

大气中孤立波的相互作用*

朱 勇

(上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘 要 本文讨论无限深上层流体和有限深下层流体的两层流体系统, 该系统是大气的一种近似模型。采用拉格朗日坐标系, 从无粘不可压流体力学方程式出发, 利用摄动方法获得了所讨论系统中界面孤立波迎撞的摄动解。结果表明, 在迎撞前后每个波独立地由 Benjamin-Ono 方程所描述, 即波的形状不发生变化, 迎撞的效应由相移来体现。

关键词 大气孤立波 Benjamin-Ono 方程, 两层流体模型

1 引言

大量的观测表明大气中有传播着的孤立波的运动, 而且这些波之间发生着相互作用, 影响着大气中能量、质量的交换^[1,2]。因此, 这种孤立波间相互作用的研究是一项有重要意义的课题。对于浅水中孤立波的相互作用的研究已十分丰富。例如, Miles^[3], Su 和 Mirie^[4], Gear 和 Grimshaw^[5]等做了许多出色的工作(见文献[6,7]的评论)。但是对于大气这样的无限深分层流体中孤立波相互作用的工作尚未见到。Benjamin^[8], Davis 和 Acrivos^[9], Ono^[10]在研究无限深分层流体时导出了一个非线性积分微分方程, 即 Benjamin-Ono (BO) 方程, 并发现这个方程有代数孤立波解。近年来, 对 BO 方程及其解的研究比较活跃(见文献[11]的评述)。本文研究无限深二层流体中 BO 型孤立波的迎撞, 有别于大多数孤立波研究工作, 本文从拉格朗日观点出发, 利用摄动匹配方法获得了问题的一阶解。结果表明碰撞前后两个 BO 型孤立波的形状保持不变, 相互作用的主要作用是 $O(\varepsilon)$ 的相移, 其中 ε 是垂向特征尺度与水平特征尺度之比。所考虑的模型是真实大气的一种近似, 为研究更接近于实际的连续分层流体奠定了基础。本文第二节给出了拉格朗日坐标下已变形的连续方程和动量方程。第三节将二层流体分别用摄动展开求解, 并在其界面上进行匹配, 得到了所求的方程和相移, 最后作了若干讨论。

2 基本方程

考虑如图 1 所示的二层流体系统。假定上层流体厚度无限深, 下层流体厚度为 d , 上下层流体的密度分别为 ρ_2 和 ρ_1 , 流体假定为不可压理想且互不混溶的。

采用拉格朗日坐标系 (x, z) , 取特征长度 h_0 , 特征时间 $\sqrt{h_0/g}$, 以及特征压力

1995-10-09 收到, 1995-12-08 收到修改稿

* 国家教委和上海市教委科研基金资助的项目

$\rho_0 g h_0$, 无量纲以下所述的方程。设目前流体质点的位置是 (x', z') , ξ , η 为流体质点的水平和垂向排挤, 则有

$$x' = x + \xi, \quad y' = y + \eta. \quad (1)$$

定义压力扰动为

$$p' = p + z + \eta. \quad (2)$$

则对于每层流体有以下的质量守恒和动量守恒方程:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial p'}{\rho \partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial p'}{\rho \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

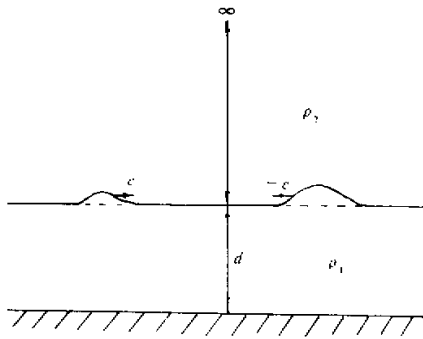


图1 二层深流体模型

边界条件是

$$\eta = 0, \quad \text{在 } z = 0 \text{ 时}, \quad (6)$$

$$\eta = 0, \quad \text{在无穷深处 } z \rightarrow 0. \quad (7)$$

方程(3)~(5)是我们讨论本文问题的出发点。上述方程可望用于其他的理想不可压流体的流动和波动问题。

3 界面孤立波的迎撞

假定两个波在界面上分别以 c 及 $-c$ 的速度作相向运动。初始时刻两个波之间的距离足够远。我们将分别求解上下层流体的运动, 然后在它们的界面上匹配, 获得问题的解。

