

几种垂直跳点网格计算频散性的比较研究*

刘宇迪^{1,2)} 季仲贞²⁾ 桂祈军¹⁾ 朱红伟¹⁾

1) (解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

2) (中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

摘 要 为证明两种新的垂直跳点网格——LZ 网格和 LY 网格的有效性, 从频率、群速和出现错误群速的垂直尺度范围等方面与现有的几种垂直跳点网格和时间——垂直跳点网格进行了比较。结果表明: LZ 网格计算频散性与目前使用的最广泛的并且计算频散性也是最佳的 CP 网格相当, 而 LY 网格次之, 从而为模式设计者选取垂直网格提供了又一种选择。

关键词: 数值天气预报; 垂直网格; 频散特征; 群速度

1 引言

关于变量的垂直配置^[1~3], 刘宇迪等^[4]已对现有的几种垂直网格进行过比较, 结果发现: 在可分辨的情况下, L 网格和 CP 网格的频散性最好。不过现有的这几种垂直网格都是基于原始方程组基础之上的。当我们的模式采用涡度和散度方程时, 用这几种网格就无能为力了, 为满足这种需要, 本文设计了两种垂直跳点网格——LZ 网格和 LY 网格, 这两种网格能比较正确地反映重力内波的传播特性。LZ 网格是将涡度、散度和位势高度放在整层上, 垂直速度和温度放在半层上; LY 网格是将涡度和散度放在半层上, 垂直速度和位势高度放在整层上。为证明其有效性, 本文将其计算频散性和以下几种垂直网格进行比较。

到目前为止, 大气模式中使用的垂直网格有以下几种: (1) Lorenz 跳点网格^[5] (简称 L 网格), 是大气模式中广泛使用的一种垂直网格, 它是将水平速度和温度放在同一层上, 垂直速度放在中间层上, 具体变量配置见图 1, 这种网格的优点在于它容易维持守恒定律。(2) Charney-Phillips 跳点网格^[6] (简称 CP 网格), 这也是大气模式中广泛使用的一种垂直网格, 它是将垂直速度和温度放在同一层上, 而水平速度放在半层上, 具体变量配置见图 1, 这种网格的优点在于容易维持准地转流的积分约束条件, 例如容易满足通过水平平流的准地转位涡的守恒。(3) 时间跳点 L 网格 (简称 LTS 网格) 和时间跳点 CP 网格 (简称 CPTS 网格)^[7], 这两种网格不仅考虑了垂直方向上的跳点, 同时还考虑了时间上的跳点, 似乎是一类更为合理的网格。

本文从频率和群速两方面详细地研究包括垂直非跳点网格在内的这几种网格的计算频散性, 并以图示说明, 同时指出出现错误群速的垂直尺度范围。第 2 节给出线性斜压适应系统微分形式的频率和垂直群速; 第 3 节分析垂直跳点网格和时间垂直跳点网格的相应

