计算的白天水汽量(a)、实测水汽量(b)及计算的水汽通量(c)的变化。同位温场一样, 计算结果能很好地模拟实测水汽的变化, 在对流边界层顶部计算值稍高于实测值, 这可能是因为模式忽略了平流作用及垂直速度的影响。模拟的水汽通量同 Andre 等^[6]及均匀网格下的结果^[5]是比较一致的。

图 3、图 4 给出了非均匀网格及均匀网格下计算的白天和夜间风速的变化。由图可知: 除了边界层顶部以上外, 二种网格下模拟的风速变化很接近, 从而都能较好地反映

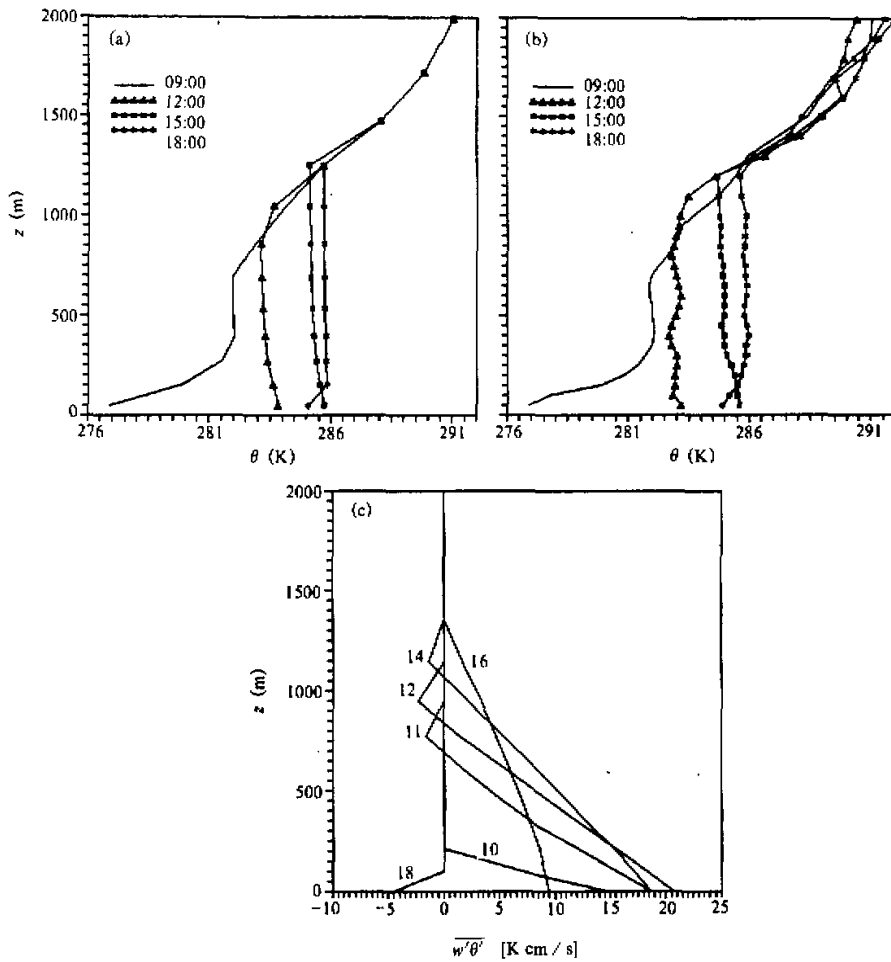


图 1 非均匀网格下计算的白天位温(a)、实测位温(b)及计算的热通量(c)的变化

实际白天对流边界层及夜间稳定边界层风速的演变。在边界层顶部之上,由于非均匀网格的厚度逐渐增加,网格点趋疏,二种网格下的结果会有差别。

图 5 给出非均匀网格下计算的动量通量 $\overline{u'w'}$ (a) 和 $\overline{v'w'}$ (b) 的时空变化,它与均匀网格下模拟的结果^[5]是很接近的。

