

西太平洋副热带高压非线性 稳定性问题的研究*

张 韧 史汉生 喻世华

(空军气象学院, 南京 211101)

提 要

本文采用了包含热力强迫和涡动耗散的三维非线性动力学模式, 从系统稳定性的角度出发, 探讨了夏季东亚副热带地区的环流状况, 东亚大陆季风雨带和南海季风槽雨带的凝结加热以及扰动流的相互作用等因素对西太平洋副热带高压进退的制约和影响。给出了反映系统稳定性状况的能量判据, 并据此进行了动力学分析和模式大气的计算。研究结果为一些天气分析事实提供了动力学解释, 得到了一些新的见解, 并为判断和预测西太平洋副热带高压在东亚上空的活动提供了参考依据。

关键词: 西太平洋; 副热带高压; 非线性稳定性; 能量判据; 热力环流作用。

一、引 言

西太平洋副热带高压(下称西太副高)是东亚夏季风环流系统的重要成员, 它的活动对东亚地区夏季天气有重大影响。有关副高活动的研究历来受到气象工作者的关注与重视, 通常人们总是把副高的季节性跳动以及季节内进退与东亚大陆雨带的变化联系在一起, 并把前者作为后者的原因, 后者作为前者的结果。的确, 西太副高对东亚大陆雨带的作用无疑是重要的, 但是否仅是副高决定雨带这么单一的一种关系呢?近年来, 一些观测事实^[1]、诊断研究^[2]和数值模拟^[3]对此提出了不同看法。它们论证了西太副高与东亚雨带之间并非前者制约后者这样的简单关系, 而是在一定环流背景条件下, 热带西南季风气流涌入东亚大陆造成大陆雨带, 雨带凝结加热支持一向南运行的次级辐散环流, 与源自南海至西太平洋 ITCZ 区向北运行的 Hadley 环流, 两者在东亚副热带大陆上空汇合成一支下沉辐散气流, 诱导副高西伸, 副高的西伸先是促使雨带加强和向西发展, 随着副高进一步伸入大陆, 又将切断热带西南季风气流进入大陆, 导致大陆雨带减弱乃至消失, 副高随之退出大陆。可见, 西太副高与东亚雨带之间是一种彼此相互作用与制约的关系。上述研究均提出和强调了雨带的热力强迫作用和东亚环流的背景作用对副高活动的制约和影响, 但这种影响作用过程的物理机制和动力学意义尚不清楚, 为此本文作了进一步的理论分析和探讨。

1993年4月19日收到, 1995年2月25日收到三改稿。

*国家自然科学基金资助项目。

二、数学模式

选取 25°N 为中心纬度, 南海季风槽雨带(南雨带)和东亚大陆季风雨带(北雨带)分别为南、北边界, 以这特定的东亚副热带纬带范围作为研究区域, 引入包含热力强迫和水平涡动扩散的三维动力学控制方程组

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)u - fv = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + k_h \nabla^2 u, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)v + fu = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} + k_h \nabla^2 v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \sigma_s \omega = -\frac{RQ}{c_p p}, \quad (4)$$

式中 k_h 为水平涡动扩散系数, σ_s 为静力稳定度参数, Q 为热力强迫项。

由(1)–(3)式经尺度分析取第一近似的涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta + \beta v = f\frac{\partial\omega}{\partial p} + k_h \nabla^2 \zeta. \quad (5)$$

取 $u = \bar{u}(y, p) + u'$, $\Phi = \bar{\Phi}(y, p) + \Phi'$, $v = v'$, $\omega = \omega'$ 代入(5)式和(4)式, 得到扰动涡度方程和热力方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta' + v'\left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) + \left(u'\frac{\partial}{\partial x} + v'\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta' = f\frac{\partial\omega'}{\partial p} + k_h \nabla^2 \zeta', \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\Phi'}{\partial p} + \left(u'\frac{\partial}{\partial x} + v'\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi'}{\partial p} - f v'\frac{\partial\bar{u}}{\partial p} + \sigma_s \omega' = -\frac{RQ'}{c_p p}, \quad (7)$$

其中 $\zeta' = \partial v' / \partial x - \partial u' / \partial y$ 为扰动涡度, (7)式中已取了地转近似 $\bar{u} = -(1/f)\partial\bar{\Phi} / \partial y$ 。在本模式中近似取 $f = f_0(25^{\circ}\text{N})$ 。引用准无辐散近似 $u' = -\partial\psi' / \partial y$, $v' = \partial\psi' / \partial x$, ψ' 为扰动流函数, 则 $\zeta' = \nabla^2 \psi'$ 。对于我们所讨论地区(25°N 附近)的大尺度运动, 可近似取 $\Phi' \approx f_0 \psi'$ [4]。

将上述近似关系代入(6)、(7)两式即得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 \psi' + \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x} + J(\psi', \nabla^2 \psi') = f_0 \frac{\partial\omega'}{\partial p} + k_h \nabla^4 \psi', \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p} + J(\psi', \frac{\partial\psi'}{\partial p}) - \frac{\partial\psi'}{\partial x} \frac{\partial\bar{u}}{\partial p} = -\frac{1}{f_0} \left(\sigma_s \omega' + \frac{RQ'}{c_p p}\right). \quad (9)$$