2000-01-03 收到, 2000-07-03 收到再改稿

* 国家重点基础研究发展规划项目 G1999032801、国家杰出青年科学基金项目 49825109 和国家自然科学基金资助项目 49975020 共同资助

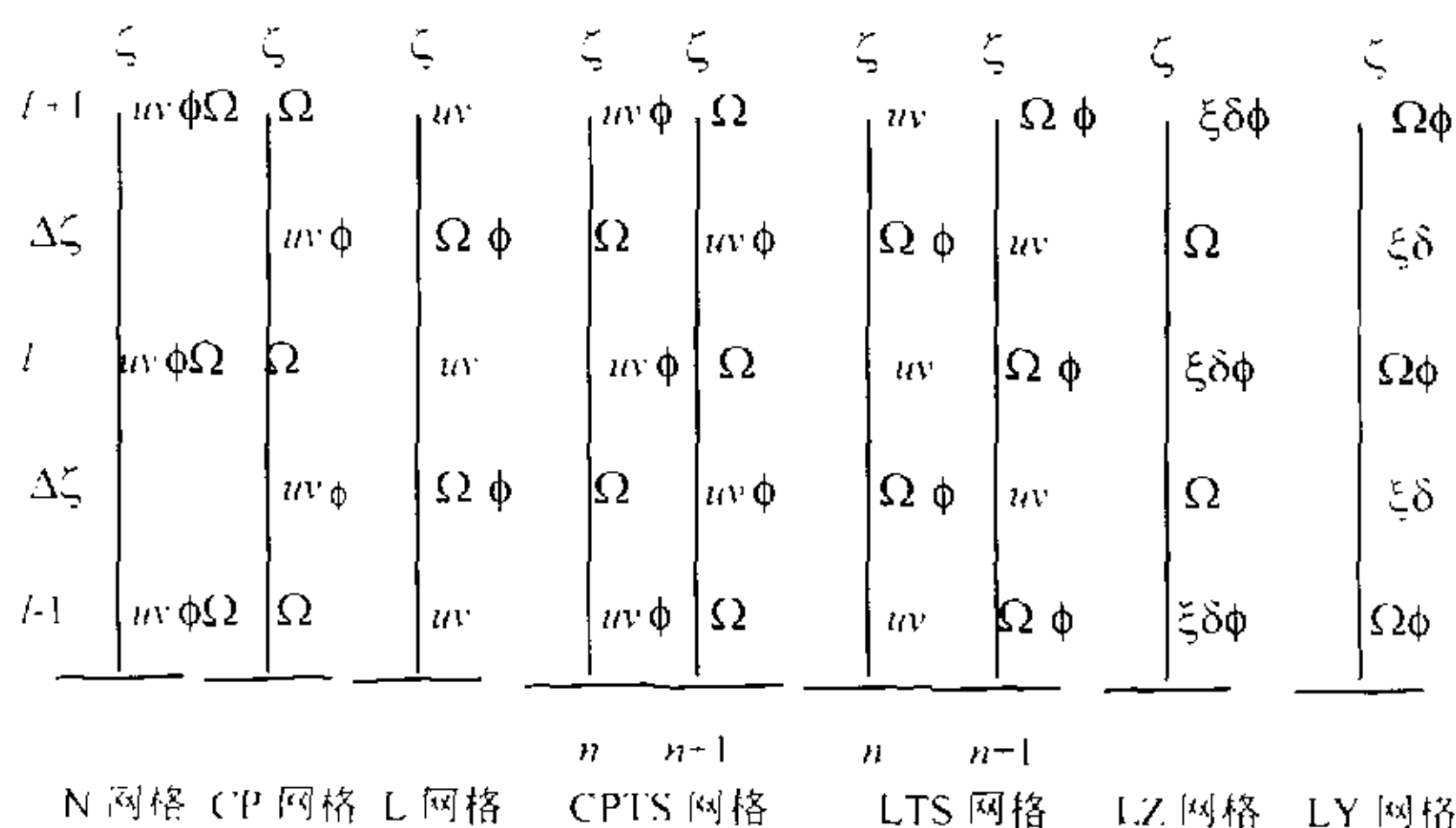


图 1 各种垂直网格的变量配置图

 l 表示垂直层次, $\Delta\zeta$ 表示垂直网格距

频散特征; 第 4 节讨论原始方程大气模式所有垂直网格的计算频散性; 第 5 节为结论。

2 微分情况

下面推导线性斜压适应方程组微分形式的频散特征, 以便和在各种垂直网格上得出的离散频散特征相比较。

从 $\zeta = \ln p$ 坐标系取静力近似线性斜压适应方程组出发:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - fv = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + fu = 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \zeta} + C^2 \Omega = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

这里 u 、 v 和 $\Omega = d\zeta/dt$ 是速度分量, C^2 是常数, ϕ 为位势, f 为定常的科里奥利参数。

设方程组 (1) 的波解为

$$F = \bar{F} \exp[i(kx + my + r\zeta - \omega t)], \quad (2)$$

这里 $k = 2\pi/L_x$, $m = 2\pi/L_y$, $r = 2\pi/L_\zeta$, L_x 、 L_y 、 L_ζ 分别为 x 、 y 、 ζ 方向上的波数和波长, ω 是频率。把 (2) 式代入 (1) 式即可得到以下频散方程:

$$\left(\frac{\omega_{\text{diff}}}{f} \right)^2 = 1 + \lambda^2 (k^2 + m^2) r^{-2}, \quad (3)$$

其中 $\lambda^2 = C^2/f^2$ 是 Rossby 变形半径。从 (3) 式中可以看出, 频率 ω 决定于水平和垂直波数的比率, 即 k/r 、 m/r 。很显然, 微分方程组 (1) 垂直群速分量 ($C_{g,z,\text{diff}}$)

对所有垂直尺度的波动均是负的, 即

$$C_{g,z,\text{diff}} = \frac{\partial \omega}{\partial r} = - \frac{f \lambda^2 (k^2 + m^2) r^{-3}}{\sqrt{1 + \lambda^2 (k^2 + m^2) r^{-2}}} < 0. \quad (4)$$

注意在考虑频散特征时只讨论垂直波数 $r \geq r^* = 2\pi / L^*$ 的情况, 其中 L^* 是相应于 Brunt-Väisälä 振荡的垂直尺度, 在静力近似下, 我们取 $\omega \geq N$, 这里 N 是 Brunt-Väisälä 频率。

下面比较不同网格频散性时, 也主要从频率和群速(指垂直群速分量)两方面考虑。

3 垂直网格的计算频散性

本节讨论线性斜压适应方程组在垂直非跳点网格(简称 N 网格)、垂直跳点网格(包括 CP 网格、LZ 网格、LY 网格和 L 网格)和时间垂直跳点网格(包括 CPTS 网格和 LTS 网格)下的频散特征。由于我们考虑的是垂直网格的计算频散性, 所以水平方向取微分形式。要考虑的垂直网格在图 1 中给出。下面主要分析它们的计算频散性。但实际应用时间垂直跳点网格时应注意的是: 时间垂直跳点网格的高低层在相邻的时间步长内应保持一致, 这样便于处理地形、地面平衡、边界层参数化、上边界条件公式等。

3.1 垂直非跳点网格

垂直非跳点网格, 简称 N 网格, 它是将所有变量置于同一层上, 具体变量配置见图 1。

方程组 (1) 取垂直非跳点网格后即得下列形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - fv = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + fu = 0, \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + C^2 \bar{\Omega} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{\Omega} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

这里用的差分算子和平均算子如下:

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{\Delta z} \left[F\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right) - F\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right) \right], \\ \bar{F}^z = \frac{1}{2} \left[F\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right) + F\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right) \right], \\ \bar{F}_z^z = \frac{1}{2\Delta z} [F(z + \Delta z) - F(z - \Delta z)], \\ \tilde{F}^z = \frac{1}{2} [F(z + \Delta z) + F(z - \Delta z)]. \end{cases} \quad (6)$$

这里 z 代表 ζ 或 t 。设差分方程组 (5) 解的形式为

$$F = \hat{F} \exp[i(kx + my + r\rho\Delta\zeta - n\omega\Delta t)], \quad (7)$$

这里 ρ 和 n 是正整数。

把 (7) 式代入 (5) 式得:

$$\left(\frac{\omega_N}{f}\right)^2 = 1 + \lambda^2(k^2 + m^2)\left(\frac{\sin r\Delta\zeta}{\Delta\zeta}\right)^{-2}. \quad (8)$$

由 (8) 式可得垂直群速分量 $\partial\omega/\partial r$:

$$C_{g,z,N} = \frac{\partial\omega_N}{\partial r} = - \frac{f\lambda^2(k^2 + m^2)\left(\frac{\sin r\Delta\zeta}{\Delta\zeta}\right)^{-3} \cos r\Delta\zeta}{\sqrt{1 + \lambda^2(k^2 + m^2)\left(\frac{\sin r\Delta\zeta}{\Delta\zeta}\right)^{-2}}}. \quad (9)$$