对于下层流体, 我们求如下形式的解:

$$\eta = \varepsilon \eta_0(\tau, \theta_1, \theta_2, z) + \varepsilon^2 \eta_1 + O(\varepsilon^3), \quad (8)$$

$$p' = \varepsilon p_0(\tau, \theta_1, \theta_2, z) + \varepsilon^2 p_1 + O(\varepsilon^3), \quad (9)$$

$$\xi = \xi_0(\tau, \theta_1, \theta_2, z) + \varepsilon \xi_1 + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

式中

$$\theta_1 = \varepsilon(x - ct) + \varepsilon \psi_1(X, T), \quad (11)$$

$$\theta_2 = \varepsilon(x + ct) + \varepsilon \psi_2(X, T), \quad (12)$$

$$X = \varepsilon x, \quad T = \varepsilon t, \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad (13)$$

ε 是垂向尺度与水平尺度的比值, 在长波近似下假定为小量, 慢变时间 ε 和慢变空间 θ 的引入是为了使系统在一定长时间后非线性色散效应达到平衡。 ψ_1 和 ψ_2 是为了消除解中久期项设置的, 它反映两个波迎撞的相移量。

将(8)~(13)式代入(3)~(5)式, 在首阶可以得到

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial X} + \frac{\partial \eta_0}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial T^2} + \frac{\partial p'_0}{\rho_1 \partial X} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p'_0}{\partial z} = 0. \quad (16)$$

上式可表示成

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \xi_0}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \theta_2^2} \right) + \frac{\partial p'_0}{\rho_1 \partial \theta_1} + \frac{\partial p'_0}{\rho_1 \partial \theta_2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial p'_0}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

其解为

$$\eta_0 = [A_1(\tau, \theta_1) + A_2(\tau, \theta_2)]z/d, \quad (20)$$

$$p'_0 = \rho_1 c^2 [A_1(\tau, \theta_1) + A_2(\tau, \theta_2)]/d, \quad (21)$$

$$\xi_0 = -[B_1(\tau, \theta_1) + B_2(\tau, \theta_2)]/d, \quad (22)$$

其中 $A_{1,2}$ 代表两个波的波幅函数, $A_{1,2}$ 和 $B_{1,2}$ 满足

$$A_{1,2} = \frac{\partial B_{1,2}}{\partial \theta_{1,2}}. \quad (23)$$

在下一阶消去 ξ_1 后, 我们有以下方程

$$-\frac{\partial^3 \eta_1}{\partial z \partial T^2} + \frac{\partial^2 p'_1}{\rho_1 \partial X^2} + H_1 = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial p'_1}{\partial z} = 0, \quad (25)$$

式中

$$H_1 = \frac{\partial I_1}{\partial X} + \frac{\partial^2 I_2}{\partial T^2} + \frac{I_3}{d}, \quad (26)$$

$$I_1 = c^2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} \right) \frac{(A_1 + A_2)}{d^2}, \quad (27)$$

$$I_2 = (A_1 + A_2)^2/d^2, \quad (28)$$

$$I_3 = \frac{\partial A_1}{\partial \theta_1} \left(c^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial T^2} \right) + 2c \frac{\partial^2 A_1}{\partial \theta_1^2} \left(c \frac{\partial \psi_1}{\partial X} + \frac{\partial \psi_1}{\partial T} \right) + 2c \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau \partial \theta_1} \\ + \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} \left(c^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial T^2} \right) + 2c \frac{\partial^2 A_2}{\partial \theta_1^2} \left(c \frac{\partial \psi_2}{\partial X} - \frac{\partial \psi_2}{\partial T} \right) - 2c \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau \partial \theta_2}. \quad (29)$$

从(24)式知当 $T \rightarrow \infty$ 时, η 的解中会出现久期项, 即这些项趋向无穷, 则由消除解中的久期项可得到 A_1 和 A_2 必须满足

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + v_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_1} + \delta'_1 \frac{\partial p'_1}{\partial \theta_1} = 0, \quad (30)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + v_2 A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} + \delta'_2 \frac{\partial p'_1}{\partial \theta_2} = 0, \quad (31)$$

式中

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 = 3/2d, \\ \delta'_1 &= \delta'_2 = 2d/c^2 \rho_1. \end{aligned} \quad (32)$$