本文还选取了其他一些网格作了试验,如取 $m=1.15$,此时 2 km 范围内只有 10 个网格点,同样计算结果能较好地模拟出实际大气边界层的演变。但应该指出的是,由于此时边界层上部格点较稀,会无法反映边界层顶部平均状态量及通量较明显的变化,这要在数值模拟的网格选取时加以注意。

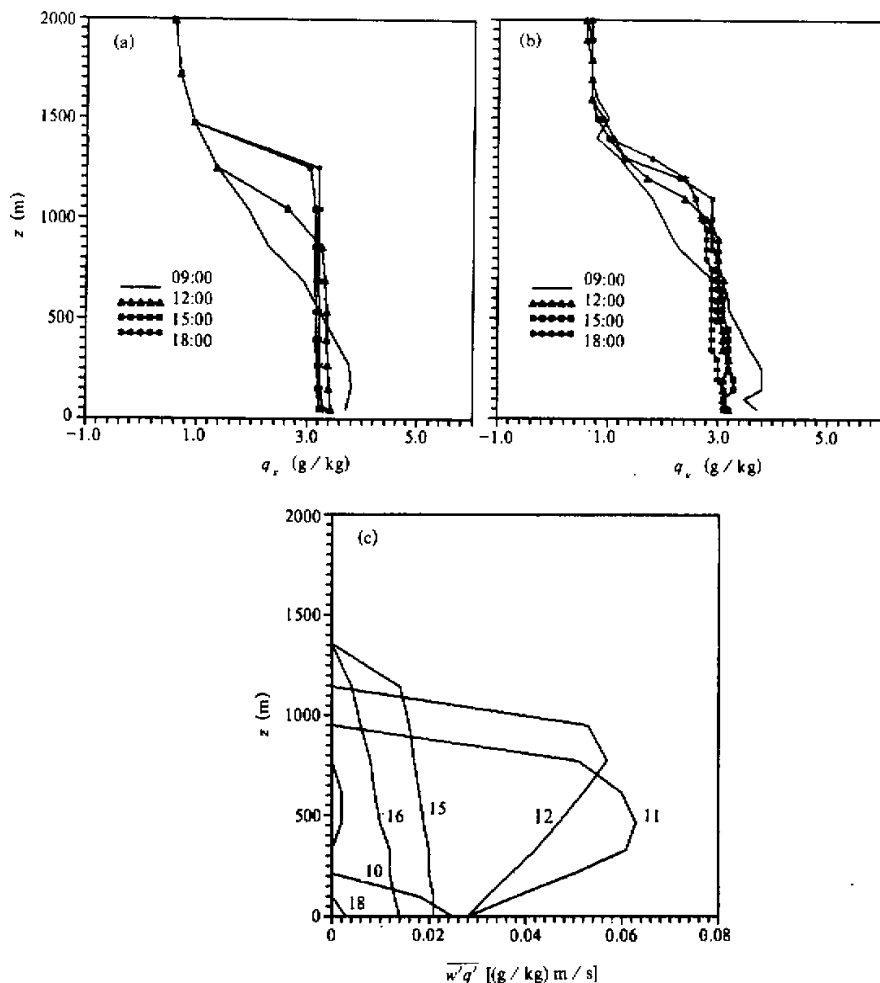


图2 非均匀网格下计算的白天比湿(a)、实测值(b)及计算的水汽通量(c)的变化

3. 模拟应用及讨论

本文对均匀网格下过渡湍流理论的推广, 旨使该理论能在中尺度模式及其他模拟方面有更广泛的应用。例如: 为了满足中尺度模拟的需要, 一般要求在边界层内格点不可能太多, 时间步长在数分钟以上。这里选择了以下网格: $\Delta z_1 = 50 \text{ m}$, $\Delta z_2 = 100 \text{ m}$, $\Delta z_i = 1.2 \Delta z_{i-1}$ ($i \geq 3$), $\Delta t = 5 \text{ min}$ 。在 2 km 范围内有 10 个格点, 其高度分别为 (单位: m) 25, 100, 210, 342, 500.4, 690.5, 918.6, 1192.3, 1520.7, 1914.9。

