第20卷 第3期　　大　气　科　学　　Vol. 20, No. 3
1996 年 5 月　　SCIENTIA ATMOSPHERICA SINICA　　May　1996

三维非静力平衡大气中平行切变流上重力内波的不稳定及半椭圆定理

孙立潭
(空军气象学院，南京　211101)

黄美元
(中国科学院大气物理研究所，北京　100029)

摘　要　本文应用守恒型非弹性模式研究了三维非静力平衡大气中平行切变流上重力内波的不稳定，推广了 Miles 定理和半圆定理，得到了有限深度气层的半椭圆定理。该定理指出不稳定波的复波速被限制在相速复平面上一个内接于霍华德（Howard）半圆的半椭圆内。该半椭圆长轴重合于半圆的直径，而短轴则取决于最小 *Ri* 数、波长、波宽等因素。

关键词　重力内波　层结　平行切变流　不稳定　半椭圆定理

1　引言

早在本世纪 60 年代初，Miles[1]就研究了层结流体中平行剪切基流上扰动的不稳定条件，并发表了著名的 Miles 定理。此后，Howard[2]通过精巧处理不仅给出了扰动不稳定必要条件的简洁证明，而且还进一步研究了不稳定扰动的增长率，并给出了著名的 Howard 半圆定理。虽然这两个定理不是针对大气而言，但它们早已被广泛用于研究中小尺度重力内波的不稳定和晴空湍流（CAT）的形成机制。Dutton[3]曾将这两个定理推广到三维大气中；秦曾灏[4]又将其推广到考虑自由面起伏的海洋中；缪国平和刘应中[5]还研究了正交平行剪切流上波动的不稳定问题；这些推广工作使这两个定理更便于应用。

除此以外，Kochar 和 Jain[6]；Makov 和 Stepanyants[7]还进一步考虑了层结因子对不稳定波的限制作用，建立了半椭圆定理。即：不稳定重力内波的复波速被限制在相速复平面上一个内接于 Howard 半圆之内的半椭圆之中，该半椭圆的长轴重合于 Howard 半圆的直径，而短轴则取决于波长和最小 *Ri* 数。但是，这一结论是针对二维铅直平面中的 Boussinesq 流而言的。

本文旨在将上述结果推广到大气科学中以适应重力内波不稳定，CAT 和暴雨等现象的形成机制。结果发现，三维大气中半椭圆定理不仅成立，而且其短轴要比二维情况更短小，它不仅与波长、最小 *Ri* 数有关，而且与波宽（y 方向波长）有关。除此以外，半椭圆的中心位置也有变化。当考虑正交基流时，情况会更复杂，留待以后讨论。

2　波动振幅的特征问题

根据 Durran[8]的研究，目前，中小尺度动力学中广为应用的动量无辐散模式或滞

1994-03-12 收到，1995-02-14 收到再改稿

弹性模式不具有总能量守恒性质，从而这种内含的虚假能源必定导致波动的虚假增长[9,10]。Durran 指出：相对于总能量守恒的线性化完全弹性模式重力波部分其振幅误差在 250 K 的等温大气中于 10 km 高度处可达 22%；而其频率误差在云内达 10^{-2}、云外达 10^{-3} [11]。为避免这种伪增长，今采用 Lipps 和 Hemler[12]的能量守恒型非弹性模式，它既无振幅相对误差，也无频率误差（指重力内波）[13]。

若不计科里奥利力的作用，则绝热无粘大气中垂直切变流上重力内波的控制方程组可写为

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}=-\frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial w'}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi'}{\partial z}+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \theta'}{\partial x}+\frac{\bar{\theta}}{g}N^2 w'=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}+\delta\Gamma^2 w'=0, \tag{5}$$