式中 p'_1 可由(上层流体)外解与(下层流体)内解匹配关系式来确定。

现考虑上层流体。在上层流体, 流体深度趋于无穷。我们令

$$Z = \varepsilon z, \quad (33)$$

并寻找如下形式的解

$$\eta = \varepsilon \eta_0^*(X, T, Z) + \varepsilon^2 \eta_1^* + \dots, \quad (34)$$

$$p' = \varepsilon^2 p_0^*(X, T, Z) + \varepsilon^3 p_1^* + \dots, \quad (35)$$

$$\xi = \varepsilon \xi_0^*(X, T, Z) + \varepsilon^2 \xi_1^* + \dots, \quad (36)$$

将(34)~(36)式代入(3)~(5)式消去 ξ_0^* 后可得

$$-\frac{\partial^3 \eta_0^*}{\partial T^2 \partial Z} + \frac{\partial^2 p_0^*}{\rho_2 \partial X^2} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial T^2} + \frac{\partial p_0^*}{\rho_2 \partial Z} = 0, \quad (38)$$

上式中消去 p_0^* 后可得到关于 η_0^* 的方程

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial Z^2} \right) = 0. \quad (39)$$

边界条件及匹配条件为

$$\eta_0^*(Z \rightarrow 0) = \eta_0(z = d), \quad (40)$$

$$p_0^*(Z \rightarrow 0) = p_1'(z = d), \quad (41)$$

$$\eta_0^*(Z \rightarrow \infty) = 0, \quad (42)$$

由(39)、(40)及(42)式可解得

$$\eta_0^* = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_1 e^{k_1 z} e^{ik_1 \theta_1} dk_1 \right] + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2 e^{k_2 z} e^{ik_2 \theta_1} dk_2 \right], \quad (43)$$

式中 F_1 和 F_2 是 A_1 和 A_2 的 Fourier 变换。

$$F_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1 e^{-ik_1 \theta_1} d\theta_1, \quad F_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} A_2 e^{-ik_2 \theta_2} d\theta_2. \quad (44)$$

利用 (41) 和 (43) 式可得

$$p_1(z=d) = \frac{c^2}{2} \left[\frac{\partial H(A_1)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial H(A_2)}{\partial \theta_2} \right], \quad (45)$$

其中 $H(A)$ 为 Hilbert 算子

$$H(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\theta')}{\theta' - \theta} d\theta', \quad (46)$$

将 (45) 式代入 (30)、(31) 式中, 可得到 A_1 和 A_2 所满足的 Benjamin-Ono 方程 (BO 方程)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + v_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta_1} + \delta_1 \frac{\partial^2 H(A_1)}{\partial \theta_1^2} = 0, \quad (47)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + v_2 A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} + \delta_2 \frac{\partial^2 H(A_2)}{\partial \theta_2^2} = 0, \quad (48)$$

式中

$$v_1 = v_2 = 3/2d, \quad \delta_1 = \delta_2 = \rho_2 d / \rho_1. \quad (49)$$

下面求相移函数 ψ_1 和 ψ_2 。(24) 式中有些项在这一阶不是久期项, 但在下一阶是久期项, 由消除这些含久期项的项可得

$$\psi_1 = -\frac{1}{2} v_1 \int_{-\infty}^{\theta_2} A_2 d\theta_2 = \frac{3}{4d} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan k_2 (\theta_2 - v_2 \tau) \right] \frac{\alpha_2}{k_2}, \quad (50)$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{2} v_2 \int_{-\infty}^{\theta_1} A_1 d\theta_1 = \frac{3}{4d} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan k_1 (\theta_1 - v_1 \tau) \right] \frac{\alpha_1}{k_1}, \quad (51)$$

式中

$$A_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2}}{1 + k_{1,2}^2 (\theta_{1,2} - v_{1,2} \tau)^2}, \quad \frac{v_{1,2}}{c} = \frac{1}{4} v_{1,2} \alpha_{1,2} = \delta_{1,2} k_{1,2}. \quad (52)$$