采用常用的垂直两层模式(如图 1)对(8)、(9)两式中的垂直变化进行差分离散, 方程(8)放在第 1(700 hPa)、第 3(300 hPa)两层, 方程(9)放在第 2(500 hPa)层, 进行相应的差分运算和常用的差分近似处理。热力强迫则采用 Charney 等 [5] 的积云对流参数化方案 $Q' = -(L\eta^* / 2\Delta p)(\bar{q}_{es1} - \bar{q}_{es3})\omega'_2$, 则得到动力模式的控制方程组为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi_1 + \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + J(\psi_1, \nabla^2 \psi_1) = -\frac{f_0 \omega_2}{2\Delta p} + k_h \nabla^4 \psi_1, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi_3 + \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + J(\psi_3, \nabla^2 \psi_3) = \frac{f_0 \omega_2}{2\Delta p} + k_h \nabla^4 \psi_3, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1 - \psi_3) + \frac{1}{2}(\bar{u}_1 + \bar{u}_3) \frac{\partial}{\partial x}(\psi_1 - \psi_3) - \frac{1}{2}(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \frac{\partial}{\partial x}(\psi_1 + \psi_3) \\ + \frac{1}{2}J(\psi_1 + \psi_3, \psi_1 - \psi_3) = -\frac{2\Delta p}{f_0}(\sigma_s - \lambda\eta^*)_2 \omega_2, \end{aligned} \quad (12)$$

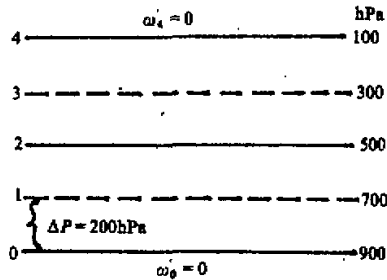


图 1 垂直两层模式

式中为方便起见, 已略去了扰动量的撇号, 且 $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(y)$, $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(y)$, $(\sigma_s - \lambda\eta^*)_2 = (\sigma_s - \lambda\eta^*)_2(y)$, $\lambda = (RL/2\Delta p c_p p)(\bar{q}_{es1} - \bar{q}_{es3})$, η^* 为无量纲加热幅度参数。脚标 1, 2, 3 分别代表 700, 500, 300 hPa 层次序号, 其余符号为常用。

边界条件: y 方向以南、北雨带为边界取固壁条件, x 方向则满足周期边值条件。

三、总扰动能量的变分问题——能量判据

对应于模式方程组(10), (11), (12)式总扰动能量的平衡方程为

$$\frac{dE}{dt} = -k_h D_E + P_E, \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \langle |\nabla \psi_1|^2 + |\nabla \psi_3|^2 + 0.25 \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^2 \sigma(y) |\psi_1 - \psi_3|^2 \rangle, \\ D_E &= \langle |\nabla^2 \psi_1|^2 + |\nabla^2 \psi_3|^2 \rangle, \\ P_E &= \langle \bar{u}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \rangle + \langle \bar{u}_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \rangle + \frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^2 \langle \sigma(y) (\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \\ &\quad (\psi_1 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} - \psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}) \rangle - \frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^2 \langle \sigma(y) J(\psi_1 + \psi_3, \psi_1 - \psi_3) (\psi_1 - \psi_3) \rangle, \end{aligned}$$

$\langle \cdot \rangle = \iint_{\Omega} \cdot dx dy$, $\Omega = L_x \cdot [-L, L]$, L_x 为 x 方向的一个波长, L 为以 25°N 为中心, y 方向的南北边界半径。

热力因子 $\sigma(y) = 1 / (\sigma_s - \lambda \eta^*)_2(y)$, 一般来说, 南北雨带处的加热作用显著 ($\sigma(y_1)$, $\sigma(y_3)$ 较大), 而两雨带之间的研究区域则加热作用较弱 ($\sigma(y_2)$ 较小)。

总扰动能量平衡方程(13)中的各项意义为:

E ——单位质量总扰动能量, 其中第一部分为扰动动能, 第二部分为 700—300 hPa 间厚度层的扰动有效位能。

D_E ——能量耗散项, 主要为涡动扩散作用所致。

P_E ——能量产生项, 第一部分为纬向基本流与扰动流之间的相互作用, 主要用于扰动动能的转化和产生。第二部分与热力因子有关, 主要用于有效位能的生长。

由(13)式可知, 当 $P_E > k_h D_E$ 时, 则 $dE/dt > 0$, 扰动总能量随时间增长以供应扰动运动的发展和系统有效位能的增加。一般情况下, P_E 产生的扰动总能量中扰动动能所占的比例是很小的, 主要部分, 尤其是与热力作用和斜压性有关项产生的扰动能量主要用于系统有效位能的增加^[4]。而大气有效位能的生长在天气学上意味着所在区域位势高度场的抬升, 从而表现为有高压系统发展或增强, 此时利于西太副高向此区域西伸或该区域原有的副高易于维持。相反, 若 $P_E < k_h D_E$, 则 $dE/dt < 0$, 相当程度上表现为有效位能衰减或转化为其他能量, 从而位势高度场下降, 表现为原有的副高系统减弱甚至出现低值系统, 此时西太副高不易西伸或不易在该区域维持。

模式中这种扰动总能量的增长与衰减过程反映了西太副高在该区域的活动, 故有必要对此机制作进一步的动力学分析。记

$$P_E = P_E^* + P_E^{**}$$

式中

$$\begin{aligned} P_E^* &= \langle \bar{u}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \rangle + \langle \bar{u}_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \langle \sigma(y) (\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} - \psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \rangle, \\ P_E^{**} &= -\frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \langle \sigma(y) J(\psi_1 + \psi_3, \psi_1 - \psi_3) (\psi_1 - \psi_3) \rangle \end{aligned}$$

P_E^{**} 具有如下的性质:

(1) 若 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, 即如果南、北雨带及其之间区域无热力作用差异时, 则 $P_E^{**} \equiv 0$ 。

(2) 若沿经向存在热力作用差异时, 则

$$|P_E^{**}| \leq \frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \langle |J(\psi_1 + \psi_3, \psi_1 - \psi_3)| \cdot |\psi_1 - \psi_3| \rangle.$$