很明显, 对于区间 $4\Delta\zeta > L_\zeta \geq 2\Delta\zeta$ 和 $\frac{4}{3}\Delta\zeta > L_\zeta \geq \Delta\zeta$ 来说, 由于 (9) 式分子中的项使 $C_{g,z,N}$ 的符号与微分情况的正好相反 (正的)。只有 $L_\zeta > 4\Delta\zeta$ 和 $2\Delta\zeta > L_\zeta \geq \frac{4}{3}\Delta\zeta$ 时, $C_{g,z,N}$ 符号才是正确的。

比较计算频散特征 (8)、(9) 式和微分情况的 (3)、(4) 式, 可以看到它们之间的差别随着可分辨垂直波长的缩短而增加。最主要的是, 群速 $C_{g,z,N}$ 的符号对小于 $4\Delta\zeta$ 可分辨的垂直波长是错的。

3.2 Lorenz 网格

Lorenz 网格, 简称 L 网格, 它是将水平速度和温度放在同一层上, 垂直速度放在中间层上, 具体变量配置见图 1。

方程组 (1) 在 L 网格上可写成下列形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - f v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + f u = 0, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + C^2 \Omega = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega_\zeta = 0. \end{cases} \quad (10)$$

方程组 (10) 有下列频散特征:

$$\left(\frac{\omega_L}{f}\right)^2 = 1 + \lambda^2(k^2 + m^2)\left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-2}, \quad (11)$$

$$C_{g,z,L} = \frac{\partial\omega_L}{\partial r} = - \frac{f\lambda^2(k^2 + m^2)\left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-3} \cos \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\sqrt{1 + \lambda^2(k^2 + m^2)\left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-2}}}. \quad (12)$$

比较表达式 (11)、(12) 和垂直非跳点网格 (8)、(9) 式可以看出: 如果垂直增量 $\Delta\zeta$ 用半倍增量 $\Delta\zeta/2$ 代替, L 网格的频散性和垂直非跳点网格的完全一样。因此, L 网格的计算频散性完全与 2 倍垂直精度的垂直非跳点网格的频散性相同。

群速在 $\frac{\Delta\zeta}{2} < L_\zeta < \frac{2}{3}\Delta\zeta$ 和 $\Delta\zeta < L_\zeta < 2\Delta\zeta$ 垂直波长范围内为正, 在 $L_\zeta > 2\Delta\zeta$ 和 $\frac{2}{3}\Delta\zeta \leq L_\zeta \leq \Delta\zeta$ 垂直波长范围内为负。

3.3 Charney-Phillips 网格

Charney-Phillips 网格, 简称 CP 网格, 它是将垂直速度和温度放在同一层上, 而水平速度放在半层上, 具体变量配置见图 1。

对于垂直跳点 CP 网格 (图 1), 方程组 (1) 有以下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - f v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + f u = 0, \\ \frac{\partial \phi_\zeta}{\partial t} + C^2 \Omega = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega_\zeta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

方程组 (13) 不包含任何垂直平均, 因此它对斜压离散系统不会产生噪音。

方程组 (13) 有下列频散特征:

$$\left(\frac{\omega_{CP}}{f}\right)^2 = 1 + \lambda^2(k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-2}. \quad (14)$$

$$C_{g,z,CP} = \frac{\partial \omega_{CP}}{\partial r} = - \frac{f \lambda^2(k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-3} \cos \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\sqrt{1 + \lambda^2(k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-2}}}. \quad (15)$$

群速在 $\frac{\Delta\zeta}{2} < L_\zeta < \frac{2}{3}\Delta\zeta$ 和 $\Delta\zeta < L_\zeta < 2\Delta\zeta$ 垂直波长范围内为正, 在 $L_\zeta > 2\Delta\zeta$ 和 $\frac{2}{3}\Delta\zeta \leq L_\zeta \leq \Delta\zeta$ 垂直波长范围内为负。其频散特征与二倍垂直精度的垂直非跳点网格以及 L 网格的 (11)、(12) 式完全一样, 所以, CP 网格和 L 网格一样被广泛应用。

3.4 Lorenz 的时间跳点网格

Lorenz 的时间跳点网格, 简称 LTS 网格, L 网格的时间跳点就是两个相邻时间步长 t_n 和 t_{n+1} , 除了移动 $\Delta\zeta/2$ 外, 垂直变量分布仍然和 L 网格保持一样, 因此, 这种网格每隔一个时间步长, 变量的垂直分布就重复一次, 具体变量配置见图 1。

另外, 为避免计算垂直积分区域顶层和底层、处理地形、计算地面通量和由静力方

程计算高度以及处理上边界条件等问题, 应使两相邻时间层的高层和底层保持不变即时间不跳点。如果为保持其垂直精度, 也可以在高低层边界附近重新分布层次。

方程组 (1) 采用 LTS 网格的形式为

$$\begin{cases} \bar{u}'_t + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - f\bar{v}' = 0, \\ \bar{v}'_t + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f\bar{u}' = 0, \\ \bar{\varphi}'_{t\zeta} + C^2 \Omega = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega_\zeta = 0, \end{cases} \quad (16)$$

假设 $\omega \Delta t \rightarrow 0$, 由差分方程组 (16) 可得下列频散特征:

$$\left(\frac{\omega_{\text{LTS}}}{f} \right)^2 = \cos^2 \frac{r\Delta\zeta}{2} + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}} \right)^{-2}. \quad (17)$$

$$C_{g,z,\text{LTS}} = \frac{\partial \omega_{\text{LTS}}}{\partial r} = - \frac{f \left[\frac{\Delta\zeta}{4} \sin r\Delta\zeta + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}} \right)^{-3} \cos \frac{r\Delta\zeta}{2} \right]}{\sqrt{\cos^2 \frac{r\Delta\zeta}{2} + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}} \right)^{-2}}}. \quad (18)$$

