第28卷第1期　　大　气　科　学　　Vol. 28　No. 1
2004 年 1 月　　Chinese Journal of Atmospheric Sciences　　Jan.　2004

地球旋转水平分量对 Rossby 波的影响 *

赵　强　刘式适

（北京大学物理学院大气科学系，北京 100871）

摘　要　利用合理的 β 平面近似方程组，研究 β 效应和地球旋转水平分量共同作用下大气中 Rossby 波动的特征。结果分析表明，若扰动与纬度有关，科里奥利参数分量 $f_H=2\Omega\cos\varphi$ 将影响波动传播的频率特征，并加强水平散度对斜压 Rossby 波的作用；如果扰动与纬度无关，则科里奥利参数分量 f_H 的影响消失。

关键词： 科里奥利力；β 效应；Rossby 波

文章编号　1006-9895（2004）01-0146-05　　**中图分类号**　P433　　**文献标识码**　A

1　引言

地球旋转对于地球物理流体力学中的许多现象都有深刻影响，它的作用是通过在流体动力学 Navier-Stokes 方程中出现额外加速度项 $-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V}$，其中 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega(0,\cos\varphi,\sin\varphi)$ 为科里奥利矢量，$\boldsymbol{V}=(u,v,w)$ 是三维速度矢量，Ω 是地球旋转角速度，φ 是纬度。省略地球旋转作用的水平分量（出现在动量方程的纬向和垂直分量上）可以说是"传统近似"，然而就动力学角度而言也一直是个有争议的问题[1~4]。近年来，在地球物理流体动力学的许多研究中，科里奥利参数分量 $f_H=2\Omega\cos\varphi$ 的作用也越来越引起人们的重视[5~8]。White 等[6]和 Burger [9]通过对纬向动量平衡的尺度分析表明，对于行星尺度的大气运动，保留 $-2\Omega w\cos\varphi$ 是可取的。如果在纬向动量方程中保留了 $-2\Omega w\cos\varphi$ 项，那么为了保持能量守恒的一致性，在垂直动量方程中也必须保留 $-2\Omega w\cos\varphi$ 项，即科里奥利力对流体运动不作功。而且，我们可以证明在大尺度运动（特征尺度 $L=10^6$ m，$U=10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ 和 $H=10^4$ m）中，同 $-2\Omega u\cos\varphi$ 相比较 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 是可以省略的，

$$\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right|\sim\frac{UW}{L}\ \frac{U^2H}{L^2}\Rightarrow\frac{|\ \mathrm{d}w/\mathrm{d}t\ |}{|\ 2\Omega u\ |}\ \frac{UH}{L^2}=\frac{H}{L}Ro\sim10^{-3}. \tag{1}$$

Draghici[7]注意到在中尺度运动（$L=10^5$ m，$H=10^4$ m，$Ro\sim1$）的范围内也有 $-2\Omega u\cos\varphi$ 大于 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$，因此，他认为在这种情况下 $-2\Omega u\cos\varphi$ 代表着非常重要的非静力效应，尤其是纬向风速比较大的情况。尽管 $-2\Omega u\cos\varphi$ 与重力相比较是很小的，因此在垂直动量方程中的 $-2\Omega u\cos\varphi$ 项就显得无足轻重，但是，这并不是 $-2\Omega u\cos\varphi$ 重要性的普遍度量。例如，对于中纬度大尺度准地转运动，根据实际经验我们知道地转偏差和地转风相比较是很小的，但是它体现了运动的不平衡性，是引起天气系统发生发展的一个重要因子。因此，有必要分析科里奥利力水平分量在大气动力学中的作用。

2002-04-15 收到，2002-07-24 收到修改稿

* 高等学校骨干教师资助计划项目

2 基本方程组及结果分析

考虑完整科里奥利力作用，绝热和无摩擦 Boussinesq 流体运动的控制方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} - f_{\mathrm{H}}w, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + fu = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - g\dfrac{\theta}{\theta_0} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial z} + f_{\mathrm{H}}u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中，$\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y + w\,\partial/\partial z$，$\theta_0$ 为位温的典型值，其他符号如常规所用。Grimshaw[10] 曾指出合理的 β 平面近似方程组中科里奥利参数的水平分量为常数，垂直分量随纬度变化，这种特性使得 β 平面近似方程组仍然保持原方程组角动量守恒和涡度守恒原理，Grimshaw 还详细分析了科里奥利力水平分量对重力内波的影响。因此，在方程组（2）中 f_H 被认为常数，f 随纬度变化，并假定科里奥利参数随纬度变化较小，即

$$f = f_0 + \beta y, \quad |y| \ll f_0, \tag{3}$$

其中，f_0 和 β 为常数。为了讨论大尺度扰动的特征，根据（1）式可先将方程组（2）中 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 略去，然后将其相对于静止状态线性化，即引进小扰动：$u=u'$，$v=v'$，$w=w'$，$\phi=\bar{\phi}(z)+\phi'$，$\theta=\bar{\theta}(z)+\theta'$。其中 $\bar{\phi}(z)$ 和 $\bar{\theta}(z)$ 分别代表基本位势高度场和位温场，基本状态满足静力平衡 $g\bar{\theta}/\theta_0 = \partial\bar{\phi}/\partial z$。线性化后的方程组（消去变量 θ' 和略去撇号）为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - f_H w, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + N^2 w = f_H\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{7}$$

