正压大气中尺度半平衡和准平衡动力学模式*

赵　强　　刘式适**

（北京大学地球物理学系，北京　100871）

摘　要　应用描写正压大气运动的基本方程组，分析了中尺度大气运动的物理特征，指出非平衡强迫运动是引起中尺度重要天气演变的根本原因．中尺度动力学方程组是中尺度动力学理论研究的基础，因此，结合中尺度大气运动的基本特征，依据严格的尺度分析理论和摄动理论，简化基于流体力学和热力学的大气动力学方程组使之能够恰当地描述出中尺度运动的基本特征，对于中尺度动力学的发展是极为必要的。基于非线性平衡方程所得到的半平衡和准平衡动力学模式分别与半地转和准地转模式极为相似，它们可以较精确地描述中尺度大气运动的基本特征，因而，可作为中尺度动力学研究的理论基础。将准平衡动力学模式应用于中尺度涡旋系统的研究，结论表明中尺度平衡涡旋系统主要是受梯度风控制，其流场和气压场的发展演变则由一个演化方程来描写，获得了较为理想的结果。

关键词　中尺度运动　半平衡模式　准平衡模式

1　引言

随着大气科学研究的深入，发展中尺度大气科学的必要性已日益明显。中尺度系统常带来与强对流相联系的暴雨和冰雹等灾害性天气，对国民经济和人民生命财产安全构成严重的威胁。然而，长期以来对中尺度系统的预报一直是一个比较困难的问题，这主要是因为我们对中尺度系统发生发展的机制缺乏了解。中尺度动力学是研究大气中尺度天气系统发生发展规律的大气动力学的一个分支。近年来中尺度动力学的研究取得了一些进展，但由于中尺度运动过程的复杂性和多样性，迄今还没有一个象大尺度运动的准地转理论那样合理和统一的理论，因而中尺度数值模拟得到迅速发展（例如 MM4 和 MM5 系统）。虽然计算机和计算流体力学的飞速发展使人们逐步接近直接求解原始方程的目标，但是在这些研究中主要致力于建立稳定的差分格式上，它的结构与一般的流体力学问题并无区别，气象问题的特征得不到应有的反映，而且为了更深入地理解大气动力学过程，不能仅仅依靠数值方法，相反，对大气动力过程进行深入的理论分析却有助于构造合适的计算方案。因此，在大量基础理论研究和实际应用中，抓住主要矛盾的近似理论和简化方程仍然具有纯数值计算不能替代的价值。对描写大气运动规律的控制方程组进行分析，确定出主要因子与次要因子，然后，在抓住主要矛盾的前提下，对方

1998-01-12 收到，1998-04-20 收到修改稿

* 本文得到国家攀登工程"非线性科学"项目基金和中国科学博士后基金资助

** 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室客座研究员

程组进行合理的简化，这是研究与解决大气动力学中有关问题的一个重要步骤，它不仅使数学处理简化，而且主要是突出有关的问题，以利于深入了解有关问题的主要性质。

目前，大尺度大气动力学以准地转理论为核心标志，已形成了一个比较成熟的基本理论体系。大尺度运动遵循准地转动力学演变，中尺度运动按照什么规律演变？我们力图应用大气动力学的基本原理和摄动方法分析中尺度准平衡运动的演变，从而建立中尺度运动的准平衡动力学框架。虽然中尺度运动基本上是三维空间的，但是为了数学上的方便和动力上的清楚起见，在不影响问题本质的条件下，我们仍然可以采用正压模式，因为它仍然包含着重力和 Coriolis 力作用下流体运动的最一般的特征。而且当动力学方程组被用来进一步了解大气现象时，是可以将其做最大简化的[1]。

2 中尺度的动力学定义

有关中尺度运动的定义差别很大，如 Orlanski[2]将中尺度分为中 α 尺度（200～2000 km）、中 β 尺度（20～200 km）、中 γ 尺度（2～20 km）三类。Emanuel[3]把 Lagrange Rossby 数$Ro=2\pi/Tf_0$（T 是流体质点加速度的特征时间，f_0 是 Coriolis 参数的特征值）约为 1～10 之间，即当某尺度系统出现非地转平流与 Coriolis 加速度都重要时，该系统为中尺度系统。Pielke[4]把中尺度运动定义为：（a）水平尺度足够地大，以致可以应用流体静力方程；（b）水平尺度足够地小，以致 Coriolis 力项相对于平流项和气压梯度力项是小项（尽管它仍然可能是重要的），导致形成的流场，即使在没有摩擦作用情况下也与梯度风关系有着本质的不同。这一中尺度的定义接近于 Orlanski 的中 β 尺度，也与 Emanuel 提出的定义相类似。从动力学角度来考虑，依据扰动尺度 L 和 Rossby 变形半径L_0之比，即 Obukhov 参数$\mu_0=L/L_0$的大小也可以简单地区分大气运动的类型[5]：$\mu_0\gg1$——超长波，$\mu_0\geqslant1$——大尺度运动，$\mu_0\ll1$——中小尺度运动。从理论上说，中尺度系统介于静力平衡与非静力平衡两大运动系统之间，波的频谱很宽，具有一定的复杂性，也是中尺度天气系统至今尚无明确而完善的定义的原因。总之，中尺度系统一般是指 Coriolis 力、气压梯度力和非地转平流项都起重要作用的天气系统，它具有静力近似、滞弹性近似和显著的非地转风特征。它的显著非地转风特征与大尺度系统的准地转特征构成了明显差异，而 Coriolis 力起重要作用和静力近似又成了它和小尺度系统之间的区别，即大致相当于 Orlanski 的中 β 尺度。