图 6、图 7 分别给出了模拟的位温、水汽量及风速的变化。与前图比较可以看出,

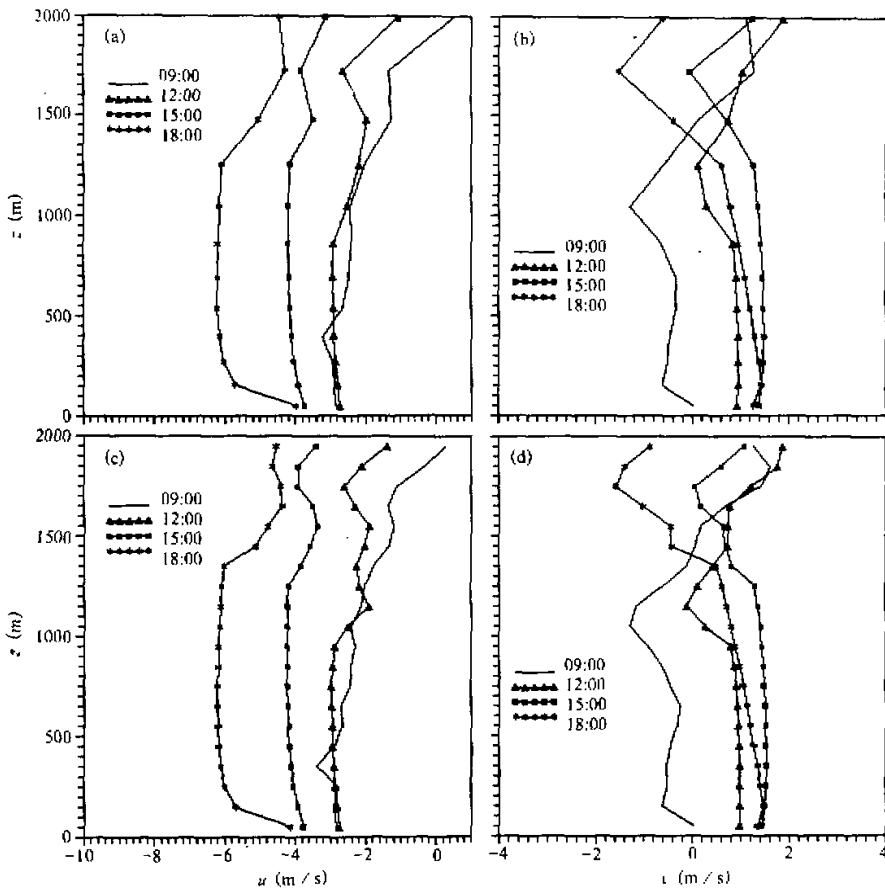


图3 非均匀网格下计算的白天东西向风速 u (a)、南北向风速 v (b) 及均匀网格下计算的 u (c)、 v (d) 的变化

本计算结果同样能较好地模拟各实测量的演变，并且计算的各湍流通量也能较好地反映大气边界层的性质。因此，将本文非均匀网格的过渡湍流理论应用于中尺度模式中是可行的。

模拟试验中还发现，过渡湍流参数化方案在实现过程中还有许多局限性。例如：本过渡湍流的边界层模式原则上能适用于任意的非均匀网格，但由于“去稳作用”(destabilization)，即由于过渡湍流模式采用“响应”的概念，每一时步分成二个步骤：首先是外力使流体产生不稳定，在对流边界层中地表热通量作为边界条件作用于最底层网格(见(9)式)，即能量积累在该层产生流体不稳定；然后，第二步是过渡湍流通过混合响应这种不稳定。这种分步近似无法精确地描述实际大气中“去稳”和“使稳定”二个连续的过程，所以如果 Δz_1 太小的话，对于相同的地表热通量则会使最底层网格内能量过份