下面, 我们分两步对能量产生项 P_E^* 和 P_E^{**} 分别进行处理, 先考虑一些辅助特征值问题, 继而用一个嵌入定理来处理 P_E^{**} , 利用这些结果推导得一微分不等式, 最后给出系统稳定性的能量判据及扰动能量的衰减估计式。

1. 辅助特征值问题

$$(a) k_{h,E}^* = \max(P_E^* / D_E)$$

考虑特征值问题

$$\frac{1}{\mu} = \frac{P_E^*}{D_E} \quad \text{即} \quad \delta(D_E - \mu P_E^*) = 0, \quad (14)$$

其中 δ 为变分符号, (14) 式相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} 2 \nabla^4 \psi_1 - \mu \left[-\bar{u}''_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - 2\bar{u}'_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \sigma(y)(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right] = 0, \\ 2 \nabla^4 \psi_3 - \mu \left[-\bar{u}''_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} - 2\bar{u}'_3 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y} - \frac{1}{8} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \sigma(y)(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] = 0, \end{cases} \quad (15)$$

设波动解 $\psi_1 = \varphi_1(y) \exp[ik(x - ct)]$, $\psi_3 = \varphi_3(y) \exp[ik(x - ct)]$ 代入 (15) 式得

$$\begin{cases} \varphi_1'''' - 2k^2 \left(\varphi_1'' - \frac{i\mu}{2k} \bar{u}'_1 \varphi_1' - \frac{i\mu}{4k} \bar{u}''_1 \varphi_1 \right) + k^4 \varphi_1 \\ \quad - \frac{ik}{16} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \mu \sigma(y)(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \varphi_3 = 0, \\ \varphi_3'''' - 2k^2 \left(\varphi_3'' - \frac{i\mu}{2k} \bar{u}'_3 \varphi_3' - \frac{i\mu}{4k} \bar{u}''_3 \varphi_3 \right) + k^4 \varphi_3 \\ \quad + \frac{ik}{16} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \mu \sigma(y)(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \varphi_1 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

下面用两种不同的方法来估计特征值 μ , 第一种方法: 作变换 $\varphi_1 = \exp(i\mu \bar{u}'_1 / 4k) \hat{\Phi}_1$, $\varphi_3 = \exp(i\mu \bar{u}'_3 / 4k) \hat{\Phi}_3$, 将其代入 (16) 式, 然后做如下运算:

$$\int_{-L}^L (16)(1) \cdot \hat{\Phi}_1^* \exp\left(-\frac{i\mu \bar{u}'_1}{4k}\right) dy + \int_{-L}^L (16)(2) \cdot \hat{\Phi}_3^* \exp\left(-\frac{i\mu \bar{u}'_3}{4k}\right) dy$$

推得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1,3} (I_{2,j}^2 + 2k^2 w_{1,j}^2 + k^4 w_{0,j}^2) - \frac{\mu^2}{8} \int_{-L}^L [(\bar{u}'_1)^2 |\hat{\Phi}_1|^2 + (\bar{u}'_3)^2 |\hat{\Phi}_3|^2] dy \\ & - \frac{\mu}{8} k \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right)^2 \int_{-L}^L \sigma(y)(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) I_m(\varphi_1 \varphi_3^*) dy = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $I_{i,j}^2 = \int_{-L}^L \left| \frac{d^i \Phi_j}{dy^i} \right|^2 dy$, $w_{i,j}^2 = \int_{-L}^L \left| \frac{d^i \Phi_j}{dy^i} \right|^2 dy$, $i=0, 1, 2, 3$, $j=1, 3$, 利用等参不等式^[6,7]

$$\begin{cases} I_{1,j}^2 \geq \lambda_1^2 I_{0,j}^2, & I_{2,j}^2 \geq \lambda_2^2 I_{1,j}^2, & I_{3,j}^2 \geq \lambda_3^2 I_{2,j}^2, & j=1, 3 \\ \lambda_1^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}, & \lambda_2^2 = \frac{\pi^2}{L^2}, & \lambda_3^2 = \left(\frac{2.365}{L} \right)^4 \end{cases} \quad (18)$$

由 (17) 式推得估计:

$$k_{h,E}^* \leq k_{h,E,1}^*$$

$$= \frac{kL^4 \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^4 \xi + \sqrt{k^2 L^8 \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^4 \xi^2 + 16[2k^4 L^4 + \pi^2 L^2 k^2 + 2(2.365)^4] \eta L^4}}{8[2k^4 L^4 + \pi^2 L^2 k^2 + 2(2.365)^4]} \quad (19)$$

式中 $\xi = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot \max|\bar{u}_1 - \bar{u}_3|$, $\eta = \max[\max(\bar{u}'_1)^2, \max(\bar{u}'_3)^2]$ 。若记 $\tilde{k} = kL$, 则(19)式变为

$$\frac{k_{h,E}^*}{L^3} \leq \frac{k_{h,E,1}^*}{L^3} = \frac{\tilde{k} \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^2 \xi + \sqrt{\tilde{k}^2 (f_0 / \Delta p)^4 \xi^2 + 16[2\tilde{k}^4 + \pi^2 \tilde{k}^2 + 2(2.365)^4] \eta / L^2}}{8[2\tilde{k}^4 + \pi^2 \tilde{k}^2 + 2(2.365)^4]} \quad (20)$$

第二种方法: 作运算 $\int_{-L}^L (16)(1) \cdot \Phi_1^* dy + \int_{-L}^L (16)(2) \cdot \Phi_3^* dy$ 。按文献[6], 推得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &\leq \frac{k \cdot \max(\max|\bar{u}'_1|, \max|\bar{u}'_3|)(I_{1,1}I_{0,1} + I_{1,3} + I_{0,3})}{\sum_{j=1,3} (I_{2,j}^2 + 2k^2 I_{1,j}^2 + k^4 I_{0,j}^2)} \\ &+ \frac{\frac{1}{8} k \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^2 \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) |\bar{u}_1 - \bar{u}_3|_m I_{0,1} I_{0,3}}{\sum_{j=1,3} (I_{2,j}^2 + 2k^2 I_{1,j}^2 + k^4 I_{0,j}^2)} \\ &\leq k\alpha(k)\sqrt{\eta} + \frac{1}{8} k \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^2 \xi g(k) = k_{h,E,2}^* \end{aligned}$$