3 中尺度运动的物理分析及其应用

正压大气运动的控制方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)h+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

g在地球物理流体力学中常视为被内部层结因子$\Delta\rho/\rho$所约化重力加速度，符号均为常规所用。将方程组（1）的前两式改写为 Lamb 型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(f+\zeta)v=-\frac{\partial E}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+(f+\zeta)u=-\frac{\partial E}{\partial y},\tag{2}$$

其中$\zeta=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$和$E=gh+(u^2+v^2)/2$分别为相对涡度和运动系统的总能量。(2) 式为运动方程，它实际上就表达了惯性力、气压梯度力和 Coriolis 力三者作用下运动的动力学特征。对于定常运动（即力的平衡态），由方程组（2）则有

$$(f+\zeta)v=\frac{\partial E}{\partial x},\qquad (f+\zeta)u=-\frac{\partial E}{\partial y}.\tag{3}$$

这一关系式与中高纬度大尺度地转平衡关系形式上完全相似、但它描述的是惯性力、Coriolis 力和气压梯度力三者之间的平衡态，由于惯性力的作用，运动将呈现出非地转特征，而且在数学上惯性力项表现为强非线性，因此，可称其为非线性平衡。当然，在自然坐标系下，非线性平流项的一部分表现为离心力，也有称其为广义梯度风平衡关系（一般梯度风关系是考虑了曲率影响而略去质点的切线加速度）。对于中尺度运动，如果设法引进（3）式的准平衡假定可能使问题得到简化[6]。若令

$$u^*=\left(1+\frac{\zeta}{f}\right)u,\qquad v^*=\left(1+\frac{\zeta}{f}\right)v.\tag{4}$$

我们称u^*和v^*为相当地转风，则（4）式可改写为$fu^*=-\partial E/\partial y$，$fv^*=\partial E/\partial x$。对于中尺度运动，$f$可视为常数，则由此可以求得

$$D^*=0,\qquad f\zeta^*=\nabla_h^2E.\tag{5}$$

其中D^*和ζ^*分别为相当地转风的散度和涡度，∇_h^2为 Laplace 算子。(5) 式和大尺度地转平衡运动完全相似，地转风散度为零且有$f\zeta=\nabla_h^2\varphi$。另外，由方程组（1）可以导出位涡度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0,\tag{6}$$

其中$q\equiv(f+\zeta)/h$为位涡度。在定常条件下，由（6）式和（3）式可以得到

$$u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}=0,\qquad u\frac{\partial E}{\partial x}+v\frac{\partial E}{\partial y}=0.\tag{7}$$

这表明，在定常条件下中尺度运动的等位涡度线和等能量线也就是流线。对定常流场（平衡运动）的研究是有意义的，其实，导致流场随时间变化的因子，从另一方面来说，就是破坏了定常流场的条件。所以反过来说，分析定常流场的条件，就已经刻划了制约场演变过程因子的作用。因此，对中尺度运动的物理分析，找寻到大气运动内部平衡与非平衡的关系可以应用于诊断分析实际天气系统发生发展的动力学机制。观测事实和理论研究表明，暴雨系统的形成和发展与环境涡度和散度的分布和演变有着十分密切的关系，用涡度方程和散度方程来诊断和分析流场结构比其他方程（如动量方程）更为直接，物理意义也更加清楚。孙淑清[7]在应用散度方程研究我国南方暴雨时，根据暴雨

发生常与低空急流有关的事实，重点研究了水平风场分布不均匀对散度变化的影响，提出了计算

$$A=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{8}$$

的大小来分析散度变化及其与未来暴雨的联系，实例分析取得了较好的效果。然而，在中小尺度运动中非地转涡度$f\zeta'=(f\zeta-\nabla_h^2\varphi)$常常比较大[8]，当$f\zeta'$的值超过$A$时、即使$A$的值为正也不能使低层辐合增强，这时$A$的大小就不能准确地反映散度变化。因此，单独使用$A$来诊断散度变化，有时可能导致很大误差。另一方面，由（1）式可得到散度方程为

$$\frac{\partial D}{\partial t}=(f\zeta-\nabla_h^2\varphi)-A=f\zeta'-A. \tag{9}$$