其中 $N^2 = (g/\theta_0)\partial\bar{\theta}/\partial z$（$N$ 即是 Brunt-Väisälä 频率）。为了讨论大气波动的基本特征，需要确定大气运动中波长与频率之间的色散关系。将（4）式对 z 微商，然后将（6）式代入，消去 w，则有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z} - f_H\frac{\partial}{\partial x}\right)u - \left(f\frac{\partial}{\partial z} + f_H\frac{\partial}{\partial y}\right)v = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z}. \tag{8}$$

将（7）式对 z 微商，然后将（6）式代入，消去 w，则有

$$\left(N^2\frac{\partial}{\partial x} + f_H\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}\right)u + N^2\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^3\phi}{\partial t\,\partial z^2}. \tag{9}$$

将（8）式作$\partial/(\partial t\,\partial z)$运算，（9）式作$\partial/\partial x$运算，然后两式相加消去$\phi$，则有

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\,\partial z^2}+N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=\left(f\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial z^2}+f_H\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y\,\partial z}-N^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right)v. \tag{10}$$

将（5）式作$\partial/\partial t\partial z^2$运算，（9）式作$\partial/\partial y$运算，然后两式相加消去$\phi$，则有

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\,\partial z^2}+N^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v=-\left(N^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+f\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial z^2}+f_H\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y\,\partial z}\right)u. \tag{11}$$

由（10）式和（11）式两式消去u，并忽略含βf_H的小项，则有

$$Lv=0. \tag{12}$$

其中，算子L为

$$L\equiv\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial z^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2ff_H\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+f_H^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]+N^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2+\beta\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}, \tag{13}$$

$$\nabla_h^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{14}$$

由（3）式可知，在（12）式中可以用f_0来代替f求近似解。应用正交模法时可假定方程组（12）有如下形式的谐波解，

$$v=V\exp[\mathrm{i}(kx+ly+nz-\omega t)], \tag{15}$$

其中，k、l和n分别为纬向波数、经向波数和垂直方向波数；ω为圆频率；V为振幅。将（15）式代入（12）式，得到

$$\omega n^2\{\omega[(-\omega^2n^2+f_0^2n^2)+f_0f_Hnl+f_H^2l^2]+N^2[\omega(k^2+l^2)+\beta k]\}=0. \tag{16}$$

$\omega=0$对应于定常态解，我们不予考虑。显然，频率方程（16）是ω的三次代数方程，其准确解比较复杂，但其近似解的物理意义很清楚。对于低频 Rossby 波，可略去（16）式$\{\}$中的ω^3项，则有：

$$\omega=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+(f_0n+f_Hl)^2/N^2}=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+(f_0+f_Hl/n)^2/c_1^2}, \tag{17}$$

其中，$c_1\equiv N/n$为重力内波波速。如果不考虑科里奥利力分量f_H的作用，则（17）式退化为

$$\omega=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+f_0^2n^2/N^2}=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+\lambda^2}. \tag{18}$$

上式就是斜压准地转 Rossby 波的圆频率，其中$\lambda=f_0/c_1$，它反映水平散度的作用。显然，考虑f_H的作用可以加强水平散度对斜压 Rossby 波的影响，这不难理解，因为考虑科里奥利力水平分量的作用，就必须考虑垂直速度［见方程组（2）中的第1式或者公式（4)］，而垂直速度的变化又直接影响水平散度的变化［见方程组（2）中的第4式或者公式（6)］。散度对一般 Rossby 长波的波速影响较小，可以忽略不计，但对于波长非常长的长波也就是超长波，散度对波速的影响是不能忽略的。另外，散度对一般 Rossby 长波的波速作用虽然很小，可是在能量传送方面却有很大影响。（17）式描述的是有科里奥利参数分量f_H影响的斜压 Rossby 波动传播的频率特征，与未考虑科里奥利参数分量f_H作用所得结果是不同的。由（17）式可以明显看出科里奥利参数分量f_H对波动的影响。对于扰动与y无关（即$l=0$），波动频率也与f_H无关，可见f_H的影响消失。取纬度$\varphi=60°$，地球自转角速度$\Omega=7.292\times10^{-5}$，地球半径$a=$