式中$\varphi'\equiv c_p\bar{\theta}\pi'$，$\pi'$为无量纲扰动气压，$u'$、$v'$、$w'$分别为 x、y、z 方向的扰动速度，$\bar{u}$为 x 方向基本气流，$\bar{\theta}$为平均位温，θ'为扰动位温，$N^2\equiv(g/\bar{\theta})(\mathrm{d}\bar{\theta}/\mathrm{d}z)$，$\Gamma^2\equiv(1/\bar{\rho})(\mathrm{d}\bar{\rho}/\mathrm{d}z)$，$\bar{\rho}$为平均密度，$\delta$ 为示踪系数，$\delta=0$ 表示浅薄过程，$\delta=1$ 表示深厚过程。

容易证明，上述模型具有如下的总能量方程：

$$\frac{\partial E'}{\partial t}+\frac{\partial p'u'}{\partial x}+\frac{\partial p'v'}{\partial y}+\frac{\partial p'w'}{\partial z}+\bar{\rho}u'w'\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}=0, \tag{6}$$

式中

$$E'=\frac{1}{2}\rho^*\left(u'^2+v'^2+w'^2+\frac{g^2}{N^2}\frac{\theta'^2}{\bar{\theta}^2}\right)$$

且$p'\equiv\rho^*\varphi'$。$\rho^*=1$ 对应于浅对流过程，$\rho^*=\bar{\rho}$对应于深对流过程。显然，无切变时，对于零值边界和法向速度零值边界总扰动能量守恒。

对于上述能量守恒模式，假定如下的波动解：

$$\Phi(x,y,z,t)=\hat{\Phi}(\omega,l,m,z)\exp\{i(\omega t+lx+my)\}, \tag{7}$$

式中

$$\Phi=\{u',v',w',g(\theta'/\bar{\theta}),\varphi'\}, \tag{8}$$

$$\hat{\Phi}=\{\hat{u},\hat{v},\hat{w},\hat{\theta},\hat{\varphi}\}. \tag{9}$$

将（7）~(9) 式代入（1）~(5) 式，并记$\Omega\equiv\omega+l\bar{u}$，且$D\equiv\partial/\partial z$，则得

$$i\Omega\hat{u}+\hat{w}D\bar{u}+il\hat{\varphi}=0, \tag{10}$$

$$i\Omega\hat{v}+im\hat{\varphi}=0, \tag{11}$$

$$i\Omega\hat{w}+D\hat{\varphi}=\hat{\theta}, \tag{12}$$

$$i\Omega\hat{\theta}+N^2\hat{\theta}=0, \tag{13}$$

$$il\hat{u}+im\hat{v}+D\hat{w}+\delta\Gamma^2\hat{w}=0, \tag{14}$$

消去$\hat{u}$，$\hat{v}$，$\hat{\varphi}$及$\hat{\theta}$即得到关于$\hat{w}$的单一方程

$$\Omega^2\{D^2\hat{w}+\delta\Gamma^2 D\hat{w}+\delta\hat{w}D\Gamma^2\}+\{K^2(N^2-\Omega^2)-l\Omega D^2\bar{u}+l\Omega\delta\Gamma^2 D\bar{u}\}\hat{w}=0, \tag{15}$$

式中$K^2=l^2+m^2$。

令$q_0=[(1-\delta)+\delta\bar{\rho}]^{-1}$及$\tilde{w}=\hat{w}/q_0$，则（15）式可以化为经典形式

$$\Omega^2 D(q_0 D\tilde{w})+K^2(N^2-\Omega^2)q_0\tilde{w}-l\Omega\tilde{w}D(q_0 D\bar{u})=0. \tag{16}$$

仍同 Miles 和 Howard 一样，采用零值边界，即

$$\tilde{w}(z=0)=\tilde{w}(z=H)=0, \tag{17}$$

其中 H 为气层厚度。

这样，振幅方程（16）和边界条件（17）即构成关于Ω（实际是关于波速 C）的特征问题。

经验证，对于 Boussinesq 近似、动量无辐散近似以及 Durran[8]假不可压近似下的模式方程组都可得到同样形式的振幅变化方程，所不同者仅是方程中q_0和$\tilde{w}$表达式不同。从以下证明过程中将发现 Miles 定理、Howard 半圆定理、半椭圆定理不因模式不同而有形式上的变化，其所不同者在于波动增长率。