上式中D为水平散度，考虑中尺度运动时，已略去散度方程（9）中的βu项（$\beta=\partial f/\partial y$）。显然，$A$能正确反映散度变化的条件是非地转涡度（$f\zeta'$）比较小。在中尺度活动区中，非地转涡度所造成的散度变化是散度方程中之大项，可见单独通过计算A来诊断散度变化有一定的局限性。在引入相当地转风$\vec{V}_h^*$ (u^*, v^*)后，相应的散度方程(9) 可以改写为

$$\frac{\partial D}{\partial t}=f\zeta^*-\nabla_h^2 E. \tag{10}$$

由（10）式可以十分清楚地看出散度方程所描述的物理意义，对于中尺度运动，引起散度场发生剧烈变化的原因是ζ^*与E之间不满足准平衡关系$f\zeta^*\approx\nabla_h^2 E$所致，这与大尺度运动中涡度场与位势高度场不满足准地转关系将导致散度发生剧烈变化十分类似。由于（10）式右边两项仅与高度场和风场有关，容易计算，而且可靠性较好，因此，在实际业务中可以通过计算（10）式右边两项的值来诊断散度场的演变趋势。比较(9) 式和（10）式可见，对于中尺度运动，在位势高度场和涡度场满足准地转平衡近似下($f\zeta\approx\nabla_h^2\varphi$)，仍然可以有较强的散度变化（$A$项的作用）。而在能量场与相当地转涡度场满足准平衡近似下($f\zeta^*\approx\nabla_h^2 E$)，散度场则不会有明显的变化（$\partial D/\partial t\approx 0$）。由此可见，准平衡关系（$f\zeta^*\approx\nabla_h^2 E$）较准地转平衡关系（$f\zeta\approx\nabla_h^2\varphi$）能更好地表征中尺度运动的准平衡性质，它综合体现了A项和非地转项（$f\zeta'$）影响散度变化的共同作用，用它来诊断分析散度变化，效果可能会更好。因此，在中尺度诊断分析中引入准平衡关系$f\zeta^*\approx\nabla_h^2 E$是合适的。陈忠明[9]曾利用与（10）式相类似的散度方程、以实例诊断分析大气内部非平衡强迫运动激发暴雨天气的动力机制。在中尺度天气系统发生发展中，散度是一个极为活跃的物理因子，它与中尺度天气系统的形成和暴雨的发生有着比涡度更为密切的关系，低层风辐合的不断产生以及由此而激发出的重力惯性波系统有利于触发中尺度天气系统的发展和暴雨的产生。因此，研究风场中散度的演变、对于了解暴雨天气系统过程的动力学本质是必不可少的。总之，对于水平尺度达几百公里的中尺度大气运动，它存在着如下准平衡关系：$f\zeta^*\approx\nabla_h^2 E$（由推导过程可以看出，它实质上描述的是惯性力、Coriolis力和气压梯度力三者之间的准平衡），它较准地转平衡（$f\zeta\approx\nabla_h^2\varphi$）能更准确地表征中尺度运动的准平衡性质，因此，在中尺度运

动的诊断分析中引入准平衡关系$f\zeta^* \approx \nabla_h^2 E$是合适的。而且其能量场和相当地转涡度场之间的不平衡（$f\zeta^* \neq \nabla_h^2 E$）是引起散度变化的重要原因，由此我们可以应用散度方程（10）诊断分析风场中散度的演变趋势来进行大气内部非平衡强迫运动激发暴雨天气的动力机制研究。

4 中尺度半平衡和准平衡动力学模式

以静态为背景的正压模式方程组（1）可以写为

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u-fv=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v+fu=-\frac{\partial\varphi'}{\partial y},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi'+(c_0^2+\varphi')\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中$\varphi'=gh'$，$c_0=\sqrt{gH}$（H为静态流体的深度，h'为自由面的扰动高度）。Spall 和 McWilliams[10]曾指出，从物理意义上讲，可导出平衡动力学的可能性是当$Ro\ll 1$，则$(Fr)^2/Ro<1$；当$Ro\geqslant 1$，则$Fr<1$，而 Rossby 数和 Froude 数都是用来表征流体的状态。因此，对于中尺度运动，此时小参数就是 Froude 数，其定义为$Fr=U/\sqrt{c_0}$，我们取$\varepsilon=Fr$为问题的小参数。对于中尺度系统，一般认为它是在惯性力、Coriolis 力和气压梯度力准平衡态下的非线性发展演变过程，叶笃正和李麦村[11]在研究中小尺度运动中风场和气压场的适应问题时，曾指出运动适应过程的特征时间$\tau\leqslant L/U$，当力呈准平衡状态时，则运动准定常演变过程的特征时间$\tau\geqslant 10L/U$，即适应过程的特征时间要比演变过程的特征时间小一个量级以上。由于我们的目的是导出描述中尺度运动在力的准平衡（或适应）状态下发展演变特征的方程组，所以取特征时间尺度（τ）大于平流时间尺度（L/U）。另外，散度一般被认为较小，故令

$$\left.\begin{aligned}
&(x,y)=L(x_1,y_1),\quad (u,v)=U(u_1,v_1),\quad t=\left(\frac{L}{\varepsilon U}\right)t_1,\quad f=f_0f_1,\\
&\varphi'=U^2\varphi'_1=f_0UL\varphi'_1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon\left(\frac{U}{L}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