6.37×10^6 m，重力波速的平方 $c_1^2=300$ m s^{-1} 以及波长 $L_x=6\times10^6$ m，$L_z=10^4$ m，$L_y=0$～6×10^6 m 之间变化，则相应的 $\beta=2\Omega\cos\varphi/a$，$f_0=2\Omega\sin\varphi$，$f_H=2\Omega\cos\varphi$，$k=2\pi/L_x$，$l=2\pi/L_y$，$n=2\pi/L_z$ 都可以计算，然后根据（17）和（18）两式就可以确定 Rossby 波的圆频率 ω 随经向波长 L_y 的变化（图 1）。显而易见，随扰动经向尺度增大，有无科里奥利参数分量 f_H 作用所得结果是有差别的。

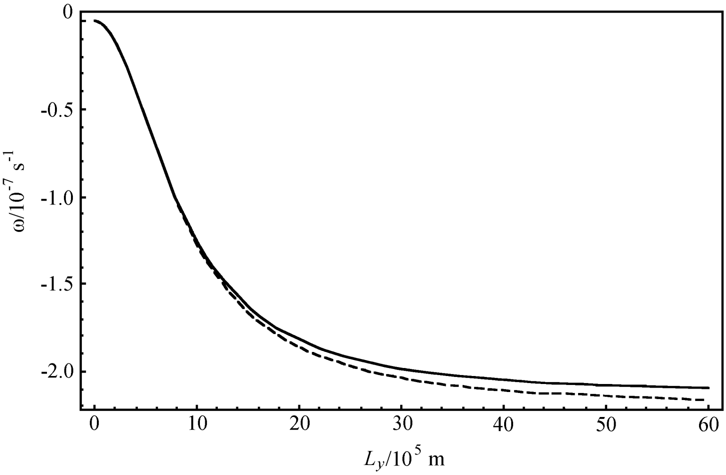

图 1　Rossby 波的圆频率 ω 随经向波长 L_y 的变化
实线：无 f_H 作用；虚线：有 f_H 作用

3　结论

本文研究 β 效应和科里奥利力水平分量共同作用下大气 Rossby 波动的特征。结果分析表明，若扰动与纬度有关，科里奥利参数分量 f_H 影响波动传播的频率特征，这与 Beckman 和 Diebels[11] 所讨论 $f-f_H$ 平面上波动的情况是不相同的；如果扰动与纬度无关，则科里奥利参数分量 f_H 的影响消失，这一点也与 Sun[5] 研究 $f-f_H$ 平面波动稳定性的结论是一致的。结果还表明，考虑 f_H 的作用可以加强水平散度对斜压 Rossby 波的影响。

参　考　文　献

1　Phillips，N. A.，The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the “traditional approximation”，*J. Atmos. Sci.*，1966，**23**，626～628.

2　Phillips，N. A.，Reply to G. Veronis’s comments on Phillips (1966)，*J. Atmos. Sci.*，1968，**25**，1155～1157.

3　Veronis，G.，Comments on Phillips’s (1966) proposed simplification of the equations of motion for a shallow rotating atmosphere，*J. Atmos. Sci.*，1968，**25**，1154～1155.

4　Wangsness，R. K.，Comments on “The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the ‘traditional approximation’”，*J. Atmos. Sci.*，1970，**27**，504～506.

5　Sun，W.-Y.，Unsymmetrical symmetric instability，*Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*，1995，**121**，419～431.

6 White, A. A., and R. A. Bromley, Dynamically consistent, quasi-hydrostatic equations for global models with a complete representation of the Coriolis force, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1995, **121**, 399～418.

7 Draghici, I., Non－hydrostatic Coriolis effects in an isentropic coordinate frame, *Meteor. Hydrol.*, 1987, **17**, 45～54.

8 Leibovich, S., and S. K. Lele, The influence of the horizontal component of the Earth's angular velocity on the instability of the Ekman layer, *J. Fluid Mech.*, 1985, **150**, 41～87.

9 Burger, A. P., The potential vorticity equation: from planetary to small scale, *Tellus*, 1991, **43**A, 191～197.

10 Grimshaw, R. H. J., A note on the β-plane approximation, *Tellus*, 1975, **27**, 351～357.

11 Beckman, A., and S. Diebels, Effects of the horizontal component of the Earth's rotation on wave propagation on the f－plane, Part I: Barotropic Kelvin waves and amphidromic systems, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1994, **76**, 95～119.

Effects of the Horizontal Component of the Earth's Rotation on Rossby Waves

Zhao Qiang and Liu Shikuo

(*Department of Atmospheric Sciences*, *School of Physics*, *Peking University*, *Beijing* 100871)

Abstract A horizontal component of the earth's rotation is included in a set of linearized β－plane equations, which have a constant horizontal component of the Coriolis parameter, while the vertical component varies with latitude. This feature of the equations enables the vorticity and angular momentum principles to hold in their usual form. The influence of the $f_H = 2\Omega\cos\varphi$ effect on Rossby waves is investigated. The results show that the f_H effect can be important if the perturbations are function of the latitude. f_H has clear effects on the frequencies of the Rossby waves. We also find that when the perturbations are independent of latitude, the f_H effect disappears.

Key words: Coriolis force; β effect; Rossby Waves