3 不稳定条件

对于特征问题（16）和（17），固然可以采用数值求解特征值来研究不稳定条件，但这是繁琐的，而且只能得到特定N^2和$\bar{u}$分布下的情况。相比之下，Howard[2]所采用的积分法及其精巧处理就显得异常简便而结论却有普遍性，因此，以下采用积分法。

对于不稳定扰动，可假设Ω的虚部不为零，从而$\Omega=(\omega_R+l\bar{u})+i\omega_I\neq 0$，由此引入如下的变换

$$\tilde{w}=\Omega^n F_n(z), \tag{18}$$

将其代入（16）式得

$$\Omega^2 D[q_0 D(\Omega^n F_n)]-l\Omega^{N+1}F_n D(q_0 D\bar{u})+K^2(N^2-\Omega^2)q_0\Omega^n F_n=0. \tag{19}$$

记F_n的共轭函数为$\bar{F}_n$，并在（19）式两边乘上函数$\Omega^{n-2}\bar{F}_n$，然后对整个气层进行积分，得

$$\int_0^H \Omega^n\bar{F}_n D[q_0 D(\Omega^n F_n)]\mathrm{d}z-\int_0^H l\Omega^{2n-1}D(q_0 D\bar{u})|F_n|^2\mathrm{d}z$$
$$+\int_0^H K^2(N^2-\Omega^2)q_0\Omega^{2n-2}|F_n|^2\mathrm{d}z=0, \tag{20}$$

利用边界条件（17）对上式左端第一项用分部积分法进行积分，然后将积分结果按照Ω的降幂进行整理，即得

$$\int_0^H \Omega^{2n}(|DF_n|^2 + K^2|F_n|^2)q_0\,\mathrm{d}z + \int_0^H \Omega^{2n-1}(1-n)lD(q_0 D\bar{u})|F_n|^2\,\mathrm{d}z$$
$$-\int_0^H \Omega^{2n-2}[n(n-1)l^2(D\bar{u})^2 + K^2N^2]|F_n|^2 q_0\,\mathrm{d}z = 0, \tag{21}$$

利用这一积分关系式，我们可以方便地研究波动不稳定的条件。

3.1 不稳定的充分条件

取 $n=1$，并记 $|G_1|^2 \equiv |DF_1|^2 + K^2|F_1|^2$，则得

$$\int_0^H \Omega^2|G_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z - \int_0^H K^2|F_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z = 0, \tag{22}$$

由 $\Omega^2 = \omega^2 + 2l\bar{u}\omega + (l\bar{u})^2$，上式可改写成

$$\omega^2 I_2 + 2\omega I_1 + I_0 = 0, \tag{23}$$

其中

$$I_2 = \int_0^H |G_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z,$$
$$I_1 = \int_0^H l\bar{u}|G_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z,$$
$$I_0 = \int_0^H [(l\bar{u})^2|G_1|^2 - K^2N^2|F_1|^2]q_0\,\mathrm{d}z.$$

求解（23）式，得

$$\omega = -\frac{I_1}{I_2} \pm \left(\frac{I_1^2}{I_2^2} - \frac{I_0}{I_2}\right)^{1/2}. \tag{24}$$

由此可知，不稳定（ω 为复数）的充分条件为

$$I_1^2 < I_0 I_2. \tag{25}$$

但是，由 Schwartz 不等式可知，对于积分关系式 I_0，I_1 和 I_2，必有

$$I_1^2 = \left\{\int_0^H l\bar{u}|G_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z\right\}^2$$
$$\leqslant \int_0^H |G_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z \int_0^H l^2\bar{u}^2|G_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z = I_2\left(I_0 + \int_0^H K^2N^2|F_1|^2 q_0\,\mathrm{d}z\right), \tag{26}$$