上述相移是在拉格朗日坐标系下获得的, 如果要得到欧拉坐标系下的相移函数, 则可由两坐标系的关系式 (1) 找出欧拉坐标系下的相移 ψ_1^* 和 ψ_2^* 为

$$\psi_1^* = \psi_1 + \frac{2}{3} v_1 \int_{-\infty}^{\theta_2} A_2 d\theta_2 = \frac{1}{6} v_1 \int_{-\infty}^{\theta_2} A_2 d\theta_2, \quad (53)$$

$$\psi_2^* = \psi_2 + \frac{2}{3} v_2 \int_{-\infty}^{\theta_1} A_1 d\theta_1 = \frac{1}{6} v_2 \int_{-\infty}^{\theta_1} A_1 d\theta_1, \quad (54)$$

4 讨论

上节结果表明, 二层深流体系统中两个界面孤立波的迎撞的效应体现在二个波相位的改变 ((50)、(51)式或(53)、(54)式), 每个波独立地由 Benjamin-Ono (BO) 方程所控制, 即迎撞前后波形不发生变化。这与浅水中 KdV 型孤立波迎撞的结果相似。

本文采用与以往大多数工作不同的拉格朗日观点来研究波动问题, 虽然本文只求到一阶近似, 然而已体现了这种观点的简洁性。用这种观点可望求到更高阶的结果。虽然

本文未讨论深二层流体系统中界面孤立波的追撞,但估计对这种强相互作用现象,在一阶近似由 BO 方程所控制,而该方程的双波解已求得(见文献[12]),与 KdV 方程所不同的是:两个波作用前后无相位的差异。但在求到高阶时上述结果估计要修正。

最后指出的是:本文虽讨论的是下层流体厚度有限且有固壁,上层流体深度无限的情形,这种情形是真实大气的一种近似模型。对于上层流体厚度有限且有固壁,下层流体深度无限的情形,其结果只要在本文结果的基础上略加修改便能得到,这种模型是对真实海洋的一种近似。

致谢:作者感谢与澳大利亚 Monash 大学 Grimshaw 院士的有益讨论。

参 考 文 献

- 1 Christie, D.R. et al., 1981, Solitary waves in the lower atmosphere, *Nature*, **293**, 46~49.
- 2 Smith, R.K., 1988, Travelling waves and bores in the lower atmosphere: the "Morning Glory" and related phenomena, *Earth Science Review*, **25**, 267~290.
- 3 Miles, J.W., 1977, Obliquely interacting solitary waves, *J. Fluid Mech.*, **79**, 157~169.
- 4 Su, C.H. and Mirie, R.M., 1980, On head-on collision between two solitary waves, *J. Fluid Mech.*, **98**, 509~525.
- 5 Gear, J. and Grimshaw, R., 1984, Weak and strong interaction between internal solitary waves, *Studies in Appl. Math.*, **70**, 233~258.
- 6 Miles, J.W., 1980, Solitary waves, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **12**, 11~43.
- 7 Grimshaw, R. and Zhu, Y., 1994, Oblique interactions between internal solitary waves, *Studies in Appl. Math.*, **92**, 249~270.
- 8 Benjamin, T.B., 1967, Internal waves of permanent form in fluids of great depth, *J. Fluid Mech.*, **29**, 249~270.
- 9 Davis, R.E. and Acrivos, A., 1967, Solitary internal waves in deep water, *J. Fluid Mech.*, **29**, 593~607.
- 10 Ono, H., 1975, Algebraic solitary waves in stratified fluids, *J. Phys. Soc. Japan*, **39**, 1082~1091.
- 11 Miloh, T. et al., 1993, A note on the numerical and N-soliton solutions of the Benjamin-Ono evolution equation, *Wave Motion*, **17**, 1~10.
- 12 Ablowitz, M.J. and Segur, H., 1980, Soliton and the Inverse Scattering Transform, Philadelphia, SIAM.

Interactions of Solitary Waves in the Atmosphere

Zhu Yong

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072)

Abstract In this paper, a two-layer system with the infinitely deep upper layer and finite lower layer is discussed analytically, which is an approximate model for the atmosphere. By using the Lagrangian coordinates, from the basic equations for inviscid incompressible fluids, the perturbation solution for the head-on collision between interfacial solitary waves for the two-layer deep fluid system is obtained. It is shown that each wave is independently described by the Benjamin-Ono (BO) equation before and after collision, that is, the waves do not change their shapes; the effect of interaction is described by the phase shifts.

Key words atmospheric solitary waves Benjamin-Ono equation two-layer fluid model