其中下角标为"1"的量表示无量纲量。(12) 式代入方程组（11）可得到其无量纲形式

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\right)u_1-f_1v_1=-\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x_1},\\
&\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\right)v_1+f_1u_1=-\frac{\partial\varphi'_1}{\partial y_1},\\
&\mu_0\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\varphi'_1+(1+\varepsilon\mu_0\varphi'_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中$\mu_0=L/L_0$，$L_0=c_0/f_0$为正压 Rossby 变形半径。我们将u_1、v_1和φ'_1按小参数作如下展开:

$$\left.\begin{aligned}&u_1=u_1^{(0)}+\varepsilon u_1^{(1)}+\varepsilon^2u_1^{(2)}+\cdots,\\&v_1=v_1^{(0)}+\varepsilon v_1^{(1)}+\varepsilon^2v_1^{(2)}+\cdots,\\&\varphi'_1=\varphi'^{(0)}_1+\varepsilon\varphi'^{(1)}_1+\varepsilon^2\varphi'^{(2)}_1+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

把（14）式代入到方程组（13），我们注意到对于中小尺度运动$\mu_0\ll 1$[5]，而且零级近似下大气运动为惯性力、Coriolis 力和气压梯度力三者作用下的平衡运动，由中尺度准平衡运动的物理分析可知此时大气运动应当为水平无辐散。另一方面，与大尺度运动的情况相似，在一级近似中必须保留含μ_0的项，因此，我们可求得（13）式的零级近似和一级近似分别为

$$\left.\begin{aligned}&\left(u_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)u_1^{(0)}-f_1v_1^{(0)}=-\frac{\partial\varphi'^{(0)}_1}{\partial x_1},\\&\left(u_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)v_1^{(0)}+f_1u_1^{(0)}=-\frac{\partial\varphi'^{(0)}_1}{\partial y_1},\\&\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial y_1}=0.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+u_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)u_1^{(0)}+\left(u_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)u_1^{(1)}-f_1v_1^{(1)}=-\frac{\partial\varphi'^{(1)}_1}{\partial x_1},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+u_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)v_1^{(0)}+\left(u_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)v_1^{(1)}+f_1u_1^{(1)}=-\frac{\partial\varphi'^{(1)}_1}{\partial y_1},\\&\mu_0\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+u_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\varphi'^{(0)}_1+\left(u_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\varphi'^{(1)}_1\right]\\&\qquad+\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial y_1}\right)+\mu_0\varphi'^{(0)}_1\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial y_1}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

首先分析零级近似方程组（15）。它不明显含有时间变量，而且运动方程是惯性力、Coriolis 力和气压梯度力三者的平衡运动。零级近似方程组（15）的有量纲形式为

$$\left.\begin{aligned}&\left(u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)u^{(0)}-fv^{(0)}=-\frac{\partial\varphi'^{(0)}}{\partial x},\\&\left(u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}\right)v^{(0)}+fu^{(0)}=-\frac{\partial\varphi'^{(0)}}{\partial y},\\&\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

同大尺度准地转运动的零级近似相比较可以看出，在零级近似下，大尺度运动的地转平衡被中尺度运动的非线性平衡所取代，但是运动仍然具有水平无辐散的特征。由方程组（17）的前两式可得

$$\left.\begin{aligned}&(f+\zeta^{(0)})v^{(0)}=\frac{\partial E^{(0)}}{\partial x},\\&(f+\zeta^{(0)})u^{(0)}=-\frac{\partial E^{(0)}}{\partial y},\\&u^{(0)}\frac{\partial E^{(0)}}{\partial x}+v^{(0)}\frac{\partial E^{(0)}}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

其中$\zeta^{(0)}$和$E^{(0)}$分别为零级近似下相对涡度和大气运动的总能量。这说明零级近似下大气运动总能量的平流为零。由运动无辐散关系可以引入流函数ψ：$u^{(0)}=-\partial\psi/\partial y$，$v^{(0)}=\partial\psi/\partial x$，方程组（17）的前两式可化为所谓非线性平衡方程

$$\nabla_h^2\varphi'^{(0)}=f\nabla_h^2\psi+2J(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y}).\tag{19}$$

其中$J(A,B)\equiv(\partial A/\partial x)(\partial B/\partial y)-(\partial A/\partial y)(\partial B/\partial x)$为 Jacobi 算子．零级近似反映了中尺度运动的基本特征，但它没有反映运动随时间演变的本质。由中尺度准平衡运动物理分析的（7）式和零级近似的（18）式可知，在力的平衡态下物理量的平流为零，因而不能引起大气运动的变化，在第二节我们指出，非平衡强迫运动是引起中尺度重要天气演变的根本原因。为此，需要进一步分析一级近似非平衡运动。由于力的平衡态下物理量的平流为零而且一级近似非平衡量小于零级近似平衡量，所以可做如下的半平衡假定[12]

$$u_1^{(0)}\frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial x_1}+v_1^{(0)}\frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial y_1}=0,\tag{20}$$

其中$S_1^{(1)}$是$u_1^{(1)}$、$v_1^{(1)}$和$\varphi_1'^{(1)}$等。这样，一级近似方程组(16)可以改写为(有量纲形式)