这表明，当 $N^2<0$ 时，显然有（25）式成立。也就是说，层结为静力不稳定时，对于任意的风速廓线，波动都将不稳定。然而，当 $N^2 \geqslant 0$ 时，即静力稳定时，不能由(26) 得到(25) 式，这表明要寻找对任意风速廓线都成立的充分判据是困难的。

需要说明的是，对于 Miles[1]和 Howard[2]所考虑的 Boussinesq 流体，N^2 是由密度定义的，即 $N^2 \equiv -(g/\bar{\rho})(\mathrm{d}\bar{\rho}/\mathrm{d}z)$，与本文中根据位温定义的 N^2 相差很大，两者不可等同。

3.2 不稳定的必要条件

在无法获得充分条件时，进一步研究波动不稳定的必要条件也是非常有益的。在(21)式中令 $n=1/2$，并将第二个积分中 Ω^{-1} 改写成 $\Omega^{-1}=\bar{\Omega}/|\Omega|^2$，且记 $|G_{1/2}|^2 =$

$|DF_{1/2}|^2+K^2|F_{1/2}|^2$，则得到

$$\int_0^H \Omega|G_{1/2}|^2 q_0 \mathrm{d}z+\int_0^H \bar{\Omega}\left[\frac{l^2}{4}(D\bar{u})^2-K^2N^2\right]\left|\frac{F_{1/2}}{\Omega}\right|^2 q_0\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_0^H lD(q_0D\bar{u})|F_{1/2}|^2\mathrm{d}z=0. \tag{27}$$

易知其虚部为

$$\omega_I\int_0^H\left\{|G_{1/2}|^2+\left[K^2N^2-\frac{l^2}{4}(D\bar{u})^2\right]\left|\frac{F_{1/2}}{\Omega}\right|^2\right\}q_0\mathrm{d}z=0. \tag{28}$$

欲使$\omega_I\neq 0$，则气层中至少于某处成立着

$$K^2N^2-\frac{l^2}{4}(D\bar{u})^2<0, \tag{29}$$

即

$$Ri=\frac{N^2}{(D\bar{u})^2}<\frac{l^2}{4K^2}<\frac{1}{4}, \tag{30}$$

此式与秦曾灏[4]所得不稳定必要条件一致，但N^2定义不同，这一点已在前面讲过。

若利用 Poincare 不等式

$$\int_0^H|DF|^2\mathrm{d}z\geqslant\frac{\pi^2}{H^2}\int_0^H|F|^2\mathrm{d}z, \tag{31}$$

则由（28）式可得出不稳定扰动增长率为

$$K^2C_i^2\leqslant\left[\frac{l^2}{4K^2}-Ri\right](D\bar{u})^2_{\max}\frac{K^2}{K^2+\dfrac{\pi^2}{H^2}\dfrac{q_{0\min}}{q_{0\max}}}, \tag{32}$$

由此可见，对于不同的模式，其增长率与q_0也有关。

3.3 Howard 半圆定理

令$C_R=-\omega_R/K$，且$C_I=-\omega_I/K$，则有

$$\Omega^2=K^2(C_R^2-C_i^2)+l^2\bar{u}^2-2l\bar{u}KC_R-2iK(l\bar{u}-KC_R), \tag{33}$$

将（33）式代入（22）式并将其实部和虚部分开，可得

$$C_I\int_0^H(l\bar{u}-KC_R)|G_1|^2q_0\mathrm{d}z=0,$$

因为对于不稳定波$C_I\neq 0$，故

$$\int_0^H l\bar{u}|G_1|^2q_0\mathrm{d}z=\int_0^H C_RK|G_1|^2q_0\mathrm{d}z. \tag{34}$$