式中

$$\alpha(k) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 + 2k^2 \lambda_2^{-1} \lambda_3 + k^4 \lambda_2 \lambda_3^{-1}}, & k^2 L^2 \leq \frac{2.365^4}{\pi^2} + \sqrt{\frac{2.365^8}{\pi^4} + 2.365^4} \\ \frac{1}{2k^2 \sqrt{2k^2 + \pi^2 / L^2}}, & k^2 L^2 \geq \frac{2.365^4}{\pi^2} + \sqrt{\frac{2.365^8}{\pi^4} + 2.365^4} \end{cases}$$

$$g(k) = \frac{1}{2k^4 + 2k^2 \lambda_1^2 + \lambda_3^2},$$

记 $\tilde{k} = kL$, 可得如下估计式:

$$\frac{k_{h,E}^*}{L^3} \leq \frac{k_{h,E,2}^*}{L^3} = \frac{\tilde{k}\alpha(\tilde{k})\sqrt{\eta}}{L} + \frac{1}{8} \tilde{k} \left(\frac{f_0}{\Delta p}\right)^2 \xi g(\tilde{k}), \quad (21)$$

式中

$$\alpha(\tilde{k}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(2.365)^2 + [2\tilde{k}^2(2.365)^2 / \pi] + \tilde{k}^4 \pi(2.365)^{-2}}, & \tilde{k}^2 \leq \frac{2.365^4}{\pi^2} + \sqrt{\frac{2.365^8}{\pi^4} + 2.365^4} \\ \frac{1}{2\tilde{k}^2 \sqrt{2\tilde{k}^2 + \pi^2}}, & \tilde{k}^2 \geq \frac{2.365^4}{\pi^2} + \sqrt{\frac{2.365^8}{\pi^4} + 2.365^4} \end{cases}$$

$$g(\tilde{k}) = \frac{1}{2\tilde{k}^4 + \pi^2 \tilde{k}^2 2(2.365)^4}$$

综合以上两种方法, 得到如下估计:

$$\frac{k_{h,E}^*}{L^3} \leq \frac{\min(k_{h,E,1}^*, k_{h,E,2}^*)}{L^3} \quad (22)$$

其中 $k_{h,E,1}^* / L^3$ 和 $k_{h,E,2}^* / L^3$ 分别由(20)式和(21)式给出。

$$(b) \bar{\lambda}_E = \max(c / D_E)$$

式中

$$\varepsilon = \langle |\nabla(\psi_1 + \psi_3)|^2 \rangle + \langle |\nabla(\psi_1 - \psi_3)|^2 \rangle + \|D^2(\psi_1 + \psi_3)\|_{L^2}^2 + \|D^2(\psi_1 - \psi_3)\|_{L^2}^2,$$

$\|\cdot\|_{L^2}$ 为 L^2 模, $\|D^2\psi\|_{L^2}^2 = \langle \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|^2 \rangle + \langle \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right|^2 \rangle + \langle \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|^2 \rangle$ 。考虑特征值问题

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\varepsilon}{D_E} \quad \text{即} \quad \delta(D_E - \mu\varepsilon) = 0, \quad (23)$$

δ 为变分符号, 相应于(23)式的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} & \nabla^4(\psi_1 + \psi_3) + 2\mu[\nabla^2(\psi_1 + \psi_3) - \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\psi_1 + \psi_3) - \frac{\partial^4}{\partial y^4}(\psi_1 + \psi_3) \\ & - \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}(\psi_1 + \psi_3)] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

应用类似(20), (21)式的估计方法可以估计出

$$\bar{\lambda}_E \leq 2 + \frac{8L^2}{\pi^2 + 4k^2 L^2}. \quad (25)$$

$$(c) \bar{\lambda}_E = \max(E / D_E)$$

考虑特征值问题

$$\frac{1}{\mu} = \frac{E}{D_E} \quad \text{即} \quad \delta(D_E - \mu E) = 0, \quad (26)$$

对(26)式进行同样的处理可以得到

$$\bar{\lambda}_E \leq \frac{2L^2}{\pi^2 + 4k^2 L^2}. \quad (27)$$

$$(d) \bar{\Lambda} = \frac{1}{4L^2} \max \frac{\langle f^2 \rangle}{\langle |\nabla f|^2 \rangle}$$

其中 $f|_{\pm L} = 0$, f 在 x 方向以 $2\pi/k$ 为周期。考虑特征值问题

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4L^2} \frac{\langle f^2 \rangle}{\langle |\nabla f|^2 \rangle} \quad \text{即} \quad \delta(4L^2 \langle |\nabla f|^2 \rangle - \mu \langle f^2 \rangle) = 0,$$

同上处理可得

$$\bar{\Lambda} \leq \frac{1}{4k^2 L^2 + \pi^2}. \quad (28)$$

2. 嵌入不等式及 P_E^{**} 的处理

定理^[7]: 假设 $f(x, y)$ 是一个光滑函数, 且 $f|_{y=\pm L} = 0$, 在 x 方向以 $2\pi/k$ 为周期, 则

$$\langle f' \rangle \equiv \int_{-L}^L \int_0^{2\pi/k} f' dx dy \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{2kL}{\pi\Lambda^{1/2}} + 1 \right\} \langle f^2 \rangle \langle |\nabla f|^2 \rangle, \quad (29)$$

据此嵌入不等式, P_E^{**} 可作如下处理:

$$|P_E^{**}| \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{f_0}{\Delta p} \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \left(\frac{2kL}{\pi\Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} E^{1/2} \varepsilon. \quad (30)$$