由于方程组 (16) 中科里奥利项引入了垂直平均 $\bar{u}'$ 和 $\bar{v}'$, 因此得到的 (17) 和 (18) 式不同于 (11) 和 (12) 式, 但是对可分辨垂直尺度 $L_\zeta \geq 2\Delta\zeta$ 而言, 因为 $\sin r\Delta\zeta \geq 0$, $C_{g,z,\text{LTS}}$ 始终为负的。而且其本身又是小参数 $r\Delta\zeta$ 和 $\Delta\zeta$ 的二阶小量, 即 $\cos(r\Delta\zeta/2) \rightarrow 1 + O[r(\Delta\zeta)^2]$ 和 $(\Delta\zeta/4)\sin r\Delta\zeta \rightarrow O[r(\Delta\zeta)^2]$, 因此, LTS 网格的频散特征 (17)、(18) 式与 L 和 CP 网格的频散特征 (11)、(12) 式非常接近。

一般来说, 对于时间跳点垂直网格, 垂直平均算子总是可以由相应的二时间层平均算子 $\bar{F}'$ 来代替, 这样方程组 (16) 中科里奥利项就变为

$$\begin{cases} \bar{u}'_t + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - f\bar{v}' = 0, \\ \bar{v}'_t + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f\bar{u}' = 0, \\ \bar{\varphi}'_{t\zeta} + C^2 \Omega = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega_\zeta = 0. \end{cases} \quad (19)$$

尽管方程组 (19) 中二个运动方程的科里奥利项都包含了时间平均算子, 但方程关于 u^{n+1} 和 v^{n+1} 仍然是线性的。当 $\omega \Delta t \rightarrow 0$ 时, 方程组 (19) 的频散特征接近于 L 网格的 (11)、(12) 式。

3.5 Charney-Phillips 的时间跳点网格

Charney-Phillips 的时间跳点网格, 简称 CPTS 网格, 它是将 CP 网格采用时间跳点的情况, 具体变量配置如图 1 所示。

方程组 (1) 的差分形式为

$$\begin{cases} \bar{u}'_t + \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial x} - f\bar{v}' = 0, \\ \bar{v}'_t + \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial y} + f\bar{u}' = 0, \\ \bar{\phi}'_{t\zeta} + C^2 \bar{\Omega}' = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega_\zeta = 0. \end{cases} \quad (20)$$

假设 $\omega \Delta t \rightarrow 0$, 则其频散特征为

$$\left(\frac{\omega_{\text{CPTS}}}{f} \right)^2 = \cos^2 \frac{r\Delta_\zeta'}{2} \left\{ 1 + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta_\zeta'}{2}}{\frac{\Delta_\zeta'}{2}} \right)^{-2} \right\}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} C_{g,z,\text{CPTS}} = \frac{\partial \omega_{\text{CPTS}}}{\partial r} = & -f \left\{ \frac{\Delta_\zeta'}{2} \sin \frac{r\Delta_\zeta'}{2} \sqrt{1 + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta_\zeta'}{2}}{\frac{\Delta_\zeta'}{2}} \right)^{-2}} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta_\zeta'}{2}}{\frac{\Delta_\zeta'}{2}} \right)^{-3} \cos^2 \frac{r\Delta_\zeta'}{2}}{\sqrt{1 + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta_\zeta'}{2}}{\frac{\Delta_\zeta'}{2}} \right)^{-2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

当 $r\Delta_\zeta'$ 和 Δ_ζ' 非常小时, CPTS 网格 (21)、(22) 式的这些频散特征接近于 LTS 网格的 (17)、(18) 式以及 L 和 CP 网格的 (11)、(12) 式。

群速在 $\Delta_\zeta' / 2 < L_\zeta < \Delta_\zeta'$ 垂直波长范围内为正, 在 $L_\zeta > \Delta_\zeta'$ 垂直波长范围内为负。

如果方程组 (20) 中的垂直平均算子用时间平均算子代替后, 可得到 CPTS 网格的下列形式:

$$\begin{cases} \bar{u}'_t + \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial x} - f\bar{v}' = 0, \\ \bar{v}'_t + \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial y} + f\bar{u}' = 0, \\ \bar{\phi}'_{t\zeta} + C^2 \bar{\Omega}' = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega_\zeta = 0. \end{cases} \quad (23)$$

当 $\omega \Delta t \rightarrow 0$, 方程组 (23) 的频散特征接近于 LTS 网络的频散特征。

3.6 LZ 网格

LZ 网格是将涡度、散度和位势高度放在整层上, 垂直速度和温度放在半层上, 具体变量配置见图 1。

由方程组 (1) 可得到以下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla^2 \varphi - f \zeta = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + f \delta = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \zeta} + C^2 \Omega = 0, \\ \delta + \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

其中 δ 为散度, ζ 为涡度。

将方程组 (24) 在 LZ 网格上离散后为

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla^2 \varphi - f \zeta = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + f \delta = 0, \\ \frac{\partial \varphi_{\zeta}}{\partial t} + C^2 \Omega = 0, \\ \delta + \Omega_{\zeta} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

差分方程组 (25) 有下列频散特征:

$$\left(\frac{\omega_{LZ}}{f} \right)^2 = 1 + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r \Delta \zeta}{2}}{\frac{\Delta \zeta}{2}} \right)^{-2}, \quad (26)$$

$$C_{g,LZ} = \frac{\partial \omega_{LZ}}{\partial r} = - \frac{f \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r \Delta \zeta}{2}}{\frac{\Delta \zeta}{2}} \right)^{-3} \cos \frac{r \Delta \zeta}{2}}{\sqrt{1 + \lambda^2 (k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r \Delta \zeta}{2}}{\frac{\Delta \zeta}{2}} \right)^{-2}}}. \quad (27)$$