对于实部，则为

$$\int_0^H[l^2\bar{u}^2-K^2(C_R^2+C_i^2)]|G_1|^2q_0\mathrm{d}z-\int_0^H K^2N^2|F_1|^2q_0\mathrm{d}z=0. \tag{35}$$

利用 Howard[2]的精巧变换处理方法，即

$$(\bar{u}-\bar{u}_{\min})(\bar{u}-\bar{u}_{\max})\leqslant 0,$$

亦即

$$-\bar{u}^2+\bar{u}(\bar{u}_{\min}+\bar{u}_{\max})-\bar{u}_{\min}\bar{u}_{\max}\geqslant 0, \tag{36}$$

将（36）式代入（35）式，得

$$\left[\left(C_R-\frac{l}{K}\frac{a+b}{2}\right)^2+C_I^2-\left(\frac{l}{K}\frac{b-a}{2}\right)^2\right]\int_0^H|G_1|^2q_0\mathrm{d}z$$
$$+\int_0^H N^2|F_1|^2q_0\mathrm{d}z\leqslant 0, \tag{37}$$

式中$a\equiv\min\{\bar{u}\}=\bar{u}_{\min}$，$b\equiv\max\{\bar{u}\}=\bar{u}_{\max}$。

略去（37）式中关于层结（$N^2\geqslant 0$）的非负项，即得到半圆定理

$$\left(C_R-\frac{l}{K}\frac{a+b}{2}\right)^2+C_I^2\leqslant\left(\frac{l}{K}\frac{b-a}{2}\right)^2. \tag{38}$$

与二维情况相比，(38) 式有两点值得注意：其一是圆心左移现象，其二是半径缩小现象。这个结论是与增长率估计式（32）相呼应的。

3.4 半椭圆定理

Howard 定理使我们对不稳定波动有了更深刻的理解，但由于半圆定理是在（37）式中略去层结项而得到的，因而半圆定理（38）未能反映出稳定层结对不稳定扰动的抑制作用。Kochar 和 Jain[6]首先定量地估计了层结项的大小，建立了二维铅直平面中 Boussinesq 流上不稳定扰动的半椭圆定理；Makov 和 Stepanyants[7]曾进一步对其修正。今将其推广到三维大气中以广其用。

注意到$F_{1/2}=\Omega^{1/2}F_1$，从而微分可得

$$DF_{1/2}=\frac{1}{2}\Omega^{-1/2}F_1lD\bar{u}+\Omega^{1/2}DF_1,$$

利用代数不等式$|A-B|^2\geqslant||A|-|B||^2$，即得

$$|DF_{1/2}|^2\geqslant|\Omega||DF_1|^2+\frac{1}{4}\frac{(lD\bar{u})^2}{|\Omega|}|F_1|^2-l|D\bar{u}||F_1||DF_1|, \tag{39}$$

注意到(28)式中$|G_{1/2}|^2\equiv|DF_{1/2}|^2+K^2|F_{1/2}|^2$，于是将(39)式代入(28)式，整理可得

$$(1-4J_0)B^2\geqslant B^2+E^2+K^2D^2-\int_0^H lD\bar{u}|F_1||DF_1|q_0\mathrm{d}z, \tag{40}$$

式中

$$B^2=\int_0^H\frac{l^2(D\bar{u})^2}{4|\Omega|}|F_1|^2q_0\mathrm{d}z,\qquad E^2=\int_0^H|\Omega||DF_1|^2q_0\mathrm{d}z,$$
$$D^2=\int_0^H|\Omega||F_1|^2q_0\mathrm{d}z,\qquad J_0=\min_{z\in(0,H)}\{Ri\}.$$