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\right)u^{(0)}-fv^{(1)}=-\frac{\partial\varphi'^{(1)}}{\partial x},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\right)v^{(0)}+fu^{(1)}=-\frac{\partial\varphi'^{(1)}}{\partial y},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi'^{(0)}+c_0^2\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

它包含$u^{(1)}$、$v^{(1)}$和$\varphi'^{(1)}$三个未知量且为闭合方程组。而且在运动方程中被平流的风是用零级近似表征的准平衡量，而平流它的风是一级近似非平衡量$u^{(1)}$和$v^{(1)}$，这同地转动量近似下的半地转模式极为相似[13]。因此，我们称（21）式为半平衡模式，（21）式可以改写为位涡度形式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\right)q_B=0,\tag{22}$$

其中

$$q_B=\ln(f+\zeta^{(0)})-\frac{\varphi'^{(0)}}{c_0^2}\tag{23}$$

称之为准平衡位涡度。由大尺度运动的准地转模式和半地转模式的比较，可以看出，如果半地转模式中的平流风被地转风所替代，那么半地转模式就退化为准地转模式。与此相类似，在这里$u^{(1)}$、$v^{(1)}$如果被$u^{(0)}$、$v^{(0)}$所代替，半平衡模式也就退化为准平衡模式

$$\frac{\partial q_B}{\partial t}+J(\psi, q_B)=0, \tag{24}$$

其中流函数ψ由非线性平衡方程（19）来确定，位涡度$q_B=q_B(\psi)$是ψ的函数，这符合叶笃正和李麦村[14]理论分析所得的结果，即描述绝热和无摩擦大气中各种尺度运动在力的准平衡（或者适应）状态下的发展演变过程的位涡度方程都可以简写成$\partial q/\partial t+J(\psi, q)=0$的形式。Vallis[15]的研究结果也曾得出位涡度方程为（24）式，但其位涡度则为

$$q=f+\zeta^{(0)}-\frac{f_0^2}{gH}[\psi^{(0)}+2\nabla_h^{-2}J(\psi_x^{(0)}, \psi_y^{(0)})] \tag{25}$$

（流函数$\psi^{(0)}$是由非线性平衡方程来确定），这与我们所得到的结果相似，但是（23）式要比 Vallis 所得的位涡度（25）式更为精确些，其实 Vallis 所得到的位涡度只是在准地转位涡度基础上加入 Jacobi 小项而已。比较（24）式和准地转位涡度可以看出，准平衡模式的物理基础是适合于描述中尺度运动基本特征的非线性平衡方程（广义梯度风平衡），它取代了大尺度准地转模式中的地转平衡。

5 中尺度准平衡涡旋动力学

飑线、锋面、锋生动力学等系统虽然都属于中尺度系统的范畴，但由于其问题复杂性，制约过程发展的矛盾不同，很难用同一个数理模型来描述，因此，需要具体问题分别具体研究。由观测知道，大气运动的基本特性之一，就是运动具有明显的涡旋特征。事实上，从实际观测所见到的许多现象，无论是小尺度系统还是大尺度系统都呈现出涡旋的特征，例如，龙卷、台风、气旋、反气旋以及绕极旋涡等都是很清楚的涡旋系统。除此之外，海陆风、Hadley 环流等都可以看作是另一种涡旋运动。这些涡旋运动的形成是与地球自转的作用分不开的，涡旋运动是地球物理流体力学中的一个很重要的特点。在旋转流体中流场总是具有涡量的，无论从二维或者三维的涡量和散度而论，大气运动具有准涡旋运动的特点。尤其在低纬度地区，由于 Coriolis 力比较小，旋衡风的平衡条件相对比较容易满足，大气运动多为涡旋系统。由于大气运动十分复杂，具有各种不同空间尺度的涡旋，它们的性质也各不相同，但各种尺度涡旋系统的一个共同特点是大都有明显的斜压性，涡旋是动能的制造者和能量转换和传递的重要形式。一般来说，动力学研究的往往是其系统简化的数理模型。凌国灿和丁汝[16]提出将地转涡分为内层和外层，并应用尺度分析和摄动法研究了地转涡结构及其运动。在此我们应用尺度分析和摄动法研究正压大气中尺度涡旋系统，希望得到能够恰当地描述其主要特征的控制演变方程。在平面极坐标（r, θ, t）中，方程组（11）式可以改写为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v_r-\left(f+\frac{v_\theta}{r}\right)v_\theta=-\frac{\partial\varphi'}{\partial r},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v_\theta+\left(f+\frac{v_\theta}{r}\right)v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi'+(c_0^2+\varphi')\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rv_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

其中v_r和u_θ分别为径向速度和切向速度。通常在台风区域内除内区外，可令

$$\left.\begin{aligned}&r=Lr_1,\quad t=\left(\frac{L}{\varepsilon U}\right)t_1,\quad f=f_0f_1,\\&v_r=\varepsilon Uv_{r_1},\quad v_\theta=Uv_{\theta_1},\quad \varphi'=U^2\varphi'_1=f_0UL\varphi'_1,\\&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rv_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)=\varepsilon\left(\frac{U}{Lr_1}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial r_1v_{r_1}}{\partial r_1}+\frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial\theta}\right).\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