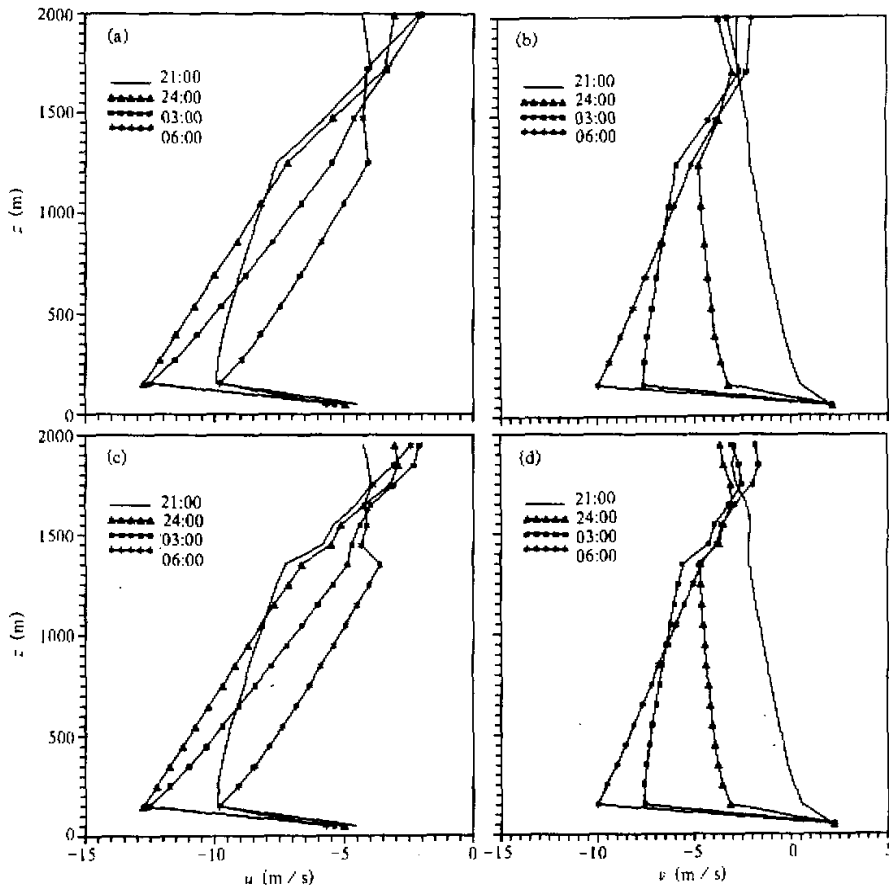


图4 非均匀网格下计算的夜间东西向风速 u (a)、南北向风速 v (b) 及均匀网格下计算的 u (c)、 v (d) 的变化

积累(注意(9c)式右边第二项与 $\Delta t / \Delta z_1$ 有关), 造成该层的位温增加, 从而过渡湍流响应这种不稳定造成对流边界层高度和顶部的夹卷不合实际的增大, 此时只有减少 Δt , 以使最底层积累的能量在更短的时间内向上释放, 才能反映实际大气边界层过程。Stull等^[4]提出均匀网格下应有 $\Delta z / \Delta t > 0.1 \text{ m/s}$, 在本文非均匀网格下应为 $\Delta z_1 / \Delta t > 0.1 \text{ m/s}$ 。所以 Δz_1 不能太小, 否则造成 Δt 减少会增加计算量, 因此在数值模拟中应适当地选取 Δz_1 和 Δt 。

四、结 语

本文将 Stull 提出的均匀网格的过渡湍流理论及闭合参数化方案推广到非均匀网格情形, 并应用于实际大气边界层数值模式中, 对 Wangara 资料进行了模拟, 并与均匀