3. 能量判据及扰动总能量的衰减估计

综上所述, 记 $K_{h,E}^* = \min(K_{h,E,1}^*, K_{h,E,2}^*)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -K_h D_E + P_E = -K_h D_E + P_E^* + P_E^{**} \\ &\leq -K_h D_E + P_E^* \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{f_0}{\Delta p \sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \left(\frac{2kL}{\pi\Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} E^{1/2} \varepsilon \\ &\leq -D_E (K_h - K_{h,E}^*) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{f_0}{\Delta p \sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \left(\frac{2kL}{\pi\Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} \bar{\lambda}_E E^{1/2} D_E \\ &\leq [- (K_h - K_{h,E}^*) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{f_0}{\Delta p \sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \left(\frac{2kL}{\pi\Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} \bar{\lambda}_E E^{1/2}] D_E, \end{aligned}$$

当下列不等式

$$\frac{K_h}{L^3} > \min \left(\frac{K_{h,E,1}^*}{L^3}, \frac{K_{h,E,2}^*}{L^3} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_{h,E}^*}{L^3}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \\ &\leq \frac{4}{3} \sqrt{3} \frac{4k^2 L^2 + \pi^2}{8(1+k^2)L^2 + 2\pi^2} \left(\frac{2kL}{\pi\Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{-1/2} \frac{K_h - K_{h,E}^*}{E^{1/2}(0)} \frac{\Delta p}{f_0} \end{aligned} \quad (32)$$

成立时, 可得微分不等式

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} \leq [- (K_h - K_{h,E}^*) E \\ + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{f_0}{\Delta p} \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \left(\frac{2kL}{\pi \Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} \bar{\lambda}_E E^{3/2}] / \bar{\lambda}_E, \\ E(t)|_{t=0} = E(0). \end{cases} \quad (33)$$

由(33)式可以解得

$$\begin{aligned} & \frac{E(t)}{[(K_h - K_{h,E}^*) - F(k)E^{1/2}(t)]^2} \\ & \leq \frac{E(0)}{[(K_h - K_{h,E}^*) - F(k)E^{1/2}(0)]^2} \exp \left(- \frac{K_h - K_{h,E}^*}{\bar{\lambda}_E} t \right), \end{aligned} \quad (34)$$

式中

$$F(k) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{f_0}{\Delta p} \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|) \left(\frac{2kL}{\pi \Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} \bar{\lambda}_E$$

$E(0)$ 为单位质量的初始扰动能量。不等式(31), (32)分别称为系统非线性稳定的第一、第二能量判据。

四、分析与讨论

由(20), (21), (31), (32)式可知, 确定系统稳定状况的因子有 $\xi = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot \max|\bar{u}_1 - \bar{u}_3|$, $\eta = \max(\max|\bar{u}'_1|^2, \max|\bar{u}'_3|^2)$ 以及 L, k 等。其中 $\sigma_1 = 1/(\sigma_s - \lambda\eta^*)_2(y_1)$, $\sigma_2 = 1/(\sigma_s - \lambda\eta^*)_2(y_2)$, $\sigma_3 = 1/(\sigma_s - \lambda\eta^*)_2(y_3)$, 分别代表了南雨带、25°N 纬带和北雨带的热力状况。 $\bar{u}'_1 = \partial\bar{u}_1/\partial y$, $\bar{u}'_3 = \partial\bar{u}_3/\partial y$, 及 $|\bar{u}_1 - \bar{u}_3|$ 分别反映了 25°N 纬带区域高、低层的基流经向切变和基流斜压性。对能量判据(31), (32)及其影响因子进行分析可得:

(1) 若北雨带或者南雨带区域对流降水强盛, 凝结加热显著, 而介于南、北雨带之间的 25°N 纬带区域加热作用微弱, 上述两者间热力差异明显时, 则研究区域内系统将趋于不稳定, 总扰动能量将随时间增长, 即南、北雨带强盛的凝结加热作用和南、北雨带与其之间 25°N 纬带区域显著的热力差异是促使研究区域内系统总扰动能量不稳定增长的重要因素, 因而也是利于东亚上空副高加强和维持的重要因素。

(2) 当青藏高原东伸, 西太副高西伸, 研究区域高层的热带东风及其水平切变加强, 低层的西南季风活跃时, 则 ξ, η 增大, 系统的总扰动能量趋于不稳定增长。当青藏高原进一步东伸, 西太副高进一步西伸, 两高压趋于上、下重迭, 低层转化为偏东风流时, 或者西太副高东退, 青藏高原西缩, 高层热带东风减弱时, 则 ξ, η 减小, 系统趋于稳定, 总扰动能量随时间趋于衰减。

(3) 对于研究区域内的微小尺度天气系统($k \rightarrow \infty$), 能量判据表明它们是稳定的, 它们不易得到发展或维持。研究区域内的超长波天气系统($k \rightarrow 0$), 若其初始扰动能量充分小或者经向热力差异微弱, 则它们为非线性稳定, 系统总扰动能量随时间衰减。计算表

明, 研究区域内最不稳定天气系统的纬向波长范围约为 3000—6000 km, 即系统不稳定时, 该波域的扰动总能量随时间增长最快, 系统稳定时, 该波域的扰动总能量随时间衰减最慢。西太副高的纬向尺度属于此波长范围, 因此西太副高是夏季东亚上空表现活跃、易于维持的主要天气系统。

(4) 在其他条件相同的情况下, 南、北雨带的位置分别更趋偏南、偏北时(此时 L 增大), 则雨带之间的研究区域内的天气系统更易趋向不稳定, 且不稳定天气系统的波长范围亦趋于向长波域移动。