将（27）式代入方程组（26），得到无量纲方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\left[\varepsilon^2\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+v_{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\right)+\varepsilon\frac{v_{\theta_1}}{r_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]v_{r_1}-\left(f_1+\frac{v_{\theta_1}}{r_1}\right)v_{\theta_1}=-\frac{\partial\varphi'_1}{\partial r_1},\\&\left[\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+v_{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\right)+\frac{v_{\theta_1}}{r_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]v_{\theta_1}+\varepsilon\left(f_1+\frac{v_{\theta_1}}{r_1}\right)v_{r_1}=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\varphi'_1}{\partial\theta},\\&\mu_0\left[\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+v_{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\right)+\frac{v_{\theta_1}}{r_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\varphi'_1+(1+\varepsilon\mu_0\varphi'_1)\frac{1}{r_1}\left(\varepsilon\frac{\partial r_1v_{r_1}}{\partial r_1}+\frac{\partial v_{\theta_1}}{\partial\theta}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

对方程组（28）中的物理量作如下的摄动展开，

$$\left.\begin{aligned}&v_{r_1}=v_{r_1}^{(1)}+\varepsilon v_{r_1}^{(2)}+\varepsilon^2v_{r_1}^{(3)}+\cdots,\\&v_{\theta_1}=v_{\theta_1}^{(0)}+\varepsilon v_{\theta_1}^{(1)}+\varepsilon^2v_{\theta_1}^{(2)}+\cdots,\\&\varphi'_1=\varphi_1'^{(0)}+\varepsilon\varphi_1'^{(1)}+\varepsilon^2\varphi_1'^{(2)}+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

将（29）式代入方程组（28），可以求得它的零级近似和一级近似分别为

$$\frac{v_{\theta_1}^{(0)2}}{r_1}+f_1v_{\theta_1}^{(0)}=\frac{\partial\varphi_1'^{(0)}}{\partial r_1},\qquad\frac{\partial v_{\theta_1}^{(0)}}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi_1'^{(0)}}{\partial\theta}=0.\tag{30}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\frac{v_{\theta_1}^{(0)}}{r_1}\left(\frac{\partial v_{r_1}^{(1)}}{\partial\theta}-2v_{\theta_1}^{(1)}\right)-f_1v_{\theta_1}^{(1)}=-\frac{\partial\varphi_1'^{(1)}}{\partial r_1},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+v_{r_1}^{(1)}\frac{\partial}{\partial r_1}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial\theta}+\frac{v_{r_1}^{(1)}}{r_1}\right)v_{\theta_1}^{(0)}+f_1v_{r_1}^{(1)}=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\varphi_1'^{(1)}}{\partial\theta},\\&\mu_0\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+v_{r_1}^{(1)}\frac{\partial}{\partial r_1}\right)\varphi_1'^{(0)}+\frac{v_{\theta_1}^{(0)}}{r_1}\frac{\partial\varphi_1'^{(1)}}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{r_1}\left[\frac{\partial(r_1v_{r_1}^{(1)})}{\partial r_1}+\frac{\partial v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial\theta}\right]=0.\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

（30）式表示零级近似满足梯度风关系而且是轴对称的。由于$v_{r_1}^{(0)}=0$，因此$\partial v_{\theta_1}^{(0)}/\partial\theta=$

0，实际上表示的就是零级近似是水平无辐散的。令

$$\zeta_1^{(0)} \equiv \frac{1}{r_1}\frac{\partial(r_1 v_{\theta_1}^{(0)})}{\partial r_1}, \qquad D_1^{(1)} \equiv \frac{1}{r_1}\left[\frac{\partial(r_1 v_{r_1}^{(1)})}{\partial r_1} + \frac{\partial v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial\theta}\right]. \tag{32}$$

$\zeta_1^{(0)}$ 为无量纲相对涡度，$D_1^{(1)}$ 为无量纲散度。这样，方程组（31）的后两式可以改写为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial r_1 v_{\theta_1}^{(0)}}{\partial t_1} + (f_1 + \zeta_1^{(0)}) r_1 v_{r_1}^{(1)} + v_{\theta_1}^{(0)}\frac{\partial v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\varphi_1'^{(1)}}{\partial\theta}, \\ &\mu_0\left[\frac{\partial r_1\varphi_1'^{(0)}}{\partial t_1} + \left(\frac{\partial\varphi_1'^{(0)}}{\partial r_1}\right) r_1 v_{r_1}^{(1)} + v_{\theta_1}^{(0)}\frac{\partial\varphi_1'^{(1)}}{\partial\theta}\right] + r_1 D_1^{(1)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