群速在 $\frac{\Delta \zeta}{2} < L_{\zeta} < \frac{2}{3} \Delta \zeta$ 和 $\Delta \zeta < L_{\zeta} < 2 \Delta \zeta$ 垂直波长范围内为正, 在 $L_{\zeta} > 2 \Delta \zeta$ 和 $\frac{2}{3} \Delta \zeta \leq L_{\zeta} \leq \Delta \zeta$ 垂直波长范围内为负。

其频散特征与 L 网格和 CP 网格的完全一样。

3.7 LY 网格

LY 网格是将涡度和散度放在半层上, 垂直速度、位势高度和温度放在整层上, 具

体变量配置见图 1。

将 (24) 式在 LY 网格上离散后为

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla^2 \bar{\varphi} - f\zeta = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + f\delta = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + C^2 \bar{\Omega} = 0, \\ \delta + \Omega = 0. \end{cases} \quad (28)$$

差分方程组 (28) 有下列频散特征:

$$\left(\frac{\omega_{LY}}{f}\right)^2 = 1 + \lambda^2(k^2 + m^2) \cos^2 \frac{r\Delta\zeta}{2} \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-2}, \quad (29)$$

$$C_{g,z,LY} = \frac{\partial \omega_{LY}}{\partial r} = - \frac{f\lambda^2(k^2 + m^2) \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-3} \cos \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\sqrt{1 + \lambda^2(k^2 + m^2) \cos^2 \frac{r\Delta\zeta}{2} \left(\frac{\sin \frac{r\Delta\zeta}{2}}{\frac{\Delta\zeta}{2}}\right)^{-2}}}. \quad (30)$$

群速在 $\frac{\Delta\zeta}{2} < L_\zeta < \frac{2}{3}\Delta\zeta$ 和 $\Delta\zeta < L_\zeta < 2\Delta\zeta$ 垂直波长范围内为正, 在 $L_\zeta > 2\Delta\zeta$ 和 $\frac{2}{3}\Delta\zeta \leq L_\zeta \leq \Delta\zeta$ 垂直波长范围内为负。

4 讨论

下面比较在第 3 节中给出的垂直网格的频散特征。

由于 L 网格、LZ 网格和 CP 网格的频散特征相同, 所以以下讨论得到的关于 LZ 网格的结论对 CP 网格和 L 网格仍然适用。为比较方便, 图 2 给出了 N 网格、LZ 网格、LTS 网格、CP 网格和 LY 网格的频率图, 图中的横坐标为 $r\Delta\zeta$, 纵坐标为 ω/f 。

从图 2 中可以看出, 除了 N 网格外, 其他网格的频率都和解析频率一样, 随着波数的增大 (或随着波长的缩短) 而减小, 为说明各种网格的频率随波长减小的幅度, 我们计算了各种网格计算频率的相对误差 R (见图 3):

$$R_j^i = \frac{C_j^i - C_{j,\text{diff}}}{C_{j,\text{diff}}},$$

其中上标代表网格类别, 下标代表计算频率或群速。从图 3 中可以看出: LZ 网格的频率相对误差最小, 其次是 LTS 网格, 误差最大的是 N 网格, 其中 LTS 网格和 CPTS 网格的频率随波数的增大比解析频率减小得快, 而 N 网格的频率比解析频率减小得