五、模式大气的计算和诊断

引入模式大气: 设 25°N 为研究区域的平均计算纬度, 取 $f_0 = 0.62 \times 10^{-4} / \text{s}$, $\Delta p = 200 \text{ hPa}$, $L = 10^6 \text{ m}$, $\sigma_s = 0.015 \text{ m}^2 / \text{hPa}^2 \cdot \text{s}^2$, $k_h = 10^6 \text{ m}^2 / \text{s}$ 并给出其 110°E 区间夏季纬向基本气流的平均分布情况如下:

700 hPa 层:

$$\bar{u}_1(y) = 3 - \frac{1}{\Delta y} y + \frac{1}{\Delta y^2} y^2, \quad (\text{I})$$

$$\bar{u}_1(y) = -2 - \frac{4}{\Delta y} y + \frac{2}{\Delta y^2} y^2, \quad (\text{II})$$

分布(I)为西太副高尚未西伸, 研究区域处于西南季风控制时的情况(图 2 中虚线)。分布(II)为西太副高已西伸到研究区域, 副高南部为偏东风, 北部为偏西风时的情况(图 2 中实线)。

300 hPa 层:

$$\bar{u}_3(y) = -12 + \frac{2}{\Delta y} y - \frac{2}{\Delta y^2} y^2 + \frac{1}{\Delta y^3} y^3, \quad (\text{III})$$

$$\bar{u}_3(y) = -10 + \frac{4}{\Delta y} y - \frac{3}{\Delta y^2} y^2 + \frac{1}{\Delta y^3} y^3, \quad (\text{IV})$$

它反映了研究区域高层处于青藏高原环流影响的纬向基流的分布情况。分布(III)为青藏高原高压中心约在 30°N , 高压东伸时纬向基流的分布情况(图 3 中实线)。分布(IV)为青藏高原高压中心约在 30°N , 高压西退时纬向基流的分布情况(图 3 中虚线)。分布(IV)的东风风速及其经向切变均较分布(III)弱小, 式中 Δy 为 5 个纬度对应的弧长。

根据上节讨论, 下面分别计算和讨论不同的加热状况和不同的高、低层纬向基流分布构型对系统稳定性的制约和影响。

(一) 设低层基流为分布(I), 高层基流为分布(III), 且(1)北雨带有较强的凝结潜热加热(2 cm/s 上升速度, 500 hPa 层日加热约 4.2°C)。这相当于西太副高与青藏高原高压相向而行时的环流形势和天气状况。这种情况下系统稳定性的第一能量判据(31)右端项 $k_{h,E}^* / L^3$ 的计算结果如图 4 实线, 实横线为(31)式左端项 k_h / L^3 (临界值)。其中纬向波长 L_x 介于 3000—6000 km 波域的天气系统, 其对应的 $k_{h,E}^* / L^3$ 值均处于临界值 k_h / L^3 之上, 这表明该尺度区域的天气系统趋于不稳定发展。系统稳定的第二能量判

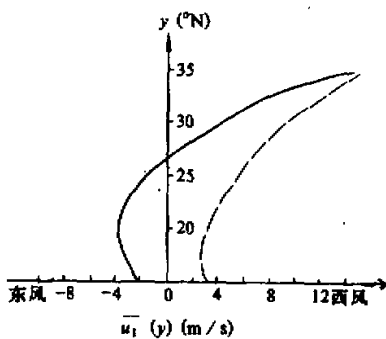


图2 700 hPa 层纬向基本气流平均分布
虚线为分布(I), 实线为分布(II)

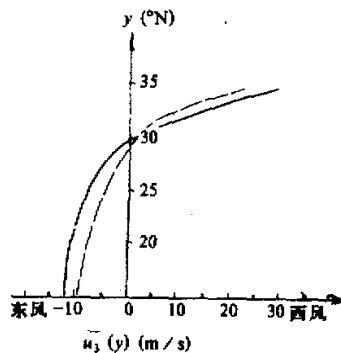


图3 300 hPa 层纬向基本气流的平均分布
实线为分布(III), 虚线为分布(IV)

据(32)可改写为 $E^{1/2}(0) \leq A/B = E_c(0)$, 其中 $A = \frac{4}{3} \sqrt{3} \frac{\Delta p}{f_0} \frac{4k^2 L^2 + \pi^2}{8(1+k^2)L^2 + 2\pi^2} \times$
 $\left(\frac{2kL}{\pi \Lambda^{1/2}} + 1 \right)^{-1/2} (k_h - k_{h,E}^*)$, $B = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_3 - \sigma_2|)$, 此时, 相应的临

界初始扰动能量 $E_c(0)$ 的计算结果如图5实线。其中在约3000—6000 km的纬向波域里 $E_c(0) \leq 0$, 这就是说即使该尺度区域天气系统的初始扰动能量 $E(0)$ 为零, 它们仍趋于不稳定发展。第一、第二能量判据的计算结果均表明, 纬向尺度为3000—6000 km的天气系统在此情况下是不稳定的, 其总扰动能量将随时间而增长, 属于该尺度范围的西太副高因此也易于向东亚副热带上空西伸并在此维持和加强。而在3000—6000 km纬向尺度之外的天气系统则多是稳定的, 其总扰动能量随时间趋于衰减, 只有当该系统的初始扰动能量大于其相应的临界值时, 才可能得到部分不稳定发展。在一般大尺度天气系统中, 比能 $E(t)$, $E(0)$ 的值是很小的, 设 $E^*(t) = E(t) / [(k_h - k_{h,E}^*) - F(k)E^{1/2}(t)]^2$, $E^*(0) = E(0) / [(k_h - k_{h,E}^*) - F(k)E^{1/2}(0)]^2$, 大致可以表现 $E(t)$ 及 $E(0)$ 的变化趋势及系统在稳定或不稳定状况下总扰动能量的衰减或增长情况, 此时