（33）式中的第一式对 r_1 微商，得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial r_1 v_{\theta_1}^{(0)}}{\partial r_1}\right) + (f_1 + \zeta_1^{(0)})\left(r_1 D_1^{(1)} + \mu_0\frac{\partial\varphi_1'^{(0)}}{\partial r_1} r_1 v_{r_1}^{(1)}\right) - \left(f_1 + \frac{v_{\theta_1}^{(0)}}{r_1}\right)\frac{\partial v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial\theta} \\ &+ \left[\frac{\partial\zeta_1^{(0)}}{\partial r_1} - \mu_0(f_1 + \zeta_1^{(0)})\frac{\partial\varphi_1'^{(0)}}{\partial r_1}\right] r_1 v_{r_1}^{(1)} + v_{\theta_1}^{(0)}\frac{\partial^2 v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial r_1\partial\theta} = -\frac{\partial^2\varphi_1'^{(1)}}{\partial r_1\partial\theta}. \end{aligned} \tag{34}$$

上式左端第二项利用（33）式的第二式消去 $D_1^{(1)}$ 和 $r_1 v_{r_1}^{(1)}$，左端的第四项利用（33）式的第一式消去 $r_1 v_{r_1}^{(1)}$，则得到

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\frac{\partial r_1 v_{\theta_1}^{(0)}}{\partial t_1}\right) + \mu_0\frac{1}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\frac{\partial\varphi_1'^{(0)}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1 v_{\theta_1}^{(0)}}{\partial t_1} - \mu_0\frac{\partial r_1\varphi_1'^{(0)}}{\partial t_1} \\ &= -\frac{v_{\theta_1}^{(0)}}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial r_1}\right) + \left[\mu_0 v_{\theta_1}^{(0)} + \frac{1}{(f_1 + \zeta_1^{(0)})^2}\right]\frac{\partial\varphi_1'^{(1)}}{\partial\theta} \\ &\quad - \frac{1}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi_1'^{(1)}}{\partial r_1}\right) + \frac{1}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\left[\left(f_1 + \frac{v_{\theta_1}^{(0)}}{r_1}\right) + \frac{v_{\theta_1}^{(0)}}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\right]\frac{\partial v_{\theta_1}^{(1)}}{\partial\theta}. \end{aligned} \tag{35}$$

上式左端与 θ 无关，而右端各项均为一与 θ 无关的量（零级近似量）与另一函数（一级近似量）对 θ 微商的乘积，由于物理量的单值性，则右端各项对 θ 积分一周后均为零，由此得到

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\frac{\partial r_1 v_{\theta_1}^{(0)}}{\partial t_1}\right) + \frac{\mu_0}{f_1 + \zeta_1^{(0)}}\frac{\partial\varphi_1'^{(0)}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1 v_{\theta_1}^{(0)}}{\partial t_1} - \mu_0\frac{\partial r_1\varphi_1'^{(0)}}{\partial t_1} = 0. \tag{36}$$

这是一级近似方程组（31）消元的结果，它只包含有零级近似量。将（36）式和（30）式还原为有量纲量，得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{f + \zeta^{(0)}}\frac{\partial r v_\theta^{(0)}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial r\varphi'^{(0)}}{\partial t} - \frac{1}{f + \zeta^{(0)}}\frac{\partial\varphi'^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial r v_\theta^{(0)}}{\partial t}\right) = 0, \\ &\frac{v_\theta^{(0)2}}{r} + f v_\theta^{(0)} = \frac{\partial\varphi'^{(0)}}{\partial r}, \qquad \frac{\partial v_\theta^{(0)}}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi'^{(0)}}{\partial\theta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

其中 $\zeta^{(0)} \equiv (1/r)\partial(r v_\theta^{(0)})/\partial r$。（37）式只包含零级近似量，称其为极坐标系中大气中尺

度运动的准平衡模式。由此可见，大气中尺度涡旋系统的运动主要是受梯度风控制，这同 Craig[17]利用 Hamilton 原理和以小参数$\varepsilon=\left(\frac{\text{经向速度特征尺度}}{\text{切向速度特征尺度}}\right)^2$为摄动量所得到的结果是一致的。另外，利用非线性完全适应理论也可以解释大气中成熟的中尺度系统大都是准直线形式（如飑线）或者准对称的涡旋形式（如中尺度涡旋以及稳定的台风等）[5]。而其流场和气压场的演变过程则由演化方程（36）来描写。由方程组（37）所描写的中尺度涡旋是轴对称结构的，至于涡旋系统的非对称结构，螺旋结构等还需要通过高级近似方程去描写。

6　结论

通过对中尺度大气准平衡运动的物理分析，我们得知中尺度运动存在着准平衡关系：$f\zeta^* \approx \nabla_h^2 E$。它实质上描述的是惯性力、Coriolis 力和气压梯度力三者之间的准平衡，它较准地转平衡（$f\zeta \approx \nabla_h^2 \varphi$）能更准确地描述中尺度运动的准平衡性质。而且能量场和相当地转涡度场之间的不平衡（$f\zeta^* \neq \nabla_h^2 E$）是引起大气运动散度变化的重要原因，由此可以应用散度方程（10）式诊断分析风场中散度的演变趋势来进行大气内部非平衡强迫运动激发暴雨天气的动力机制研究。