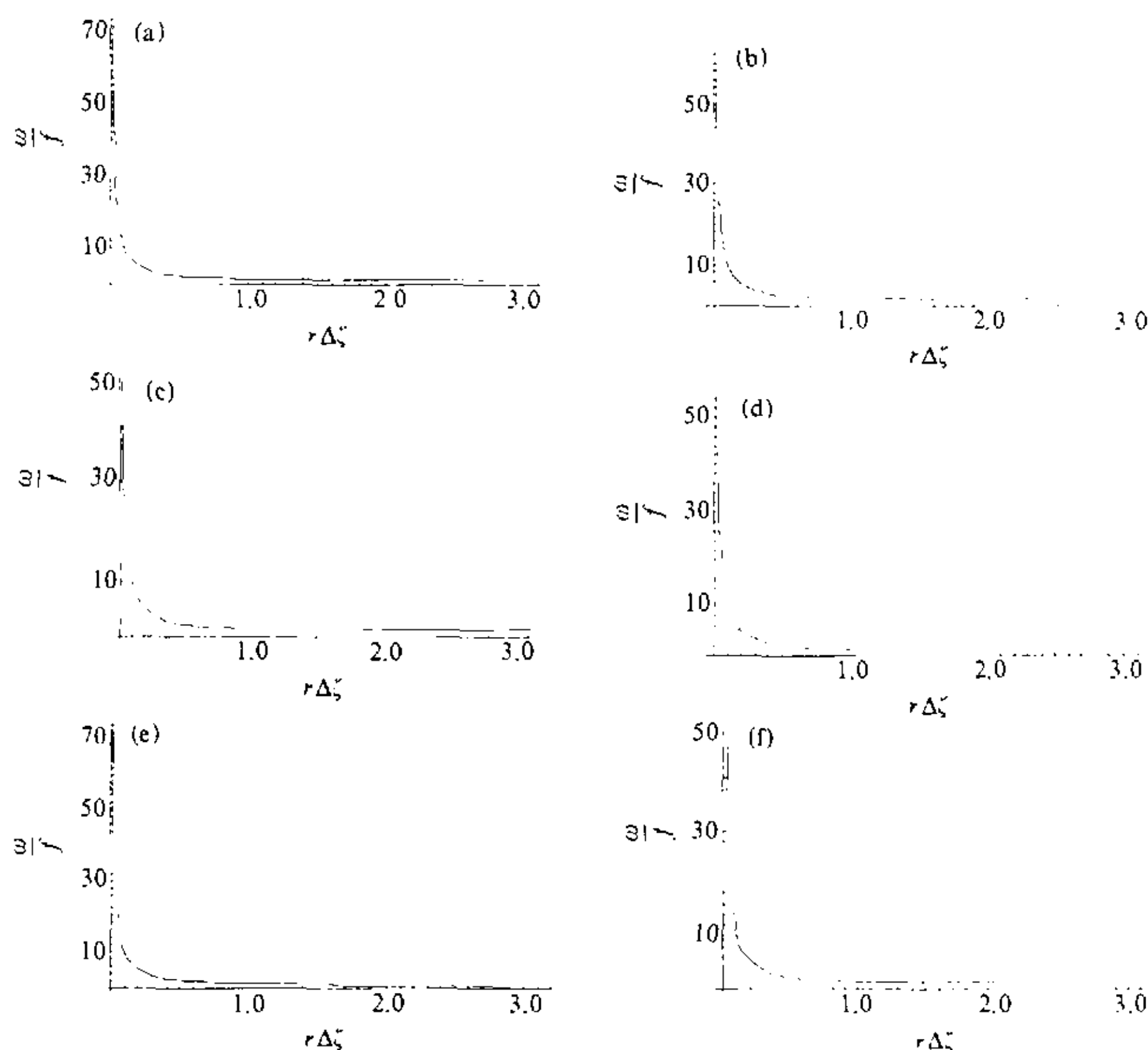


图 2 各种垂直网格的频率图

(a) 解析频率; (b) N 网格; (c) LZ 网格; (d) LTS 网格; (e) CPTS 网格; (f) LY 网格

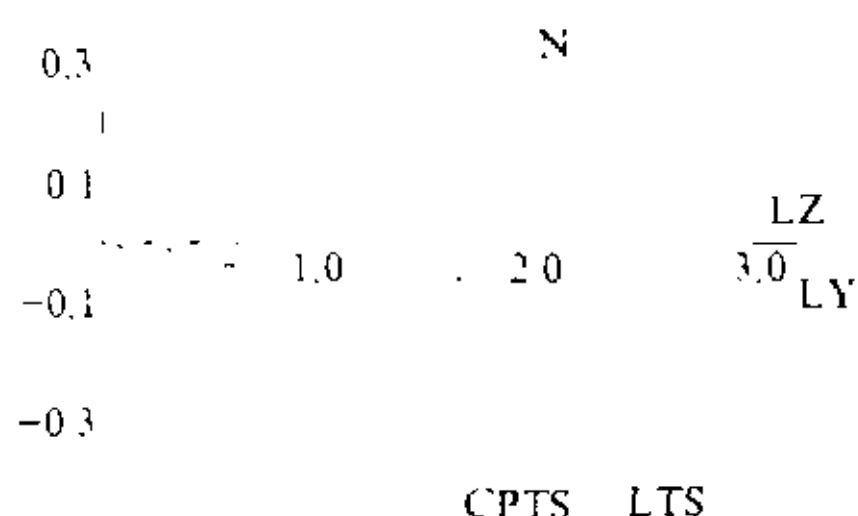


图 3 各种垂直网格的频率相对误差图

横坐标为 $r\Delta\zeta$, 纵坐标为相对误差

慢, 但 LZ 网格和 LY 网格的频率与解析频率几乎相当 (其中二者略有差异, LZ 网格的频率随波数的增大较解析频率稍快, 而 LY 网格的频率随波数的增大较解析频率稍慢)。由此可见, 从频率的角度来看, LZ 网格和 LY 网格的计算频散性最好。

图 4 为各种网格的群速图, 图中的横坐标为 $r\Delta\zeta$, 纵坐标为 $C_{g,z}/f$, 从图中可以看出, 只有 N 网格在 $r\Delta\zeta = \pi$ 处出现了正群速, 其他

网格群速的变化趋势与解析群速一致, 但略有差别。为比较各种网格与解析群速的差别, 我们也计算了各种网格计算群速的相对误差 R (见图 5), 从图 5 中可以看出: LZ 网格的计算群速与解析群速相差无几, 其次是 LY 网格, 最差的是 N 网格, LTS 网格和 CPTS 网格的群速随波数的增大比解析群速增长得快, 而 N 网格的群速比解析群速减小要快得多, 仅有 LZ 网格和 LY 网格的群速与解析群速相当, 其中 LY 网格产生的