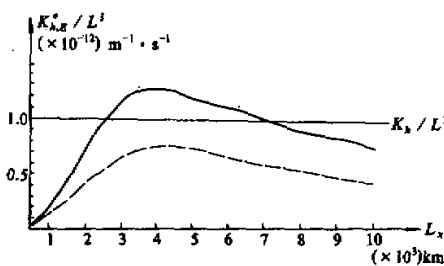


图4 能量第一判据计算结果分布
临界值 K_h / L^3 之上为不稳定区域, 之下为稳定区域,
实线为讨论(一)之(1), 虚线为讨论(一)之(2)

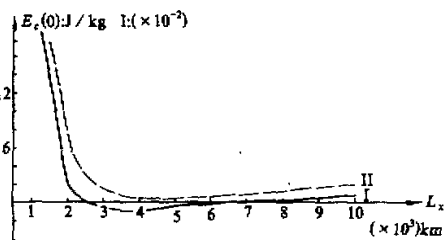


图5 能量第二判据中临界初始扰动
能量值 $E_c(0)$ 的计算结果分布
临界值 $E_c(0)$ 之上为不稳定区域, 之下为稳定区域,
实线为讨论(一)之(1), 虚线为讨论(一)之(2)

(34)式可写成 $E^*(t) \leq E^*(0) \exp[-(k_h - k_{h,E}^*)t / \bar{\lambda}_E]$ 。上述情况下, $E^*(t)$ 随时间的增减情况如图 6 实线, 其中在 3000—6000 km 纬向波域内 $\gamma = (k_h - k_{h,E}^*) / \bar{\lambda}_E < 0$, 系统表现为不稳定增长, 尤其在 3000—5000 km 波域内系统的 $E^*(t)$ 值经 4—7 天即可增长到其初始值 $E^*(0)$ 的 e 倍(下半轴实线)。其余波域内系统的扰动能量则随时间稳定衰减(上半轴实线)。(2) 若高、低层的基流分布情况不变, 只是北雨带的凝结潜热减弱(日加热约 1.3°C)。此时, 第一能量判据(31)右端项 $k_{h,E}^* / L^3$ 的计算结果如图 4 虚线, 整个纬向波域内系统均是稳定的。第二能量判据中的临界初始扰动能量值 $E_c(0)$ 比上一种情况增大了两个量级(如图 5 虚线), 这就是说此种情况下除非初始扰动能量 $E(0)$ 很大, 否则系统仍难以得到不稳定增长。此时 $\gamma > 0$, $E^*(t)$ 值随时间迅速衰减, 3000—6000 km 纬向尺度天气系统的 $E^*(t)$ 值在 3—6 天内即可衰减到其初始值 $E^*(0)$ 的 $1/e$ (如图 6 虚线), 这种情况下, 该区域已有的副高也趋减弱, 西太副高不易向此区域西伸。

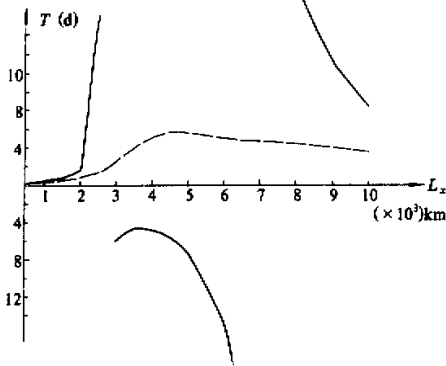


图 6 系统总扰动能量随时间的变化情况
上半轴曲线为 $E^*(t)$ 稳定衰减至 $E^*(0)$ 的 $1/e$ 倍时所需时间, 下半轴曲线为 $E^*(t)$ 不稳定增长至 $E^*(0)$ 的 e 倍时所需时间, 实线为讨论(一)之(1), 虚线为讨论(一)之(2)

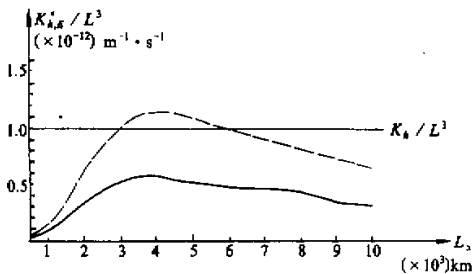


图 7 能量第一判据计算结果分布
临界值 k_h / L^3 之上为不稳定区域, 之下为稳定区域,
实线为讨论(二)之(1), 虚线为讨论(二)之(2)

比较(一)之(1)与(一)之(2)两种情况可知, 在环流构型相同时, 北雨带凝结加热作用的强弱与否将决定着是否利于引导西太副高向东亚副热带上空西伸并维持于此。

(二) 高层基流为分布(IV), 低层基流为分布(II), (1)南雨带或北雨带有较强的凝结加热作用(日加热约 4.2°C)。这相当于青藏高原和西太副高相背而退的环流形势和天气状况。此时, 第一能量判据(31)右端项 $k_{h,E}^* / L^3$ 的计算结果如图 7 实线, 整个纬向波域尺度内的天气系统均很稳定。第二能量判据中的 $E_c(0)$ 计算结果如图 8 实线, 只有当系统的初始

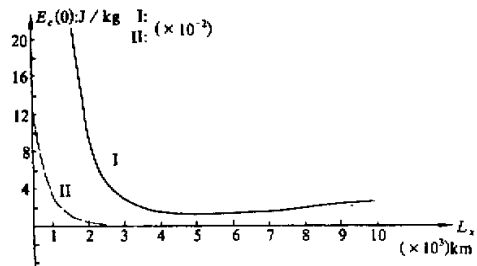


图 8 能量第二判据中临界初始扰动能量值 $E_c(0)$ 的计算结果分布
临界值 $E_c(0)$ 之上为不稳定区域, 之下为稳定区域,
实线为讨论(二)之(1), 虚线为讨论(二)之(2)