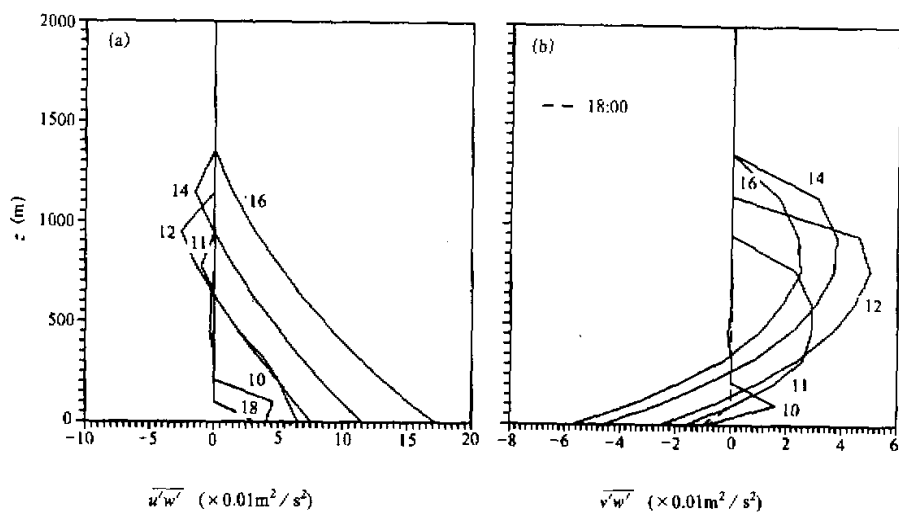


图 5 非均匀网格下计算的动量通量 $\overline{u'w'}$ (a) 和 $\overline{v'w'}$ (b)

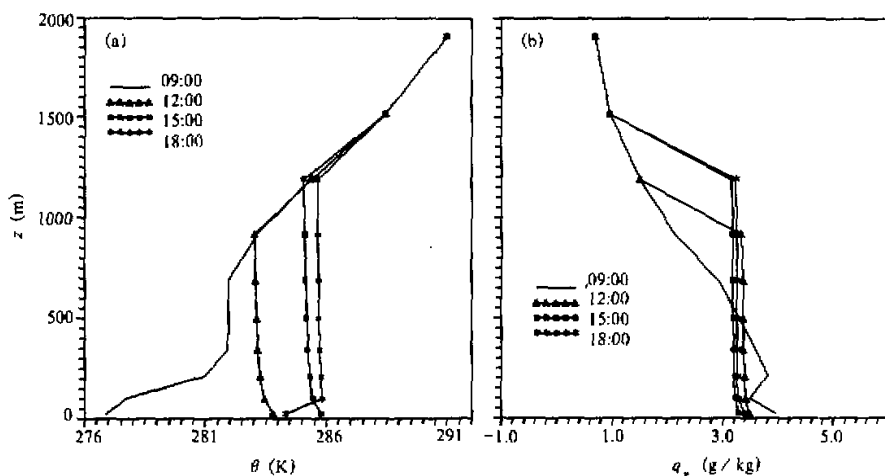


图 6 计算的白天位温 (a) 及比湿 (b) 的变化

网格情形下的模拟结果进行了对比。计算结果表明:

(1) 本文非均匀网格的过渡湍流边界层模式能很好地模拟 Wangara 平均量及湍流量的变化。

(2) 非均匀网格的过渡湍流理论的推广是可行的, 并可能在中尺度模式及其他模拟中得到应用。

过渡湍流理论及参数化方案作为一种湍流闭合的新途径, 尚有许多不完善之处, 除

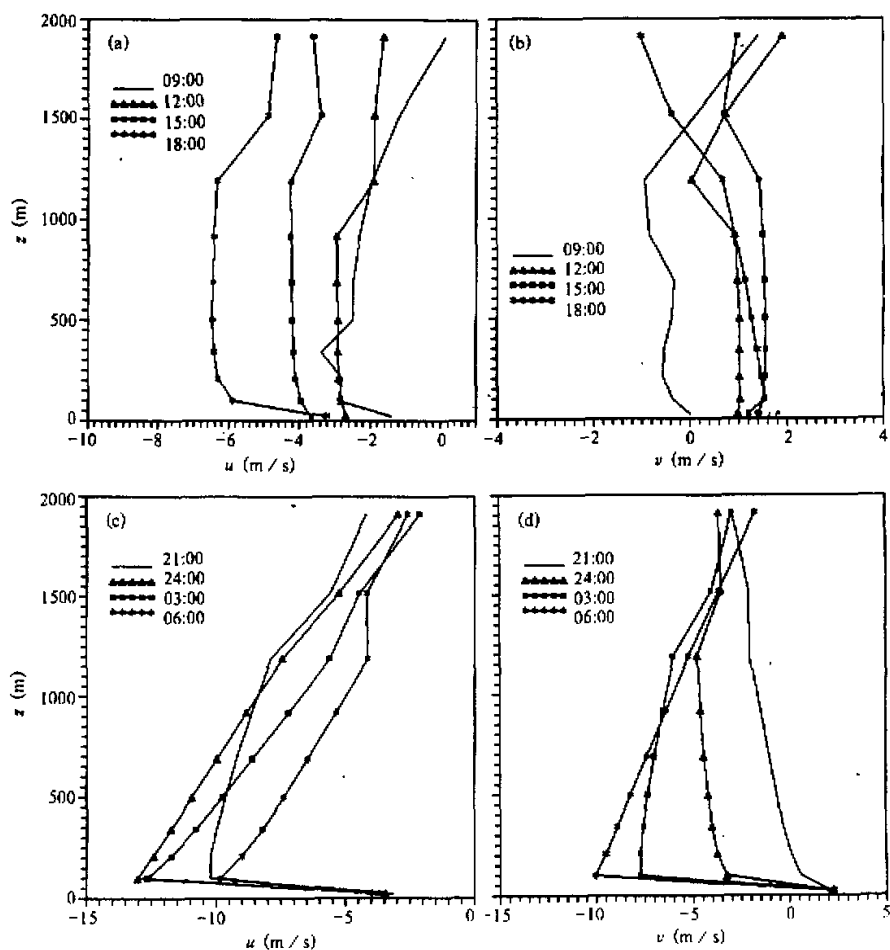


图 7 计算的白天 u 分量(a)、 v 分量(b)及夜间 u 分量(c)、 v 分量(d)

了上述“去稳作用”外, 过渡系数 c_{ij} 的参数化是否合理; 为减少自由度而引入的交换假设: $c_{ij} = c_{ji}$ (均匀网格)的适用性等。因此, 在本工作的基础上, 可对该理论进行进一步探讨, 并通过与实测资料的对比检验, 使其得到完善和发展。

参 考 文 献

- [1] Stull, R.B., 1984, Transient turbulence theory, Part I: The concept of eddy mixing across finite distances, *J. Atmos. Sci.*, **41**, 3351-3367.
- [2] Stull, R.B. and Hasegawa, T., 1984, Transient turbulence theory, Part II: Turbulent adjustment, *J. Atmos. Sci.*, **41**, 3368-3379.
- [3] Stull, R.B., 1986, Transient turbulence theory. Part III: Bulk dispersion rate and numerical stability, *J. Atmos.*

- Sci.*, **43**, 50–57.
- [4] Stull, R.B. and Driedonks, A.G.M., 1987, Applications of the transilient turbulence parameterization to atmospheric boundary-layer simulations, *Boundary-Layer Meteorology*, **40**, 209–239.
- [5] 刘小红、洪钟祥, 1994, 非局地过渡湍流闭合的 PBL 模式及其 Wangara 大气边界层资料的模拟, 南京大学学报-庆祝朱炳海教授从事气象教育工作五十周年专辑, 202–208.
- [6] Andre, J.C. et al., 1978, Modeling the 24h evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1861–1883.

Transilient Turbulence Theory for Unevenly-spaced Grids and Its Applications to the Modeling of Atmospheric Boundary Layer

Liu Xiaohong and Hong Zhongxiang

(LAPC, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract

In this paper, the transilient turbulence theory and the parameterization of turbulent closure developed by Stull are extended to the case for nonequally spaced grids. Then a 1-D atmospheric boundary layer model including the non-local transilient turbulent closure with nonequally spaced vertical grid arrangement is used to simulate the Wangara data of 24 hours. In comparison with the modeling results with equal-size grid points, our numerical results can well simulate the spatial and temporal changes of Wangara data of wind, potential temperature, water vapor and turbulent kinematic flux. The extension of the transilient turbulence theory is proper and may have broader applications to atmospheric boundary layer modeling and other models (for example, meso-scale models).

Key words: transilient turbulence theory; atmospheric boundary layer modeling; unevenly-spaced grids.