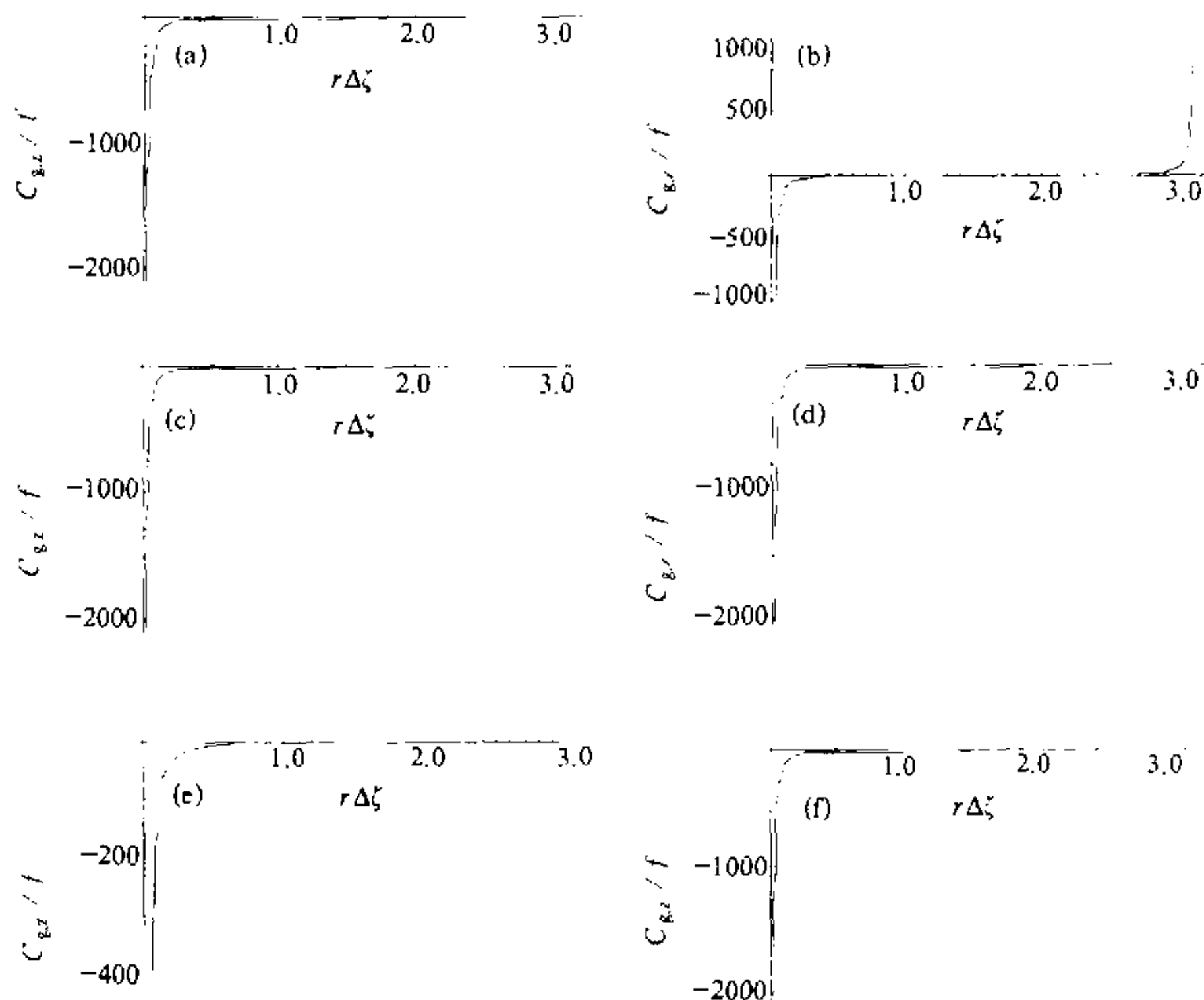


图4 各种垂直网格的群速图

(a) 解析频率; (b) N 网格; (c) LZ 网格; (d) LTS 网格; (e) CPTS 网格; (f) LY 网格

群速误差较 LZ 网格稍大些, 但和其他网格比, 二者的差别可忽略不计。由此可见, 从群速的角度来看, LZ 网格的计算频散性最好, LY 网格次之。

再看出现错误群速的垂直尺度范围: 解析群速对所有垂直尺度波动均为负的, 而每种网格出现正群速和负群速的垂直尺度范围列于表 1。

从表中可见: 在可分辨的垂直尺度范围, L 网格、CP 网格、LZ 网格、LY 网格、LTS 网格和 CPTS 网格的群速均为负的, 这与解析群速一致。并且 CPTS 网格出现负群速的垂直尺度最小, 最接近解析群速。同时它们仅在不可分辨的垂直尺度范围内才出现正群速, 并且 CPTS 网格出现正群速的垂直尺度范围最小, 而 LZ 网格和 LY 网格出现正群速的范围稍大些。这些网格中最差的为 N 网格, 在可分辨垂直尺度范围内, 它只有大于 4 倍垂直格距时才出现负群速, 小于 4 倍垂直格距波动的群速符号都是错的。这意味着, 垂直非跳点网格, 在

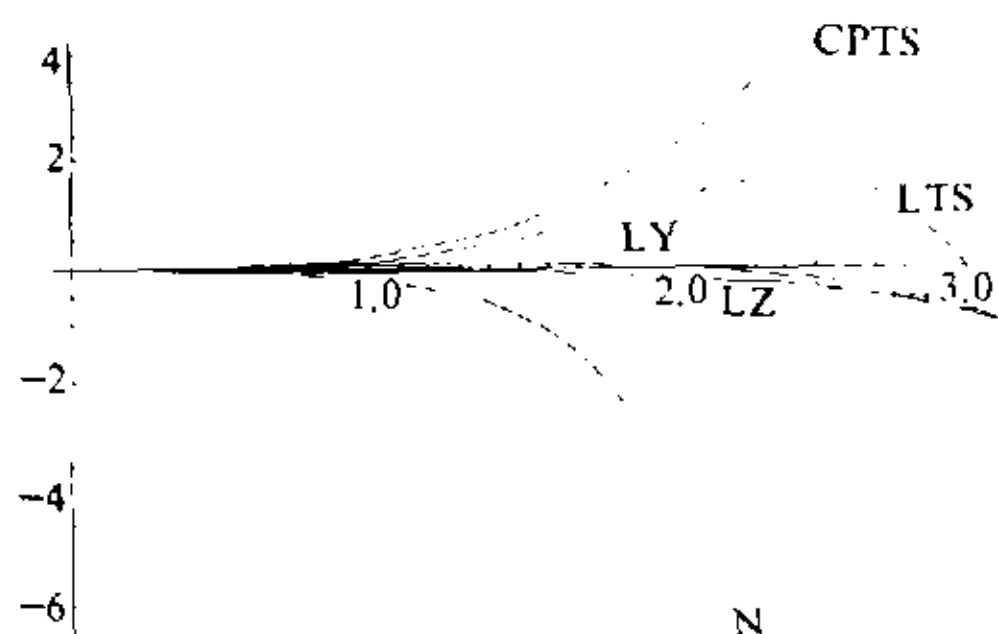


图5 各种垂直网格的群速相对误差图

横坐标为 $r\Delta\zeta$, 纵坐标为相对误差

表 1 各种垂直网格出现正群速和负群速的垂直尺度范围

	N 网格	L、CP、LZ、LY、LTS 网格	CPTS 网格
群速 > 0	$4\Delta\zeta > L_z \geq 2\Delta\zeta$ $\frac{4}{3}\Delta\zeta > L_z \geq \Delta\zeta$	$2\Delta\zeta > L_z \geq \Delta\zeta$ $\frac{2}{3}\Delta\zeta > L_z \geq \frac{1}{2}\Delta\zeta$	$\Delta\zeta > L_z \geq \Delta\zeta/2$
群速 < 0	$L_z \geq 4\Delta\zeta$ $\frac{4}{3}\Delta\zeta \leq L_z \leq 2\Delta\zeta$	$L_z \geq 2\Delta\zeta$ $\Delta\zeta > L_z \geq \frac{2}{3}\Delta\zeta$	$L_z > \Delta\zeta$