扰动能量 $E(0)$ 较大, 超过其相应的临界值 $E_c(0)$ 时, 才可能有部分不稳定发生。系统已有的总扰动能量则随时间迅速衰减(如图 9 实线)。

这种高、低层的环流配置是天气系统最稳定、最不易发展的型式, 已有的副高系统将迅速减弱, 此时西太副高难以在东亚副热带上空继续维持而趋于向东撤出。

(2) 若环流型不变, 而南雨带或北雨带出现更为强盛的对流降水凝结加热(H 加热约 5.2°C), 能量第一判据计算结果也仅在 3000—5000 km 纬向尺度范围有弱的不稳定出现(如图 7 虚线)。第二能量判据中 $E_c(0)$ 的计算结果如图 8 虚线, 纬向尺度在 2000 km 以上的天气系统此时可能得到部分不稳定发展。总扰动能量的变化情况如图 9 虚线, 仅在 3000—5000 km 纬向波域的天气系统有缓慢增长, 而在其他尺度区域总扰动能量均为随时间衰减。因此, 已伸入东亚大陆的西太副高此时仍不易强盛地维持, 一旦雨带降水的潜热作用减弱, 则副高即随之减弱并趋于退出东亚大陆。

综上(一)、(二)讨论可知, 研究区域内最利于系统趋于不稳定的环流配置是: 高层, 青藏高原东伸, 东风及其水平切变加强; 低层, 西太副高尚未西伸至东亚大陆, 西南季风活跃。此时, 北雨带或者南雨带一定强度的持续对流降水加热作用, 即可形成利于西太副高西伸的环境条件。最利于系统稳定的环流配置是: 青藏高原西退, 高层热带东风及东风切变减弱; 低层的西太副高已伸入东亚大陆, 研究区域为弱东风控制。此时, 即使南雨带或北雨带仍有较为明显的对流凝结加热作用, 西太副高也难以在此继续维持下去, 而易减弱并向东退出东亚大陆。

至于其他类型的基流高、低层配置情况我们也进行了计算, 它们对系统稳定状况的影响介于上述两类极端情况之间。这时, 系统能否趋于不稳定, 西太副高能否西伸或能否维持于东亚副热带上空, 相当程度上要由其南、北两侧雨带的对流降水强弱来决定。以上模式大气计算结果同西太副高进退的一些观测事实和天气分析是基本一致的。

六、结 语

本文研究的结果从理论上证明了引言中所列文献[1, 2]的观点, 即东亚大陆季风雨带的形成常常先于西太副高向东亚上空的挺进, 西太副高向东亚副热带地区的西伸或维持往往是在适定的环流形势下, 由大陆季风雨带或南海季风槽雨带的对流降水热力强迫作用所导致, 并提出了实现这种制约影响过程的动力学机制。由于本文进行的是解析分

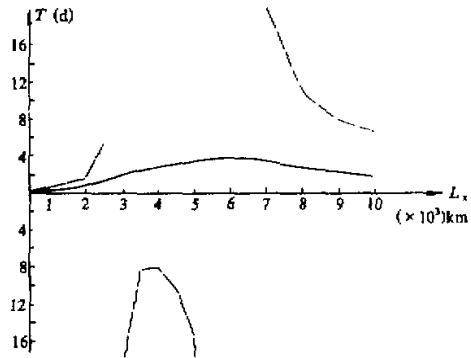


图 9 系统总扰动能量随时间的变化情况
上半轴曲线为 $E^+(t)$ 稳定衰减至 $E^+(0)$ 的 $1/e$ 倍时所需时间, 下半轴曲线为 $E^-(t)$ 不稳定增长至 $E^-(0)$ 的 e 倍时所需时间, 实线为讨论(二)之(1), 虚线为讨论(二)之(2)

析而非详尽的数值模拟, 故模式和处理过程经过了一些简化, 但基本上反映了夏季东亚地区的环流状况和天气特征。因此, 所得结论可为诊断预测西太副高在东亚上空的活动提供一定的参考依据。

参 考 文 献

- [1] 喻世华、杨维武, 1991, 副热带季风环流圈特征及其在东亚夏季环流中的作用, 应用气象学报, 2, 242-247.
- [2] 钱贞成、喻世华, 1991, 东亚地区凝结加热中期变动与西太平洋副热带高压准双周振荡的关系, 热带气象, 7, 260-267.
- [3] 钟 中, 1991, 东亚地区加热场对西太平洋副热带高压东西进退影响的数值试验, 热带气象, 7, 332-340.
- [4] 杨大升等, 1980, 动力气象学, 气象出版社.
- [5] Charney, J. G. and A. Eliassen, 1964, On the growth of the hurricane depression, *J. Atmos. Sci.*, 21, 68-71.
- [6] Georgescu, A., 1985, *Hydrodynamic Stability Theory*, Martinus Nijhoff Publishers.
- [7] Joseph, D. D., 1976, *Stability of Fluid Motions*, Vol. I, Springer-Verlag.

A Study of Non-linear Stability of the Western-Pacific Subtropical High

Zhang Ren, Shi Hansheng and Yu Shihua

(Air Force Institute of Meteorology, Nanjing 211101)

Abstract

The restriction and influence on the systematical stability of the western Pacific subtropical high exerted by the factors of circulation pattern of East Asia subtropical region, monsoon rain belt in continental East Asia, monsoon trough rain belt in the South China Sea and western Pacific, and the non-linear interaction of disturbance flows are studied using a non-linear dynamic model including heat force and vortex dissipation.

The energy criterion reflecting systematical stability is shown. Dynamical analysis and model atmosphere computation are also carried out based on the energy criterion. The dynamic explanation of some weather facts is provided. The research results and views provide criteria of judging and predicting the shift of the western Pacific subtropical high.

Key words: western Pacific; subtropical high; non-linear stability; energy criterion; heat and circulation action.