大尺度准地转模式基本假定的物理基础是大尺度运动的准地转平衡性质，与此类似，我们在本文提出的中尺度半平衡和准平衡动力学模式基本假定的物理基础就是中尺度运动的广义梯度风平衡性质。中尺度运动存在有与大尺度运动等价的性质，即实际观测到的各种尺度天气现象都是它们在力的准平衡状态下非线性演变过程，而这种非线性演变过程就是天气发展的主要动力。因此，我们可以利用这种力的准平衡态来简化数学分析处理问题，进而揭示中尺度运动系统演变的主要动力机制。本文结合中尺度运动的特征，依据严格的尺度分析理论和摄动理论，简化大气动力学方程组使之能够恰当地描述出中尺度大气运动的基本特征，得到了适合于描述中尺度运动基本特征的半平衡和准平衡动力学模式，它们分别与半地转和准地转模式十分相似，并将准平衡模式应用于中尺度准平衡涡旋系统的研究，获得了较好的效果。大量的分析比较研究以及数值模拟都表明非线性平衡方程有很高的精确度[18~20]，因此，用非线性平衡方程替代地转平衡所得到的半平衡和准平衡动力学模式也就可以较为精确地描述中尺度运动的基本特征。另外，应用本文所建立的半平衡和准平衡动力学模式针对某些中尺度系统所作的数值模拟试验，将另文发表。

参 考 文 献

1　Lorenz, E. N., 1960, Maximum simplification of the dynamic equations, *Tellus*, **12**, 243～254.

2　Orlanski, I., 1975, A rational subdivision of scales for atmospheric process, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **56**, 527～530.

3　Emanuel, K. A., 1983, On the dynamical definition(s) of mesoscale, *Mesoscale Meteorology: Theories, Observations and Models*, Reidel Publishing Company, 1～11.

4　Pielke, R. A., 1984, *Mesoscale Meteorological Modeling*, Academic Press.

5 曾庆存，1979，数值天气预报的数学物理基础，第一卷，北京：科学出版社.
6 叶笃正、李麦村，1980，大气各类运动的多时间尺度特性，第二次全国数值天气预报会议论文集，北京：科学出版社，181～192.
7 孙淑清，1982，低层风场在暴雨发生中的动力作用，大气科学，6, 394～403.
8 汪钟兴、孙淑清，1988，暴雨系统中环境涡度场与散度场之间的相互关系，气象学报，46, 492～496.
9 陈忠明，1993，散度方程简化及其应用研究的若干问题，大气科学，17, 540～547.
10 Spall, M. A. and J. C. McWilliams, 1992, Rotational and gravitational influences on the degree of balance in the shallow-water equations, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **64**, 1～29.
11 叶笃正、李麦村，1964，中小尺度运动中风场和气压场的适应，气象学报，34, 309～423.
12 Raymond, D. J., 1992, Nonlinear balance and potential-vorticity thinking at large Rossby number, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **118**, 987～1015.
13 Hoskins, B. J., 1975, The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equations, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 233～242.
14 Yeh, T. C. and M. T. Li, 1982, On the characteristics of the scales of the atmospheric motions, *J. Meteor. Soc. Japan*, **60**, 16～23.
15 Vallis, G. K., 1996, Potential vorticity inversion and balanced equations of motion for rotating and stratified flow, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **122**, 291～322.
16 陵国灿、丁玫，1987，地转涡双时间尺度内解及其运动，中国科学，B辑，770～779.
17 Craig, G., 1991, A three-dimensional generalization of Eliassen's balanced vortex equations derived from Hamilton's principle, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **117**, 435～448.
18 Gent, P. R. and J. C. McWilliams, 1982, Intermediate model solutions to the Lorenz equations: Strange attractors and other phenomena, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 3～13.
19 Whitaker, J. S., 1993, A comparison of primitive and balance equation simulations of baroclinic waves, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1519～1530.
20 Gent, P. R., J. C. McWilliams and C. Snyder, 1994, Scaling analysis of curved fronts: Validity of the balance equations and semigeostrophy, *J. Atmos. Sci.*, **51**, 160～163.

Barotropic Mesoscale Semi-Balanced and Quasi-Balanced Dynamic Models

Zhao Qiang and Liu Shikuo

(*Department of Geophysics, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract The physical characteristics of mesoscale are analyzed, and results show that the unbalanced forced motion is the fundamental cause of the evolutions of some important mesoscale weather systems. The mesoscale dynamics equations are the basis of the theoretical studies of mesoscale atmospheric dynamics. Therefore, according to the characteristics of the mesoscale motion, the formal scaling analysis and the asymptotic theory are used to simplify the governing atmospheric dynamical equations, which are based on fluid dynamics and thermodynamics. Therefore they can describe the basic characteristics of the mesoscale motion more accurately, which is essential for the development of the mesoscale dynamics. In this paper, the semi-balanced and quasi-balanced models based on the nonlinear balance equation are derived; they are in analogy with the semi-geostrophic and quasi-geostrophic models, respectively. Both models can describe the basic characteristics of the mesoscale motion and may be used as bases for the theoretical studies of the mesoscale atmospheric dynamics. The quasi-balanced model is also used to study the mesoscale balanced vortex system, and the conclusion shows that the mesoscale vortex system is mainly controlled by the gradient wind, and the development of its wind and pressure fields are described by an evolutional equation.

Key words mesoscale motion semi-balanced model quasi-balanced model