这个范围应采用合适的滤波器来控制噪音。由此可见，从出现错误群速的垂直尺度范围来讲，CPTS 网格、LTS 网格、L 网格、CP 网格、LZ 网格和 LY 网格对于大于 2 倍垂直格距的波动群速为负，与解析情况一致。

下面分析各种网格出现偏差的原因。

(1) N 网格，它是非跳点的，由于 ϕ 和 Ω 定义在同一层上，所以垂直动量方程中 $\partial\phi/\partial\zeta$ 和连续方程中的 $\partial\Omega/\partial\zeta$ 必然要涉及到平均，这样就会“藏”有噪音，因此这种垂直网格很少被采用。

(2) L 网格，由于水平速度和温度放在同一层上，垂直速度放在中间层上，所以垂直动量方程中 $\partial\phi/\partial\zeta$ 需要平均而连续方程中的 $\partial\Omega/\partial\zeta$ 则不需要平均，这样含有的噪音就少些，因此其频散性就好。

(3) CP 网格，由于该线性斜压适应方程组是取静力近似的，故没有温度场，这样 CP 网格就和 L 网格接近了，因此得到的频散特征与 L 网格一样，CP 网格差分方程组中未涉及一个平均量，故其不会产生噪音。

(4) LTS 网格和 CPTS 网格，它们是 L 网格和 CP 网格采用时间跳点的情况，但由于科里奥利项中涉及到垂直平均，因此比 L 网格和 CP 网格产生的噪音大些。

(5) LZ 网格，这是本文提出的一种垂直跳点网格，它是将涡度、散度和位势高度放在整层上，垂直速度和温度放在半层上。这样，差分方程组中就不会有平均量，所以也就没有噪音，因此其频散性很好。

(6) LY 网格，这也是一种新的垂直跳点网格，它是将涡度和散度放在半层上，垂直速度、温度和位势高度放在整层上。这样，散度方程中的 $\nabla^2\phi$ 就要涉及到平均，因此就会产生噪音。

5 结论

由以上讨论可得到下面结论：

(1) 综合来看，在可分辨的情况下，LZ 网格、L 网格、CP 网格和 LY 网格的频散性最好。

(2) 垂直跳点网格中，CP 网格、LZ 网格、LY 网格和 L 网格都有较好的计算频散性，但 CP 网格和 LZ 网格对斜压离散系统不产生噪音。因此 CP 网格和 LZ 网格比 L 网格更好。

(3) 所有垂直跳点网格和时间垂直跳点网格的垂直群速分量对可分辨尺度 $L \geq 2\Delta\zeta$

都有正确的符号, 而垂直非跳点网格其符号在 $2\Delta\zeta \leq L < 4\Delta\zeta$ 尺度范围内是错的。

(4) 对于时间垂直跳点网格, 当垂直平均算子用时间平均算子代替时, 其计算频散性与 L 网格和 CP 网格的相当。

(5) 本文提出的 LZ 网格计算频散性和目前最好的垂直跳点网格 CP 网格相当, 而 LY 网格较 LZ 网格稍逊色些。

参 考 文 献

- 1 Arakawa, A. and M. S. Suarez, Vertical differencing of the primitive equations in sigma coordinates, *Mon. Wea. Rev.*, 1983, **111**, 34~45.
- 2 Arakawa, A. and S. Moorthi, Baroclinic instability in vertically discrete systems, *J. Atmos. Sci.*, 1988, **45**, 1688~1707.
- 3 Juang, H.-M. H., A spectral fully compressible nonhydrostatic mesoscale model in hydrostatic sigma coordinates: Formulation and preliminary results, *Meteor. Atmos. Phys.*, 1992, **50**, 75~88.
- 4 刘宇迪等, 水平网格计算频散性的研究, *应用气象学报*, 2001, **12**(2), 140~149.
- 5 Lorenz, E. N., Energy and numerical weather prediction, *Tellus*, 1960, **12**, 364~373.
- 6 Charney, J. C. and N. A. Phillips, Numerical integration of the quasigeostrophic equation for barotropic and simple baroclinic flows, *J. Meteor.*, 1953, **10**, 17~29.
- 7 Fox-Rabinovitz, M. S., Computational dispersion properties of vertical grids for atmospheric models, in *Proc 13th World Congress on Computational and Applied Mathematics*, Dublin, Ireland, International Association for Mathematics and Computers in Simulation, 1991, 579~580.

Computational Dispersion Properties of Some Vertically Staggered Grids

Liu Yudi¹⁾, Ji Zhongzhen²⁾, Gui Qijun¹⁾ and Zhu Hongwei¹⁾

1) (Meteorological College, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101)

2) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract Two new vertically staggered grids, LZ grid and LY grid, are introduced. To account for their validities, the computational dispersion properties of LZ grid and LY grid are compared with all the other vertically staggered grids in terms of frequency and group velocity characteristics and the vertical scale ranges with group velocities of the wrong sign. Its result shows that the dispersion properties of the LZ grid are the same as those of the CP grid which is widely used and is the most optimal vertically staggered grid, and LY grid is the second one. Thus, it may provide additional choice of the appropriately vertical grid for modelers.

Key words: numerical weather prediction; vertically grid; dispersion property; group velocity