利用 Schwartz 不等式，可得

$$\int_0^H l|D\bar{u}||F_1||DF_1|q_0\mathrm{d}z \leqslant \left[\int_0^H \frac{l^2|D\bar{u}|^2}{|\Omega|}|F_1|^2 q_0 \mathrm{d}z \int_0^H |\Omega||DF_1|^2 q_0 \mathrm{d}z\right]^{1/2} = 2BE, \tag{41}$$

故（40）式又可改写成

$$E^2 - 2BE + 4J_0 B^2 + K^2 D^2 \leqslant 0, \tag{42}$$

由此解出

$$B - (B^2 - 4J_0 B - K^2 D^2)^{1/2} \leqslant E \leqslant B + (B^2 - 4J_0 B - K^2 D^2)^{1/2}, \tag{43}$$

于是得到估计式

$$E^2 + K^2 D^2 \leqslant 2B^2\left[1 - 2J_0 + \left(1 - 4J_0 - K^2\frac{D^2}{B^2}\right)^{1/2}\right]. \tag{44}$$

利用$|\Omega| \geqslant KC_i$，以及

$$\frac{D^2}{B^2} = \frac{\int_0^H q_0|\Omega||F_1|^2\mathrm{d}z}{\int_0^H \frac{l^2|D\bar{u}|^2}{4|\Omega|} q_0|F_1|^2\mathrm{d}z} \geqslant 4\frac{K^2}{l^2}C_i^2(D\bar{u})_{\max}^{-2},$$

于是

$$E^2 + K^2 D^2 \leqslant 2B^2 R, \tag{45}$$

其中

$$R \equiv 1 - 2J_0 + \left[1 - 4J_0 - 4K^2\frac{K^2}{l^2}C_i^2(D\bar{u})_{\max}^{-2}\right]^{1/2}, \tag{46}$$

注意到

$$E^2 + K^2 D^2 \geqslant KC_i\int_0^H (|DF_1|^2 + K^2|F_1|^2)q_0\mathrm{d}z, \tag{47}$$

以及

$$B^2 \leqslant \frac{l^2}{4KC_i}\int_0^H q_0|D\bar{u}|^2|F_1|^2\mathrm{d}z,$$

故

$$\int_0^H q_0|G_1|^2\mathrm{d}z \equiv \int_0^H q_0(|DF_1|^2 + K^2|F_1|^2)\mathrm{d}z \leqslant \frac{l^2 R}{2K^2 C_i^2}\int_0^H q_0|D\bar{u}|^2|F_1|^2\mathrm{d}z, \tag{48}$$

而层结项（注意到$N^2 \geqslant 0$）又可写成

$$\int_0^H q_0 N^2|F_1|^2\mathrm{d}z \geqslant J_0\int_0^H q_0(D\bar{u})^2|F_1|^2\mathrm{d}z, \tag{49}$$

将（48）和（49）两式代入 Howard 不等式（37）中，立即得到三维大气中平行剪切流上关于有限深度气层的半椭圆定理

$$\left(C_R - \frac{l}{K}\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{2J_0}{R}\frac{K^2}{l^2}\right)C_i^2 \leqslant \left(\frac{l}{K}\frac{b-a}{2}\right)^2. \tag{50}$$

关于半椭圆定理（50）有两点说明，其一是它内含于 Howard 半圆之内、中心与圆心重合，长轴与半圆直径重合，短轴则与最小 Ri 数、J_0 以及波长（x，y 方向）等有关；其二是在三维大气中的半椭圆（50）与二维铅直平面中相比，中心左移（$l/K<1$）而且长轴和短轴都缩短了，这是新的结论。

4 不稳定扰动在深对流和浅对流中的差异

不稳定扰动增长率估计式（32）显式地表明了不稳定扰动在深对流和浅对流过程中随时间增长的差异（主要是q_0不同），但事实上，振幅变化方程（16），对于深对流和浅对流过程仅是形式相同，至于垂直速度本身显然有差异。在浅对流过程中，$q_0=1$，$\hat{w}=\tilde{w}$；而深对流过程中，$q_0=\bar{\rho}^{-1}$，故$\hat{w}=\tilde{W}/\bar{\rho}$，这样，平均密度$\bar{\rho}$随高度变化带来的差异也不能忽略。这种差异有多大呢?不妨考虑等温大气，显然

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{R\bar{T}},$$

故

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}(0)}\exp\left(\frac{gz}{R\bar{T}}\right).$$

这样，深对流过程中，仅仅是因为密度随高度减小而增幅，如$\bar{T}=250$ K，则 10 km 处的振幅要比地面处的增加 25%左右。

5 结论

通过以上讨论，我们发现三维非静力平衡大气中平行切变流上的不稳定扰动较二维情况有所不同。首先是不稳定必要条件更加苛刻了（充分条件$N^2<0$没有变化）；其二是扰动一旦不稳定，则其增长率要比二维情况下的估计小些（对于同样的$(D\bar{u})_{\max}$和J_0），这一点可以从增长率估计式（32）中看到。第三是不稳定扰动的半圆定理中半圆轨迹出现了圆心左移和半径缩小的现象。第四是半椭圆也出现了中心左移和长、短轴都缩小的现象。实际上第三和第四两点也是第二点的再次说明。第五是深厚过程与浅薄过程中的不稳定扰动之间增长率有所不同，而密度随高度减小对深厚过程中波幅的影响也是值得注意的。

参 考 文 献

1 Miles, J.W., 1961, On the stability of heterogeneous shear flow, *J. Fluid Mech.*, **10**, 496～508.

2 Howard, L. N., 1961, Note on a paper of John W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **10**, 509～612.

3 Dutton, J.A., 1967, *The Cealess Wind, An Introduction to the Theory of Atmospheric Motion*, New York:

McGraw-Hill.

4 秦增灏, 1986, 层结流体平行切变流的不稳定和重力内波, 力学学报, No.5, 392~402.

5 缪国平, 刘应中, 1990, 层结流体正交平行剪切流的不稳定性, 水动力学研究与进展 (A), No.3, 73~80

6 Kockar, G. T. and R. K. Jain, 1979, Note on Howard's semicircle theorem, *J. Fluid Mech.*, **91**, 489~491.

7 Makov, Y. N. and Y. A. Stepanyants, 1984, Note on the paper of Kochar and Jain on Howard's semicircle theorem, *J. Fluid Mech.*, **140**, 1~10.

8 Durran, D. R., 1989, Improving the anelastic approximation, *J. Atmos. Sci.* **46**, 1453~1461.

9 Ogura, Y. and N. A. Phillips, 1962, Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **19**, 173~179

10 张可苏, 1980, 大气动力学模式的比较研究, 中国科学 (B), No.3, 277~287

11 胡志晋, 邹光源, 1991, 大气非静力平衡和弹性适应, 中国科学 (B), No.5, 550~560.

12 Lipps, F. and R. Hemler, 1982, A scale analysis of deep moist convection, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 1960~1964

13 Lipps, F., 1990, On the anelastic approximation for deep convection, *J. Atmos. Sci.*, **47**, 1794~1798

Instability and Semi-Ellipse Theorem of Internal Gravity Wave on a Three Dimensional Non-Hydrostatic Shear Flow

Sun Litan

(*Meteorological Institute of Air Force, Nanjing* 211101)

Huang Meiyuan

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029)

Abstract By use of an energy-conservated anelastic model, the instability of stratified shear flow in a finite depth invisid atmosphere has been studied. The semi-ellipse theorem of unstable modes has been established. The theorem means that the complex wave velocity for any unstable modes lies in a semi-ellipse whose major axis coincides with the diameter of the Howard's semi-circle, while its minor axis depends not only on the minimum Richardson number and the wave number but also on the depth of the atmosphere.

Key words gravity wave stratification paralleled shear flow instability semi-ellipse theorem